ПРОБЛЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНТУИЦИЯ

Литература по философия математики последних лет составляет довольно пеструю картину. Например, далеко не всегда проблема математической интуиции рассматривается как проблема особой, "сверхчувственной" способности непосредственного знания, позволяющей нам отбирать правильные аксиому для математических теорий[1]. Так, в рассуждениях видного математика, лидера группы Бурбаки Жана Дьедонне (10, 11) интуиция предстает в более обыденном виде. Он объясняет ее как результат опыта математика, накопленного в ходе работы с определенными теориями. Он не собирается искать ее корней в общих структурах познавательных способностей человека.

С какими объектами имеет дело математика? Дьедонне не отрицает, что "математика происходит из проблем обыденной жизни, счета объектов или измерения величин" (II, с.9). Практическое происхождение математики очевидно в случае математического анализа или теории дифференциальных уравнений. И тем не менее лишь меньшая часть математических теорий развивалась и развивается в непрерывном контакте о приложениями. Подавляющее их большинство развивалось "из внутренних побуждений", причем зачастую проблемы, "по-видимос-ти, наиболее бесполезные, приводили к наиболее мощным и красивым теориям" (II, с.II). Такими, например, были упорные поиски решений степенных уравнений в радикалах тогда, когда существовали методы для нахождения приближенных решений. Развиваясь в основном свободно и независимо, современная математика превратилась в изучение очень общих абстрактных структур, таких, как группы, кольца, топологические пространства, операторы и пр. Поскольку современная математика так оторвалась от уровня восприятия, обыденного познания и здравого смысла, бесполезно искать в этих сферах объяснения современных математических понятий или интуицию работавшего математика. Она возникает из "длительного знакомства о предметом и не требует понятий, непосредственно выведенных из данных чувств" (II, с.14).

[1] Краткий обзор взглядов на интуицию основателей трех школ в основаниях математики. - См. в (24).

Дьедонне обращает внимание (10) на тот важный факт, что в современной математике распространен "перенос" интуиции с одних структур на другие. Это происходит, например, тогда, когда от трехмерного пространства переходят к пространству произвольной размерности или когда геометрический язык и геометрические методы переносятся в различные разделы математики. Такие "переносы" еще более усложняют вопрос о связи математической интуиции и математических теорий, в которых она используется, о реальностью.

Впрочем, желание видеть в математической интуиции связь с некоторыми неизменными глубинными структурами сознания, по-видимому, неистребимо. Оно ярко проявилось в работе Г.Мешковското (профессор Педагогического института и Свободного университета Западного Берлина) о характерным названием "Числа как архетипы", "В современной математике, -отмечает Мешковский, - все шире распространяется теоретико-множественный подход крута Бурбаки. Математику рассматривают как учение о множествах, видя во всех ее дисциплинах тот или иной способ говорить о множествах и их отношениях" (22, с.17). Существуют, как известно, различные способы определения натурального числа на языке теория множеств. Но вот что интересно: "Ни одно из этих определений формалистической математики не старше ста лет. Великие исследователи теории чисел, например Эйлер и Гаусс, не знали теоретико-множест-венных определений чисел и не имели системы аксиом для множества N натуральных чисел. И тем не менее они открыли глубокие законы этого множества. Более двух тысяч лет назад пифагорейцы правильно описывали свойства числового ряда. Естественно, встает вопрос об - не получившем выражения в формализмах - "основании бытия" числового ряда" (22, с,20).

Еще в комментариях Прокла к Евклиду говорится о "прообразах" чисел, фигур, отношений и движений, пребывающих в душе. Кеплер, обращаясь к этим комментариям, говорит об "архетипах". Например, количества суть архетипы мира, содержащиеся в интеллекте бога. Мешковский считает, что когда Кроне-кер объявляет натуральные числа творениями бога, а интуиционизм кладет в основу здания математики праинтуицию числа, то "здесь в современных словах содержится старое учение ой архетипах" (22, с.22). Учение об архетипах, упоминает он, получило новое, психологическое обоснование у К.Юнга: архетипы пребывают в "коллективном бессознательном" и выступают для каждого отдельного субъекта как нечто "предзаданное". Поэтому, считает Мешковский, когда на уроках математики число определяют как имя класса множеств, то это воспринимается учениками как акт насилия.

