ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Неразрешимые затруднения, встававшие в связи с проблемами математических объектов, математической истины ж плодотворности применения математики в познании внешнего мира, были, казалось, преодолены основными направлениями в основаниях математики (логицизм, формализм, интуиционизм, позднее конструктивизм, к которым некоторые исследователи добавляют еще и операционализм). Однако в них указанные проблемы просто обходились или отбрасывались. Так, проблема истинности математических утверждений не стояла для формализма; проблемы наглядного характера математических объектов и синте-тического априори в математическом познании отрицались логи-цизмом; проблемы применимости математики в эмпирическом по-знании практически игнорировалась традиционными направлениями в основаниях математики. Иногда же традиционные проблемы философии математики существенно изменяли свое содержание» Так» проблема существования математических объектов превращалась в проблему допустимой области определения для переменных формализованной теория множеств или в проблему того, переменные каких типов следует принимать при построении теория множеств.

В течение длительного периода исследования по основаниям математики рассматривались как современный этап философии математики. Но характерной чертой ситуации в философии математики в последние годы является, на наш взгляд, как раз постепенный отказ от подобного отождествления (см. также (4)). Исследования по основаниям математики в 70-80-е годы все чаще рассматриваются как один из разделов математики, являющийся, в сущности, не более принципиальным для анализа философских проблем математики, чем любой другой ее раздел.

Ради справедливости мы хотим отметить, что еще в 30-е годы такое воззрение было высказано Л.Вятгенштейном. "Никакое исчисление не может решить философских проблем", - говорил он (29, с.296). В своих Кэмбриджских лекциях 1934-1935 гг., впервые опубликованных в 1979 г., он подчеркивал, что "решение математической проблемы никогда не поможет нам решить проблемы философские. В этом отношении все математические проблемы лежат на одном и том же уровне и не имеют для нас какого-то особого значения... Говоря об основаниях математики, можно иметь в виду две разные вещи. В одном смысле можно сказать, что алгебра есть основание исчисления. Чтобы овладеть исчислением, надо знать алгебру. Математика в этом смысле подобна зданию, а исчисления типа построенного в Principia Mathematics являются одним из его этажей. Нижним этажом при этом будет то, с чего мы начинаем. В другом смысле об основаниях говорят., когда хотят подкрепить что-то ненадежное. Но воля в математике как таковой что-то ненадежно, то и любое основание будет столь же ненадежным" (31, с. 121), "...Проблемы того, что называют основаниями математики, составляют для нас ее основание не в большей степени, чем нарисованная скала - основание для нарисованной башни" (28, с.171),

По-видимому, имея в виду как раз отождествление философии математики с исследованиями по основаниям математики, Витгенштейн заметил как-то, что философы часто попадают в положение плохого администратора, который, вместо того чтобы выполнять свои функции общего руководства и контроля, пытается за всех вое делать сам. При этом он хватается за то, чего не умеет делать, и упускает свои прямые обязанности. "Философы особенно склонны взваливать на себя работу математиков" (29, с.369). И, чтобы еще раз подчеркнуть различие функций и проблем математиков и философов, он повторяет; "В математике есть только математические трудности, а вовсе не философские" (29, с.369). Это утверждение Витгенштейна вовсе не означает позитивистского отрицания значимости философских проблем. Он просто добивается признания того факта, что проблемы, встающие в математических теориях и исчислениях (например, выводящиеся в них противоречия), не могут разрешаться философскими рассуждениями.

Следовательно, проблемы, связанные с обнаружением парадоксов теория множеств, являются математическими, а не философскими проблемами, и, соответственно, различные подходы к их разрешению - математическими, а не философскими. Философы должны, наконец, это осознать, чтобы не упустить своих собственных задач.

