НЕЧЕТКИЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ НАДЕЖНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭКОНОМИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

В.С. Зайкин, В.Н.Павлов

Для оценки качества планов при решении технических, а затем и экономических задач широко применяется показатель надежности. Согласно теории под надежностью плана понимается потенциальная вероятность выполнения содержащихся в нем решений по объемам и срокам выпуска продукции, по ее технико-экономическим и другим выходным показателям, т.е. оценка вероятности того, что приведенные затраты программы находятся в заданных пределах. В зависимости от постановки конкретной задачи можно сформировать и другие показатели надежности.

Если исследование проводится в условиях неопределенности исходной информации, когда заданы варианты условий и вероятности их появления, модель следует дополнить характеристиками такого типа:

- устойчивость значения функционала относительно возможных возмущений;
- величина дополнительных затрат, необходимых на адаптацию рассматриваемого варианта ко всем вероятным условиям.

В процесс принятия решений на макроуровне можно ввести экономические категории «надежность» и «маневренность». Характерной особенностью подобных разработок стратегии развития экономики является, по мнению авторов, неуверенность в выполнении предлагаемых решений, поскольку всякое решение, связанное с будущим развитием, чревато непредсказуемостью достижения конечного результата. Введение же в систему принятия решений представлений о надежности, маневрировании ресурсами, осмысление факта неполноты информации, используемой в расчетах при обосновании той или иной концепции развития, позволяют принимать решения с достаточной степенью достоверности.

Например, академик В. Ивантер в статьях и многочисленных интервью о вариантах развития экономики России обращается к понятиям эффективности и надежности принятия долгосрочных экономических решений [1]. Этот подход использовался при обосновании концепции социально-экономического развития России на период 2000–2010 гг. и этапов достижения сформулированной в ней главной цели. В таких разработках внимание акцентируется также на создании механизмов, связанных с повышением эффективности и надежности экономики [2].

В данной статье рассматривается подход к исследованию надежности, основанный на нечетком описании неопределенности экономических процессов.

НЕЧЕТКОЕ ОПИСАНИЕ ПАРАМЕТРОВ

Понятие интервального числа. Фиксируем положительное вещественное число a. Обозначим $\overset{=}{x}_a \quad x \;\frac{a}{2}, x \;\frac{a}{2}$. Назовем $\overset{=}{x}_a$ интервальным числом уровня a.

Нечеткие множества. Пусть X есть некоторая совокупность, $I = [0,1]$ – отрезок вещественной оси, I^x – пространство всех отображений $: X \quad [0,1]$.

Определение 1. Следуя работе [3], всякое отображение I^x будем называть характеристической функцией нечеткого множества A_x, содержащегося в X. Для всякого X значение (x) интерпретируется как правдоподобность того, что A_x.

Примечание. Функция (x) для нечеткого множества A_x в литературе называется функцией принадлежности (membership function).

Операции над нечеткими множествами определяются через операции над их характеристическими функциями:

$\overset{=}{}(x) \quad 1 \quad (x)$ – характеристическая функция дополнения, так что $A_{\overset{=}{x}} \quad X \quad A_x$;

$(x) \quad \min \quad (x), \ (x)$ – характеристическая функция пересечения, так что $A \quad A \quad A$;

$(x) \quad \max \quad (x), \ (x)$ – характеристическая функция объединения, так что $A \quad A \quad A$.

Определение 2. Обозначим через (X) совокупность всех нечетких множеств, содержащихся в X. Нечетким отображением из пространства Z в пространство X будем называть всякое отображение вида $h : Z \quad (X)$.

Нечеткое множество, порожденное интервальным представлением данных. Пусть есть m-мерная случайная вещественная величина, – соответствующая вероятностная мера и $\Phi : R^m \quad [0,1]$ – функция распределения этой случайной величины. Определим отображение $\overset{=}{}_a : R_m \quad [0,1]$ формулой

$$\overset{=}{}_a(x) \overset{df}{=} \overline{X}_a) \int_{x \ \frac{a}{2}}^{x \ \frac{a}{2}} \mathrm{d}\Phi(t), \qquad (1)$$

где через $\int_a^b \mathrm{d}\Phi(t)$ обозначен интеграл Стильтьеса по параллелепипеду

$Q \quad \{t \quad R^m | a_k \quad t_k \quad b_k\} \quad [a, b)$.