Но можно ли в архетипе числа найти основание для всей математики? Прокл, как уже упоминалось, помимо чисел говорил о прообразах фигур, отношений и движений. А Кеплер видел в геометрических понятиях архетипы космоса и не приравнивал в этом отношении числа к геометрическим фигурам.

Современная аналитическая геометрия основывает геометрические понятия на числовых. Однако Мешковский обращает внимание на факты, свидетельствующие в пользу самостоятельного существования геометрии. Прежде всего на это указывает то обстоятельство, что классическая греческая геометрия гораздо старше, чем более сложная геометрия Декарта. Большая сложность аналитической геометрии заключается, в частности, в том, что она требует определения и изучения непрерывности а Евклидова геометрия, использующая лишь наглядные понятия, обходилась без этого. Далее, лишь в самое недавнее время Кантором было дано понятийное представление континуума. Однако за много веков до того математики и философы имели представление о континууме я как-бы "духовными очами" видели некоторые его свойства. Этот пример также позволяет говорить о "геометрических архетипах".

Исчерпывают ли арифметические и геометрические архетипы все множество архетипов? Мешковский считает, что нет. Он полагает, что математик обладает способностью открывать новые архетипы. Ярчайшим примером является деятельность Кантора, создавшего учение о трансфинитных числах. При этом Мешковского не смущает тот факт, что до Кантора никто не обнаруживал в своем сознании подобные "архетипы". Не случайно, конечно, он тут же переходит на платоновский язык, говоря, что Кантор открыл никому до того неведомую область в мире идей. Ему кажется особенно знаменательным и позволяющим говорить о "коллективном бессознательном" то, что у Кантора сначала появились некоторые неясные "прообразы" трансфинитных понятий, и только много лет спустя - определения, которые он смог сообщить другим. Кантор как бы не изобретал теорию трансфинитных чисел, но пытался найти адекватное выражение для некоей интуитивно созерцаемой им данности.

Выступая за собственные основания и, так сказать, сохранение "индивидуальности" отдельных областей математики, Мешковский выступает против свойственной современной математике тенденции к единому обоснованию. Конечно, мы свободны в построении математики тем пли иным способом. Но, помещая ее разделы не из надлежащие им места, мы расплачиваемся искажениями я усложнениями. Так, для построения числового ряда приходится использовать аксиому бесконечности, хотя тысячелетиями арифметика развивалась без нее.

Рассуждениями об архетипах Мешковский пытается обосно-вать свою позицию "реформированного платонизма" (22, с.27), Под платонизмом он понимает просто убеждение в том, что математические предложения являются истинными или ложными. Он критикует гильбертовский формализм» сводящий правильность, приемлемости истинность математических теорий к логической непротиворечивости, и сочувственно ссылается на Р.Фреге, для которого аксиомы были истинными утверждениями, принимаемыми без доказательства в силу того, что их истинность определялась внелогическими источниками. Формализм выступил под лозунгом устранения из математики всякой метафизики, типа предположений о реальном или идеальном существовании каких-то "сущностей". В то же время, конечно, формалисты и сами не хотят превратить математику в игру с бессмысленными значками. Они заявляют, что математические аксиомы должны быть истинными и осмысленными. "Но откуда они получат свой смысл, если изгнана всякая метафизика?" (21, с.287), К тому же теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики показала, что непротиворечивость системы нельзя доказать ее собственными средствами, следовательно, абсолютного доказательства непротиворечивости общей теории множеств, на базе которой пытаются построить всю математику, нельзя дать вообще. Это еще более остро ставит вопрос об осмысленности и истинности математических теорий.