Анализ современной литературы показывает, что подобное мнение получает все большее признание. Так. А.Менне (Дортмунд, ФРГ), отмечает, что логицизм, формализм, интуиционизм и операционализм отражают четыре различных типа мышления, присущих современной математике (20, с. 114). Представление такого рода подробно разработано у Г.Лолли (Университет Турина, Италия). Философия математики, отмечает Лолли, традиционно сосредоточивалась на проблемах, связанных о: а) природой математических объектов и б) достоверностью математического познания (16). Эти проблемы постоянно присутствовали в западном философском мышлении как частные формы более общих эпистемологических и онтологических вопросов, касающихся абстрактных объектов, природы универсалий, и др. Основания математики часто трактуют как еще одну проблемную сферу философии математики, которая добавилась к двум вышеназванным в XX в. А ее основные школы - логицизм» формализм и интуиционизм - как современные направления в философии математики. Однако, как подчеркивает Лолли, "представители этих трех школ не согласились бы о такой трактовкой. Основания математики определялись независимо от философия, а до известной степени и как альтернатива ей... Решающее обстоятельство состояло в том, что цели оснований математики были вовсе не созерцательными; тут речь шла не о том, чтобы на материале математики обосновать (или из нее извлечь) какие-то философские тезисы, а чтобы навести порядок в самой математике. Три школы различались по значению, по методам и по орудиям своей деятельности... Но, несмотря на различия, у них достаточно много общего, чтобы можно было говорить об особой культуре оснований науки, проявляющей-ся в разделяемом всеми тремя школами убеждении, что математика нуждается в их деятельности и в желании придать своей деятельности тот же характер, какой имеет любая математическая работа" (16, с.14). "Культура оснований" выросла на основе математики конца XIX в, и происходивших в ней процессов.

Ее тон "был совершенно антифилософским, поэтому с ее развитием философия математики вытеснялась и заменялась научными основаниями" (16, с.16). Существенно, что среди основных школ в основаниях математики не представлены - как это всегда имело место в собственно философии математики, -традиционные философские направления, например полностью отсутствует эмпиризм в объяснении природы математики. Однако в них получили отражение процессы, происходившие в самой математике. Так, логицизм являлся, по сути дела, завершением процесса обоснования математического анализа путем его арифметизации, что сопровождалось отказом от использования пространственных интуиций. На становление логицизма до известной степени повлияло также Дедекиндово определение числа и теоретико-множественная трактовка континуума у Кантора.

Гильбертовская программа и вообще развитие теории доказательств связаны с осуществленными в конце XIX в. аксиоматизациями геометрий. В геометрических работах Гильберта была построена характерная модель строгой аксиоматической теории. Аксиоматизация геометрий способствовала также распространению представления, что существование есть то же, что непротиворечивость.

Что касается интуиционизма, то идеи Брауэра, замечает Лолли, полностью оригинальны, однако и их можно связать с направлением работ так называемых французских полуинтуиционистов, прежде всего Э.Бореля и А.Пуанкаре. Развивая анализ, они стремились использовать теорию множеств в определенных ограниченных пределах. Они же критиковали логицизм, подчеркивая бесплодие формальной логики.

Три основные школы оснований можно рассматривать также как отражение трех основных позиций, встречающихся среди математиков, размышляющими над методами и значением своей работы. Ф.Клейн в 1933 г. выделял среди работающих математиков типы логициста, формалиста и интуициониста. Эти типы вовсе не связаны о приверженностью концепциям Фреге. Рассела, Гильберта или Брауэра. Логицистами среди математиков являются те, кто считает, что главное в математике - это логика, строгие определения и строгие доказательства. Они часто встречаются среди последователей К.Вейерштрасса. Формалистами можно назвать математиков, считающих самым главным в работе математика детальный формальный анализ проблемы и решение ее с помощью алгоритма. К ним можно причислить, например, К.Жордана, А.Кели, Г.Сильвестра. А к интуиционистам относятся математики, склонные апеллировать к геометрической интуиция, что характерно, например, для исследований лорда Кельвина по теория дифференциальных уравнений или для работ Х.Штаудта.

Работа Лолли привлекла нас отчетливым разделением философии математики и рефлексии работающих математиков. Необходимость такого разделения очевидна. Но в период, когда в философии математики доминировала исследования по основаниям математики» эти вещи оказались запутанными. Понадобится, по-видимому, длительный период возрождения собственно философии математики и осознания ею ее проблем.

13