ПРЕДИСЛОВИЕ

Написать предисловие к книге д-ра Рене Тома «Структурная устойчивость и морфогенез» для меня высокая честь. Я не могу сказать, что полностью понял книгу Тома. Думаю, что только немногие специалисты-топологи могли бы отследить все математические выкладки, но они почувствовали бы себя менее уверенно в биологии. Тем не менее, мне удалось в достаточной степени понять топологические идеи и логику книги, чтобы осознать, что это очень важный вклад в философию науки и, в частности, в теоретическую общую биологию.

Настоящее состояние биологии, как представляется, требует более строгой и глубокой разработки понятий и логических систем, с помощью которых мы могли бы плодотворно рассматривать важнейшие характеристики жизненных процессов на всех уровнях. Знаменателен такой факт: при том, что теоретическая физика - признанная отрасль науки со своими журналами и отделениями во многих университетах, теоретическая биология такого признания не получила. Может быть, потому что такой дисциплины не существует или она не нужна? Нередко утверждается, что живые существа это не что иное, как сложные физико-химические системы, которые не требуют развития особой общей теории, кроме той, которую можно заимствовать из физики. Сторонники этой точки зрения признают, что имеется много особых черт биологических процессов, требующих выработки подходящей специальной теории. Очевидно, что гидродинамика жидкостей тела, проницаемость мембран при передаче нервных импульсов и при работе почек, нервная система и многие другие биологические явления требуют теоретического развития в направлениях, которые ранее не были предметом изучения специалистов по неживой природе, но которые могут быть без особых усилий приспособлены физикохимиками к привычным для них способам рассуждения. Но такие теории, очевидно, относятся только к отдельным разделам биологии, а не к биологии в целом.

Можно ли пойти дальше и утверждать, что биология не требует развития какой-то общей теоретической биологии, а может обойтись разрозненными теориями биологических процессов, каждая из которых представляет собой экстраполяцию и развитие подходящей физической теории? В недалеком прошлом такая точка зрения была почти общепринятой, и специальных усилий для создания общей теории никто не предпринимал. Приблизительно до конца шестидесятых годов считалось, что наиболее фундаментальной характеристикой живого является метаболизм, находящийся в кажущемся (но только кажущемся) конфликте с термодинамикой. Считалось, что теория метаболизма это только весьма сложная химия, не требующая других добавлений к существующей теории, кроме признания того, что многие протеины могут действовать как ферменты-катализаторы. Позднее генетики заявили, что более фундаментальные жизненные процессы это наследственность и эволюция. Но блестящие открытия в молекулярной биологии позволили утверждать, что и эти явления в основном попадают в сферу химии, дополненную несколькими добавочными положениями о матричной функции нуклеиновых кислот.

Эти утверждения имеют немало веских оснований. Действительно, поскольку мы рассматриваем живые существа как объекты естественных наук, т.е. как объективно наблюдаемые феномены, и отбрасываем любые соображения, связанные с субъективностью и сознанием, постольку живые существа в некотором смысле не должны представлять «ничего, кроме физики и химии». Они состоят только из физического и химического вещества и из ничего иного. И если в какой-то момент наших физических знаний оказывется недостаточно для объяснения какого-то биологического явления, такого как, например, катализационные свойства полиаминокислот или матричные свойства полинуклеотидов, мы должны развивать наши химические и физические теории дальше. Но даже если согласиться со всеми этими утверждениями, необходимость в общей теоретической биологии все равно остается.

Это особенно очевидно в тех разделах биологии, где изучают явления, наиболее далеко отстоящие от физико-химических процессов, на которых они в конечном счете основываются. Яркий тому пример — эволюция высших организмов. Было бы крайне неуместно описывать этот процесс непосредственно в физико-химических терминах, и в действительности была создана хорошо разработанная теория популяционной и эволюционной генетики. Имеются схожие, хотя и не столь бросающиеся в глаза причины необходимости специфически биологических теорий в других разделах биологии, таких как биология развития и обмен веществ, хотя эти теории еще не сформулированы столь же четко, как эволюционная теория. Такие биологические теории можно сравнить с общими теориями частных физических явлений, такими как, например, аэродинамика, электротехника, оптика и т.п. Эти биологические теории по-прежнему не требовали бы создания общей теоретической биологии, если бы не тот факт, что у них имеются некоторые общие особенности. Именно изучение этих общих особенностей различных типов биологических теорий и должно стать основной задачей теоретической биологии.