Вопрос об истинности математического знания Мешковский решает в духе своего "реформированного платонизма", т.е. без всякого обращения к вопросам соотношения математики и реальности. Он постулирует соответствующую основным математическим теориям психическую реальность - архетипы. Однако эта идея не может дать реального выхода из затруднений. В самом деле, упоминаемые Мешковским арифметические и геометрические архетипы не могут сделать содержательными все современные математические теория - они слишком разнообразны и абстрактны. Если же мы пойдем за Мешковским, не побоявшимся ввести архетип трансфинитных чисел, и введем столько архетипов, сколько у нас есть теорий (пользуясь тем, что еще никто не запрещал умножать архетипы без необходимости!), то у нас появятся архетипы евклидова и неевклидова пространства, чисел стандартной и нестандартной арифметики, множеств стандартной и нестандартной теории множеств и т.д., и т.п., и пр. Таким простым "умножением сущностей", конечно, нельзя разрешить философские затруднения, возникающие при объяснении содержательности математических теорий,

В современной литературе по философии математики можно найти достаточно позиций, несовместимых о защитой платонизма. Например, опровержению платонизма посвящены работы

Джубина (12) и Китчера (13). Филип Китчер (Вермонтский университет, Берлингтон, США) стремится опровергнуть "арифметический платонизм", т.е. тезис, что истинность или ложность утверждений арифметики зависит от свойств особых абстрактных объектов. Он подчеркивает то принципиальное обстоятельство, что если математику понимать как науку об этих абстрактных объектах, нельзя будет объяснить, почему она оказывается столь полезной при изучения физического мира. Он предлагает следующий выход: рассматривать арифметику не как науку о числах, а как науку об идеальных операциях. Тогда "полезность арифметики объясняется тем, что операций, которые мы выполняем с обычными объектами, являются некоторыми приближениями к этим идеальным операциям" (13, с. 132). С этим можно было бы согласиться, хотя и очевидно, что арифметика изучает свойства чисел, а не операции, которые мы осуществляем о реальными объектами. Нам кажется, что Китчер и сторонники платонизма говорят о разных вещах. Последние отправляются от абстракций, требующихся для того, чтобы описать функционирование уже сложившегося и ставшего автономным (от непосредственных запросов практики и эмпирических наук) и развивающегося по собственным законам математического знания. При этом, как отмечал Б.С.Грязнов, "рассматривая математические теории как сложившиеся, т.е. вне их генезиса и развития, конечно, иногда трудно уловить их связь я зависимость от объективного мира" (2, с. 97-98). Китчер, отправлялось от вопроса о применимости арифметики в практике я эмпирическом познании, фактически ставит вопрос, только о происхождении ее понятий из процедур и операций, совершаемых в реальной жизни.

Прямым защитником математического реализма является Марк Штейнер (Израиль). Математический реализм дает ему повод для обсуждения целого ряда тонкостей, связанных о понятием "существования". Он различает существование и реальное существование. Последнее определяется как независимое существование. Это, конечно, требует немедленного уточнения; независимости от чего и в каком смысле? Поэтому Штейнер различает независимость в онтологическом и в гносеологическом планах. В онтологическом плане разницу между независимым существованием можно показать на следующем примере: существует кусок сыра и существуют дырочки в этом сире. Последние действительно существуют, по они нереальны в онтологическом смысле. Онтологическая зависимость есть зависимость существования от другой вещи или рода вещей. В связи с этим Штейнер вспоминает аристотелевскую критику платоновской теории форм и математических объектов. Аристотель не ставил под сомнение существование последних. Но он возражал против их независимого, отдельного существования» доказывая, что без материальных вещей не существовало бы ни форм, ни чисел, Идею онтологической зависимости можно выразить также, оказав, что онтологически зависимое существование - это существование в качестве свойства другой вещи. "Но подобный способ описания заранее предрешал бы вопрос в пользу аристотелевской точки зрения" (27, с.364),

Рассматривая вопрос о зависимом существовании в эпис-темологическом плане, Штейнер принимает следующий критерий: реально существующим является то, чему можно давать различные независимые (т.е. принадлежащие разным концептуальным схемам или теориям) описания. Такое понимание мотивируется тем, что "быть реальным - значит быть независимым... от нашей концептуальной схемы..." (27, с.369). Данное определение имеет одно любопытное следствие. Поскольку развитие науки имеет тенденцию к объединению различных теорий в более сильных и всеохватывающих теориях, то все меньшее число сущностей и объектов будут удовлетворять критерию независимого существования. Они приобретут статус проявлений или свойств.