Отображение $\bar{\bar{\ }}_a$ при любом $a > 0$ представляет собой характеристическую функцию некоторого нечеткого множества. Это множество порождено случайной величиной , причем согласно определению (2) число $\bar{\bar{\ }}_a\ (x)$ представляет собой вероятность того, что случайная величина принимает значения из параллелепипеда $\bar{\bar{x}}_a$, т.е. вероятность того, что в результате наблюдения за случайной величиной мы получим значение из параллелепипеда $\bar{\bar{x}}_a$. Нечеткое множество, характеристической функцией которого является $\bar{\bar{\ }}_a$, и будем называть множеством, порожденным интервальным представлением данных. Согласно формуле (1) при фиксированном $x \quad R^m$ значение $\bar{\bar{\ }}_a(x)$ является монотонно возрастающей функцией параметра a.

Обозначим через $L_1(-\quad,\quad)$ пространство измеримых по Лебегу вещественных функций, заданных на всей прямой, для которых $\|f\|_{L_1} \quad |f(t)|\mathrm{d}t$. Пусть – скалярная случайная величина. Отображение $\bar{\bar{\ }}_a$ в этом случае обладает следующими свойствами*.

Лемма 1. Для всякого $a > 0$ справедливо включение $\bar{\bar{\ }}_a \quad L_1(\quad,\quad)$, причем $\left\|\bar{\bar{\ }}_a\right\|_{L_1} \quad a.$

Лемма 2. Для всякого a = $(a_1, a_2, ..., a_m) > 0$, $a \quad R^m$ функция $\bar{\bar{\ }}_a$ принадлежит пространству $L_1^m(\quad,\quad)$ и справедливо равенство

$$\left\|\bar{\bar{\ }}_a\right\|_{L_1^m} \quad \prod_{k\ 1}^{m} a_k\ .$$

Используя функцию $\bar{\bar{\ }}_a$, определим теперь меру всякого измеримого по Лебегу множества A $\quad R^n$:

$$_{\bar{\bar{a}}}(A) \quad \int_A \bar{\bar{\ }}_a(x)\mathrm{d}x \,/ \prod_{k\ 1}^{m} a_k. \qquad (2)$$

Из леммы 2 следует, что для всякого A $\quad R^n$ справедливы неравенства $0 \quad _{\bar{\bar{a}}}(A) \quad 1$. Число $_{\bar{\bar{a}}}(A)$ интерпретируется как вероятность того, что

* Формулировки лемм 1–4 заимствованы из работы [4].

пересечение множества A с нечетким множеством $A_{\underset{a}{=}}$ не пусто. Вероятностную меру $_{\underset{a}{=}}(\underline{\underline{A}})$ назовем мерой, порожденной интервальным представлением данных $_{a}$.

Свойства вероятностной меры $_{\underset{a}{=}}$**.** Обозначим через $F_1(x)$ функцию распределения, соответствующую мере $_{\underset{a}{=}}$.

Лемма 3. Пусть $x, a \quad R^1$ и $a > 0$. Тогда справедливо равенство

$$F_1(x) \quad \frac{1}{a} {}_{x\ \frac{a}{2}}^{x\ \frac{a}{2}} \Phi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Лемма 4. Пусть $x, a \quad R^1$, $a > 0$, $\dfrac{{}^{m}\Phi(t)}{t_1\ \ t_2\dots\ \ t_m} \quad \dfrac{}{t_1}\ \dfrac{}{t_2}\dots\dfrac{\Phi(t)}{t_m}$ всюду существует и непрерывна. Тогда справедливо равенство

$$F_1(x) \quad {}_{k\ \ 1}^{m} \frac{1}{a_k} {}_{x_1\ \frac{a_1}{2}}^{x_1\ \frac{a_1}{2}} \dots {}_{x_m\ \frac{a_m}{2}}^{x_m\ \frac{a_m}{2}} \Phi(t_1, t_2, \dots, t_m)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\dots\mathrm{d}t_m.$$

МЕТОДИКА НАДЕЖНОСТИ НЕЧЕТКОГО РАНЖИРОВАНИЯ

Методика нечеткого анализа качественных экономических показателей широко используется в мировой экономической науке. В данной статье предлагается подход к оценке надежности нечеткого ранжирования качественных экономических показателей, основанный на треугольном представлении нечетких чисел.