Когда категория биологических процессов, таких как эволюция или эмбриогенез, ведут к формированию собственного специфически биологического состава теории, это происходит из-за того, что таким образом выявляются две характеристики. Это вовлекает сущности, которые характеризуются глобальной простотой и определенностью (как, например, виды животных или растениий, органы — сердце, печень и т.п., или типы клеток, например, мышечные или нервные клетки), однако если попытаться анализировать эти сущности, сводя их к базовым элементам (таким как гены или молекулы), то выявляется их невообразимая сложность. Логическая структура важных биологических понятий почти всегда характеризуется простотой (отношений между понятиями в рамках данной теоретической схемы), содержащейся в исключительной сложности (обнаруживаемой редукционистским анализом). Без этой простоты новая теория была бы беспредметной. Если бы с этой сложностью можно было справиться, было бы достаточно физико-химических теорий.

Из-за своей аналитической сложности биологические понятия в общем случае приводят к высоким размерностям. Сколько параметров нужно принять во внимание, чтобы специфицировать клетку печени, почки или развивающуюся популяцию — 10^2? 10^3? 10^4? Мы не знаем. Поэтому такие понятия могут быть корректно соотнесены друг с другом только в рамках логико-математической схемы, которая может оперировать с большим числом измерений. Одной из таких схем является статистическая механика, но более общей оказывается топология. Не хочу выглядеть нескромным, но позволю себе упомянуть, что в 1940 году в моей книге *Органайзеры и гены* (*Organisers and Genes*) я настаивал на необходимости развития топологии биологических явлений. В последующие годы, не владея математическим аппаратом даже на любительском уровне, я ничего не мог сделать для воплощения этой идеи. Тем больше я благодарен Рене Тому, который взялся за это дело с таким сильным и масштабным размахом. Том как раз попытался детально и точно показать, каким образом общие закономерности, с которыми сталкивается биология, могут рассматриваться как структуры в многомерном пространстве. Он не только показал, что такие понятия как креоды и эпигенетический ландшафт, которые раньше выражались только неопределенным языком биологии, могут быть более адекватно сформулированы в терминах векторных полей, аттракторов, катастроф и т.п. Продвигаясь гораздо дальше, он развивает в высшей степени оригинальные идеи, которые являются одновременно и математически строгими с точки зрения топологии, и приложимыми ко многим областям биологии и других наук.

Было бы неправильно пытаться создать впечатление, что книга Тома посвящена исключительно биологии. Темы, упомянутые в названии книги – структурная устойчивость и морфогенез – имеют отношение к более широкому кругу вещей. Автор соотносит свою топологическую систему мышления с физическими и, естественно, с общими философскими проблемами. Моя недосточная компетентность не позволяет мне делать какие-либо комментарии по данным аспектам книги. В биологии Том не только применяет топологический способ мышления для получения формальных определений и создания логической системы для них. Он делает также смелый шаг, проводя прямое сравнение между топологическими структурами в четырехмерном пространстве-времени и физическими структурами, обнаруживаемыми в развивающемся эмбрионе. У меня до сих пор не сложилось определенного мнения, не заходит ли Том в поисках «практических результатов» дальше, чем это допустимо делать при интерпретации абстрактных формулировок. Прав ли он в этом или нет – не очень важно для оценки принципиальной важности данной книги, которая является мощным и глубоким введением в топологическую парадигму теоретической биологии. Поскольку это направление получает теперь мощный импульс, в дальнейшем будет невоможно не замечать топологический подход, предложенный Томом.

К.Н.Уоддингтон,
профессор зоогенетики,
Эдинбургский университет.

К ЧИТАТЕЛЮ

Эта книга, написанная математиком, адресуется специалистам по дисциплинам, представители которых до недавнего времени сопротивлялись любым попыткам математизации, а именно биологам и гуманитариям. Хотя предлагаемые здесь принципиально новые математические методы требуют только элементарного формализма, они, напротив, предполагают глубокое знакомство с понятиями и сущностями дифференциальной топологии, используемыми в аппарате классической механики, такими как дифференцируемые многообразия, векторные поля и динамические системы. Я отдаю себе отчет в возникающих при этом трудностях взаимопонимания, которые усугубляются отсутствием несложного современного учебника, с помощью которого можно было бы ознакомиться с этими понятиями. Читатель-нематематик может ознакомиться с основными понятиями, прочитав предварительно математическое резюме в конце книги. При первом чтении можно опустить главы 3 и 7, которые носят более технический характер. Этого недостаточно для устранения трудностей, но пусть извинением мне будет моя безграничная вера в способности человеческого мозга!