Что дают все эти рассуждения для проблемы математических объектов? Различение существования и реального существования предоставляется нам действительно удобным для обсуждения этой проблемы. Заметим, что в рассмотренных выше подходах Мэдди, Парсонса, Резника, Китчера математическим объектам приписывалось как раз онтологически зависимое существование, а Мешковский был бы склонен признавать я реальное их существование (для него архетипы независимы ни от предметов внешнего мира, ни от людей, которые осознают или не осознают их). Однако все эти столь различные подходы называют в литературе платонизмом.

Конечно, тезис о зависимом существовании математических объектов звучит правдоподобнее и защищать его проще, чем утверждение о независимом их существования. Тем не менее Штейнер считает, что можно найти основания для утверждения о реальном существовании математических объектов. Последнее оказывается у него связанным с объяснением математических открытий и плодотворности математики. Рассмотрим, в частности, формулу

$$e^{i\pi} + I = 0.$$

"Если чудеса вообще существуют, - комментирует Штейнер, -то это - одно из них" (27, с.375). Такая простая связь е, П, I, i и 0 действительно, совершенно неожиданна. Ноль и i были когда-то введены как средства для упрощения вычислений, которым не приписывалось никакого смысла или "существования", е и П - трансцендентные числа, введенные совершенно независимо друг от друга и безо всякой связи с введением нуля и мнимой единицы. "Не было никаких оснований ожидать, что эти независимо введенные числа связаны столь простым соотношением. Плодотворность математики проявляется именно в этой тенденция независимо введенных символов обнаруживать красивые я простые соотношения" (27, с.375).

Чтобы доказать эпистемологически независимое существовавке математических объектов, мы должны, по принятому выше критерию, найти независимые источники описания е и П, принятые в независимых теориях. Штейнер делает это таким образом: П определяется в геометрия как отношение окружности круга к его диаметру. В теории комплексных чисел для него существует другое описание; $\arg(-1) = \pi$. Число e, определяемое как $\lim_{n \to \infty}(1+1/n)^n$, описывается в теории функций комплексного переменного через формулу $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Отсюда делается вывод, что рассматриваемые математические объекты обладают независимым существованием. Данный вывод существенно опирается на допущение о независимости геометрии, математического анализа я теория функций комплексного переменного. Подобное допущение является решающим для рассуждений Штейнера. Но насколько оно оправдано?

Допустив существование математических объектов, мы должны решить вопрос; каким образом мы имеем к ним доступ и получаем о них информацию? Есть ли это способность "интуиции", или внечувственного созерцания объектов? Штейнер отмечает привлекательность рассмотренного выше подхода Парсонса, стремившегося показать, что математическая интуиция - это не особая познавательная способность, а особая черта восприятия обычных физических объектов. Однако трудно представить себе, как в результате описываемых Парсонсом процессов могло бы появиться число П. Допущение только интуиция de dicto слишком слабо. Гёдель, как считает Штейнер, имел в виду интуицию de re. Но, как признается Штейнер в заключение, никакого удовлетворительного, не отдающего мистикой объяснения для нее он не знает.

Наше рассмотрение дискуссий вокруг математического реализма мы хотим завершить статьей М.Маховера (17). Маховер (Челси Колледж, Лондон, Великобритания) ставит перед собой задачу не защитить или опровергнуть платонизм, а разобраться, какие обстоятельства вызывают к жизни данную концепцию и какими альтернативными способами можно было бы их объяснить.

Рассматриваются такие направления в философии математики, как логицизм, платонизм, конвенционализм, интуиционизм, конструктивизм и формализм.