По аналогии с подходом, представленным в работе [5], будем считать, что экономическая система описывается одним качественным параметром – y и конечным числом количественных – $x = (w_1, w_2, ..., w_m)$. Ставится задача оценить значение качественного показателя по заданным значениям количественных.

Если интерпретировать качественный показатель как цель функционирования экономической системы, ввести понятие степени достижения цели и при этом поставить в соответствие очень низкому уровню число 0, очень высокому уровню – число 1, то рассматриваемая степень будет принимать значения из отрезка $I = [0;1]$. В то же время естественно предполагать, что степень достижения цели не может быть определена однозначно по известному вектору x. В настоящей работе принимается гипотеза, что по заданному вектору x для каждого уровня $z \quad I$ мы можем определить правдоподобность $p_x(z)$ того, что уровень достижения цели z – истинный. Иными словами, каждому набору количественных параметров $x = (w_1, w_2, ..., w_m)$ ставится в соответствие некоторая функция $p_x(z)$, которая для каждого числа $z \quad [0;1]$ задает вероятность $p(z) = p_x(z)$ того, что число z является численным значением степени достижения цели, соответствующей набору x.

Такой подход оправдан, когда либо невозможно определить полный перечень факторов, влияющих на достижение цели, либо невозможно однозначно определить зависимость цели от совокупности факторов.

Определение 3. Нечетким вещественным числом будем называть всякое отображение $\quad : R \quad I$, где через R обозначена вещественная прямая.

Относительно нечетких чисел справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. Пусть $_1$ и $_2$ – суммируемые нечеткие числа, причем

$_i(x)\,\mathrm{d}x \quad c_i$. Тогда справедливо неравенство

$$_1(x)\,\mathrm{d}x \underset{x}{\quad} {}_2(u)\,\mathrm{d}u \quad c_1 \quad c_2. \qquad (3)$$

Доказательство. Поскольку $_i(x)$ при любом x, то

$$_1(x)\,\mathrm{d}x \underset{x}{\quad} {}_2(u)\,\mathrm{d}u \qquad {}_1(x)\,\mathrm{d}x \quad {}_2(u)\,\mathrm{d}u \quad c_1 \quad c_2.$$

Нечеткое ранжирование. Итак, будем считать, что значение качественного показателя есть нечеткое множество из отрезка $I = [0;1]$, заданное функцией $p_x(z)$, т.е. отображением $p : R^m \qquad (I)$. Используя методику, описанную в работе [5], нечеткое ранжирование будем выполнять на основе наиболее вероятного значения нечеткого показателя. Наиболее вероятное значение находится из решения задачи максимизации

$$z^*(x) \quad \operatorname*{Arg\,max}_{z \quad I} p_x(z). \qquad (4)$$

Справедливо следующее свойство функции $z^*(x)$.

Лемма 6. Если функция $p_x(z)$ непрерывна, как функция переменных (x, z), и множество $Z(x) = \operatorname{Arg}\max_{z \in I} p_x(z)$ для каждого x одноточечно, то $z^*(x)$ непрерывна. (Доказательство см. в работе [5].)

Можно ввести на R^m линейный порядок: $x \succ y$, если $z^*(x) > z^*(y)$. Этот порядок, задаваемый отображением $\mathrm{R}^m \to \mathcal{F}(I)$, будем называть нечетким ранжированием состояний экономической системы $x \in R^m$ по наиболее вероятному значению.

Простейшая схема приближенного вычисления функции $z^*(x)$ заключается в следующем. Пусть задано некоторое множество точек $u^1, u^2, \ldots, u^n \in R^m$ и значения $z^*(u^k)$ известны. Числа $z^*(u^k)$ могут быть оценены экспертно. Значение $z^*(x)$ приближенно будет вычисляться по интерполяционной формуле [6]

$$z^*(x) \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{z^*(u^k)}{r(x, u^k)}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r(x, u^k)}}, \tag{5}$$

где $r(x, u^k)$ – расстояние между x и u^k.

Качество интерполяции (5) зависит от расположения выбранных точек относительно интересующих значений параметров.

Надежность и ошибки нечеткого ранжирования. Пусть даны два состояния экономической системы x и y.

Определение 4. Надежностью нечеткого ранжирования $x \succ y$ по наиболее вероятному значению $z^*(x)$ будем называть вероятность того, что состояние x действительно лучше состояния y.

Для приближенной оценки надежности нечеткого ранжирования по наиболее вероятному значению $z^*(x)$ воспользуемся следующим приемом. Обозначим $a = z^*(x)$ и рассмотрим аппроксимацию функции $p_x(z)$ с помощью треугольного нечеткого числа $\mu_c(z - a)$, заданного формулой

$$\mu_c(z) = \begin{cases} 1 - \frac{|z|}{c}, \text{если } |z| \le c \\ 0, \text{если } |z| > c \end{cases}. \tag{6}$$

Предположим, что качественный показатель оценивается с помощью нечеткого треугольного числа (6) и имеется два треугольных числа: $_c(z-a)$ с центром в точке a, являющееся нечеткой оценкой значения показателя в точке x_1, и $_c(z-b)$ с центром в точке b, являющееся нечеткой оценкой значения показателя в точке x_2, причем выполнено соотношение $b > a$. Тогда наиболее вероятная оценка в точке x_2 с помощью числа $_c(z-b)$ равна b и оказывается больше наиболее вероятной оценки в точке x_1, равной a. Для вычисления вероятности того, что фактическое значение показателя в точке x_2 больше значения в точке x_1, т.е. для вычисления надежности нечеткого ранжирования эффективности по наиболее вероятному значению, рассмотрим случайную величину $_a$ с плотностью распределения $f_a(z) = \ _c(z-a)/c$. Если предположить, что случайные величины $_a$ при разных a статистически независимы, и обозначить $b = a +$, то искомая вероятность вычисляется по формуле

$$T(\ )\quad \ _{c}^{c} f_0(x)\,\mathrm{d}x\quad \ _{x}^{c} f\ (u)\,\mathrm{d}u\,. \tag{7}$$

По лемме 5 справедливы неравенства 0 $T(\ )$ 1.

Функция надежности естественным образом продолжается с положительных на всю вещественную прямую.

Вычислим интеграл (7):

1) если > $2c$, то, очевидно, $T(\ )$ 1;

2) если с < $2c$, то интеграл (7) приводится к виду

$$T(\ )\quad 1\quad \frac{1}{24}\quad 2\quad \frac{}{c}\ ^4\,;$$

3) при 0 c с учетом формулы (6) получаем

$$T(\ )\quad \frac{1}{2}\quad \frac{2}{3}\,\frac{}{c}\quad \frac{1}{3}\,\frac{}{c}\ ^3\quad \frac{1}{8}\,\frac{}{c}\ ^4\,;$$

4) при $-c$ 0 получаем

$$T(\ )\quad \frac{1}{2}\quad \frac{2}{3}\,\frac{}{c}\quad \frac{1}{3}\,\frac{}{c}\ ^3\quad \frac{1}{8}\,\frac{}{c}\ ^4\,;$$

5) если $-\,2c$ $-\,c$, то

$$T(\ )\quad \frac{1}{24}\quad 2\quad \frac{}{c}\ ^4\,;$$

6) если $\quad -2c$, то, очевидно, $T(\ ) = 0$.

Функция $T(\ )$ определена на всей вещественной прямой, непрерывна, непрерывно дифференцируема и монотонно возрастает на отрезке $[-2c;\ 2c]$. Заметим, что $T(\ c)\ \ \frac{1}{24}, T(0)\ \ \frac{1}{2}, T(c)\ \ \frac{23}{24}$. Эта функция может использоваться для приближенного вычисления надежности нечеткого ранжирования экономических показателей. Здесь – расстояние между наиболее вероятными уровнями эффективности. Из выведенных формул следует, что максимальная надежность ранжирования равна 1 и достигается она при $\quad 2c$. Если $\quad 2c$, то надежность ранжирования удовлетворяет неравенству $T(\quad 1$. Минимальное значение ошибки $T(\quad$ равно 0, и достигается это значение при $\quad -2c$.