Как известно, программа логицизма оказалась нереализуемой. Далее, ее существенным недостатком было то, что она пыталась объяснить теоретико-множественный аспект математики и игнорировала конструктивные процессы. Этим последним недостатком отличается и платонизм.

Платонизм связан о представлением, будто объекты чистой математики суть не продукты человеческого ума, а вне и независимо от него существующие вещи. Он возрождается вновь и вновь. Опровергать его рациональными доводами так же бесполезно, как и веру в дурной глаз. Причина его живучести заключается в том, что он подкрепляется определенными чертами математического познания, а именно неизбежным процессом отчуждения результатов математической деятельности от породившего их ума. Результаты реифицируются и представляются как обладающие собственными законами и развитием. Процессы отчуждения происходят во всех сферах человеческой деятельности - в экономике, праве, религии, искусстве. И они неизменно порождают иллюзорные представления.

В литературе можно встретиться о утверждениями, что платонизм необходим хотя бы потому, что позволяет более правильно описать своеобразие математического познания и объяснить природу математики. Однако платонистская иллюзия не столь плодотворна, как зачастую представляется. Она закрывает путь к пониманию тех частей и разделов математики, которые носят конструктивный характер.

Конструктивизм, считает Маховер, выделяет ряд бесспорных фактов относительно математики: например, известно, что конструктивные доказательства информативнее и потому предпочтительнее неконструктивных. Но и эта концепция неудовлетворительна. Она не только отрицает ценность и значимость неконструктивных разделов и теорий в математике, но и закрывает все пути к их пониманию.

Интуиционистская концепция у Л.Брауэра носит слишком субъективистский характер. Конечно, математика разворачивается прежде всего в сознания отдельного математика. "Но отсюда не следует, что данное индивидуальное сознание есть источник математики. Скорее можно было бы утверждать, что математика, находящаяся в сознания индивида, есть всего лишь интернализация математического рассуждения" (17, с.8).

Конвенционализм утверждает, что математические предложения истинны но соглашению. Это воззрение тоже отражает какие-то реальные черты математической деятельности. Ведь предложения математики считаются истинными вовсе не потому, что они соответствуют действительности, проверены в опыте я проч. Однако, как и другие рассмотренные концепции, конвенционализм односторонен и слишком многое оставляет необъяснен-ным. "Предположим, что утверждения математики действительно истинны по соглашению. Но как и почему было решено считать истинными именно эти, а не какие-то другие утверждения? Как соглашения такого рода распространяются, становятся общезначимыми? Почему математики подчиняются этим соглашениям? Что придает соглашениям видимость объективной необходимости?" (17, с.6). При всех своих слабостях конвенционализм имеет, однако, достоинство, выделяющее его среди других концепций. Это - осознание социального характера математической деятельности и значения для понимания математики таких процессов, как распространение математических результатов и достижение согласия относительно их.

Что касается Формализма, то "его крупной заслугой является, что он один среди всех традиционных концепций признает права как отчужденной структуралистской, так и неотчужденной конструктивной математической деятельности" (17, с. 7), Однако в реальной математике обе эти части переплетены, а формализм разводит их и ставит на разные уровни. Более того, значительная часть математики превращается в лишенную осмысленности игру с символами. С подлинной осмысленной математакой она соединяется одной лишь нитью - доказательством непротиворечивости. Однако вторая теорема Гёделя о неполноте показывает, что для большинства формальных систем вряд ли удастся доказать ах непротиворечивость методами, признаваемыми формализмом. Поэтому весьма значительная часть математики так и останется лишенной осмысленности.

Каким образом можно учесть одновременно и конструктивный, и неконструктивный аспекты математики? На этот вопрос дается следующий предварительный ответ. Математика есть прежде всего конструктивная деятельность сознания (или, по крайней мере, начинается с нее). Однако большая часть материала, с которым имеет дело любой математик, продуцирована не его сознанием, а получена им извне. Рассмотрим, например, числовую функцию f(n), определенную следующим образом:

$$f(n)=\begin{cases} 0, & \text{если существуют такие целые положительные числа } x,\ y \text{ и } z, \text{ что } x^n + y^n = z^n; \\ 1 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

С конструктивистскойточки зрения подобное определение неприемлемо, так как неизвестно, существуют ли хоть для одного n 3 такие x, y и z. Поэтому мы не можем определить для всех a значения функции. Но если кто-то несколько минут назад уже разрешил проблему Ферма, то пределение стало корректным, хотя мы об этом еще не знаем. Это ни в коем случае не будет результатом конструктивной деятельности нашего сознания, а - лишь внешним обстоятельством, которое мы в некоторый момент обнаруживаем, как некий природный факт. Поэтому реификация математических понятий и объектов объяснима и неизбежна. Она связана в конечном счете с социальной природой математики.

Нам представляется, что идея Маховера интересна, но его объяснение реификации математических понятий тем, что они произведены не нашим сознанием» а сознанием других представителей математического научного сообщества, недостаточно. Ведь таким образом нельзя объяснять, например, почему результат, что $e^{i\pi}=-1$ выступает как неожиданный даже для тех, кем он был обнаружен.

Более справедливо высказываемое многими авторами (например, Меняв (20) или Штейнером (27)) мнение, что допущение о независимых математических объектах связано с тем, что мы не свободны приписывать им любые свойства, а должны открывать их, независимо от того, являются ли они продуктом моего сознания или сознания моего коллеги.

В самом деле, если математик вводит какие-то объекты или структуры, то относительно них он может получать результаты, которые и его самого поразят как неожиданные. Так, Г.Кантор был поражен собственным результатом о равномощности множества точек отрезка и квадрата, построенного на этом отрезке. С чем в этом случае связано то, что результат воспринимается самим создателем теории как независимый от его сознания и его предположений о возможном поведении рассматриваемых им математических объектов? С тем, что результат в известном смысле действительно независим от его соз-нания. Он был предопределен тем, что Кантор оперировал о объектами создаваемой им теории по не зависящим от него правилам логики. Реификацию математических объектов и результатов мы можем объяснить тем, что все математики должны работать в своих теориях по некоторым (не до конца фиксированным) и в основном от них не зависящим правилам. Таким образом, Маховер прав, указывая на социальную природу математики как на основную причину реификация математических объектов. Но это проявляется не в том, что в ней попользуются результаты, полученные другими, а в том, что следуют общепринятым правилам.

В то же время мы хотим подчеркнуть, что платонистское допущение не обязательно предполагает веру в буквальное существование идеальных объектов в "царстве идей"» не зависящем от нашего сознания и познания. Обращение к платонизму в современной западной литературе скорее созвучно попперовской трактовке автономии "третьего мира". Как пишет Поппер, "идея автономии является центральной в моей теория третьего мира; хотя третий мир есть человеческий продукт, человеческое творение, он в свою очередь создает свою область автономия; то же самое происходит и с продуктами деятельности других животных. Примеры этого весьма многочисленны. Возможно, саше поразительные из них могут быть обнаружены в теория натуральных чисел, в любом случае именно они должны рассматриваться нами в качестве стандартных примеров" (3, с.478). Таким образом, Поппер подчеркивает, что объекты "третьего мира" во-первых, возникают как продукты человеческой деятельности, во-вторых» подчиняются собственным закономерностям, в силу чего могут анализироваться независимо от деятельности, результатом которой они являются, и могут, в-третьих, иметь следствия, которые мы не способны предвидеть заранее. Так, "натуральный ряд чисел, которые мы конструируем, создает простые числа, которые мы открываем, а они в свою очередь создают проблемы, о которых мы и не мечтали. Вот именно так я становятся возможным математическое открытие" (3, с.478), Для оценки этих констатаций Поппера надо учесть, что они не обладают особой объяснительной силой. Из них не ясны ни природа автономных законов, управляющих поведением математических объектов, ни то, каким образом в результате их исследования получаются результаты, применимые при изучении материального мира и в практической деятельности.