Наряду с функцией надежности можно рассмотреть функцию ошибки ранжирования $R(\quad = 1 - T(\quad$. Минимальное значение ошибки $R(\quad$ равно 0, и достигается это значение при $\quad 2c$. Если $\quad 2c$, то ошибка ранжирования удовлетворяет неравенству $R(\qquad$. Максимальное значение ошибки $R(\quad$ равно 1, и достигается это значение при $\quad -2c$. Функция $R(\quad$ определена на всей вещественной прямой, непрерывна, непрерывно дифференцируема и монотонно убывает на отрезке $[-2c;\ 2c]$.

Для использования функций $R(\quad$ и $T(\quad$ необходимо оценить параметр c. Для этого обозначим $D(x) = \{z \quad [0;\ 1]\ \ P_x(z) > 0\}$ и оценим параметр с по формуле

$$c \quad \frac{{}^{\ n}_{i\ 1}\ \ D(x_i)}{2n}, \tag{8}$$

где – мера Лебега.

Пусть теперь имеется два состояния экономической системы: x и y. Используем функцию $z^*(x)$, определенную в формуле (5), и вычисляем наиболее вероятные значения качественного показателя, соответствующие состояниям x и y. Затем используем формулу (7) и вычисляем надежность нечеткого ранжирования этих состояний $T(\ z^*(x) - z^*(y))$, т.е. вероятность того, что состояние x лучше состояния y.

По данным $z^*(x_k)$ можно построить также матрицу надежности ранжирования $T = (t_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, где $t_{ij} = T(\ z^*(x_i) - z^*(x_j))$ есть вероятность того, что x_i лучше x_j, или матрицу ошибок нечеткого ранжирования $Q = (q_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, где $q_{ij} = 1 - t_{ij}$. Элементы матрицы надежности t_{ij} принимают значения из отрезка $I = [0; 1]$, причем чем ближе значения к единице, тем выше надежность. Элементы матрицы ошибок q_{ij} принимают также значения из отрезка $I = [0; 1]$, причем чем ближе значения к единице, тем больше ошибка.

Литература

1. **Ивантер В.** Эффективность и надежность на пути к экономическому росту // Рынок ценных бумаг. – 2000. – № 8.

2. **Ивантер В., Узяков М., Ксенофонтов М., Панфилов Н.** Экономическое развитие России (прогноз на 2000–2010 гг.) // Рынок ценных бумаг. – 2000. – № 8.

3. **Zadeh L.A.** Fuzzy sets // Inf. and Control. – 1965. – No. 8.

4. **Грачева М.** Анализ проектных рисков: экономико-математический инструментарий // Рынок ценных бумаг. – 2000. – № 1.

5. **Казанцев С.В., Павлов В.Н.** Сравнение потенциала и ресурсоемкости экономик регионов России на основе нечетких методов оценки показателей. – Новосибирск: ИЭОПП СО РАН, 2002. (Препринт)

6. **Bezdek J.** Pattern recognition with fuzzy objective function. – N.Y.: Plenum Press, 1981.

СОЮЗ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ РОССИИ

20 октября 2005 г. в Москве состоялся Съезд молодых ученых России, в котором приняли участие свыше 700 делегатов от научно-исследовательских институтов и научных центров, крупнейших вузов, представляющих более 70 регионов страны. На съезде обсуждались актуальные проблемы переустройства общества и направления социально-экономических реформ, предложена программа преобразований общественных отношений и механизм их реализации, приняты обращения к Президенту Российской Федерации В.В. Путину и к молодежи России об участии научной молодежи в созидании будущего страны.

На съезде создана общероссийская общественная организация «Российский союз молодых ученых», которая призвана объединить интеллектуальную молодежь, осознающую свою гражданскую ответственность за настоящее и будущее России, готовую направить свой интеллектуальный потенциал на разработку стратегий развития страны и принять участие в их реализации.

С приветственным словом к участникам съезда обратился Председатель Совета Федерации С.М. Миронов. В числе почетных гостей съезда были известные ученые, ректоры вузов, руководители ведущих научных и производственных организаций, а также представители органов законодательной и исполнительной власти.

Пресс-служба РоСМУ (press@rosmu.ru)