Хотя эту работу трудно упрекнуть в отсутствии оригинальности, я уверен, что у нее есть немало предшественников, и известных мне, и неизвестных. Среди первых я намерен упомянуть классическую работу д'Арси Томпсона *О росте и форме* [D'Arcy Thompson *On Growth and Form*], которой наша книга дает некоторое математическое подтверждение. Я бы добавил сюда и книгу К.Уоддингтона C.H. Waddington, идеи которого о «креоде» и о «эпигенетическом ландшафте» имеют решающее значение для нашей теории. Из физиологов надо упомянуть Икскулля (*Теория значения*) [Uexkull, *Theorie de la signification*]и К.Гольдштейна (*Строение организма*) [K. Goldstein, *Der Aufbau des Organismus*]. В работе, претендующей чуть ли не на энциклопедический охват, нельзя загромождать текст всеми ссылками, в которых могла бы возникнуть необходимость. Поэтому я ограничиваюсь только необходимыми указаниями на точные технические факты и воздерживаюсь от ссылок, подтверждающих общие или философские истины: заранее приношу извинения авторам, которые не будут названы.

Я бесконечно благодарен многочисленным коллегам, которые мне помогали в моей деятельности: в особенности биологам, а именно Ф.Эритье [Ph. L'Heritier], Этьену Вольфу [Etienne Wolff] и К.Уоддингтону которые уделили мне много времени и беседы с которыми были особенно ценны. Я благодарю также моего коллегу по Страсбургскому университету П.Плювинажа [P Pluvinage] и его ассистента М. Гельцене [M. Goeltzene], которые помогли мне в своей лаборатории сделать фотографии каустик, представленные в данной книге.

ОГЛАВЛЕНИЕ:

ГЛАВА 1
ВВЕДЕНИЕ

«Морские волны, складки на прибрежном песке, извилистая линия песчанного берега бухты между двумя мысами, очертания холмов, форма облаков — все это составляет так много загадок формы, так много проблем морфологии...»

Д'Арси Томпсон. О росте и форме.

1.1. ПРОГРАММА

А. Наследование форм

Проблема наследования форм является одной из важнейших проблем человеческого разума. Какой бы ни была истинная природа действительности (если это выражение имеет смысл), нельзя отрицать, что наша Вселенная это не хаос. Мы различаем в ней существа, объекты, вещи, которые мы обозначаем словами. Эти существа или вещи представляют собой формы, структуры, обладающие определенной устойчивостью. Они занимают некоторую часть пространства и существуют в какой-то промежуток времени. Более того, хотя конкретное существо может узнаваться по очень разным признакам, оно легко опознается как таковое. Опознание одного и того же существа по бесконечному количеству его признаков составляет проблему (классическую философскую проблему понятия), которую, по-моему, только представители гештальт-психологии формулировали в геометрических терминах, допускающих научную интерпретацию. Предположим, что эта проблема решена в соответствии с наивной интуицией, согласно которой внешние объекты существуют независимо от нашего сознания [1]. Имеет смысл считать, что спектакль Вселенной включает непрекращающуюся череду рождений, развития и разрушения форм. Предметом всякой науки является предсказание этого развития форм, и если возможно, его объяснение.

Б. Наука и индетерминизм явлений

Если бы наследование форм осуществлялось всегда и везде по одной и той же четко определенной схеме, проблема была бы менее острой. Можно было бы раз и навсегда установить в виде, допустим, таблицы или графика, обязательный порядок наследования форм, или систем форм, возникающий в окрестности какой-то точки. Это не имело бы объяснительной силы, зато давало бы алгоритм, позволяющий предвидеть изменения. Весьма вероятно, что разум привык бы считать этот обязательный порядок наследования форм проявлением причинно-следственных отношений, усмотрел бы в нем логическую импликацию. То, что необходимо обратиться к гораздо более тонким соображениям – а именно, собственно к Науке, чтобы предвидеть эволюцию явлений, показывает, что строгий детерминизм развития форм отсутствует, и ситуация в одной и той же точке пространства может под влиянием неизвестных или незамеченных факторов породить явления самого различного вида. Забавно заметить в этой связи, что наука, в принципе отрицающая индетерминизм, оказывается его порождением, неблагодарным ребенком, единственное назначение которого – уничтожение собственного отца! Так строго количественная и детерминистская теория, каковой является классическая механика, базируется на задаче преодоления качественного индетерминизма, встречающегося при рассмотрении тела в движении (например, попадет ли этот снаряд в цель, останется ли груз в равновесии или упадет?). И наоборот, такие дисциплины как гуманитарные науки или биология слишком медленно математизировались не потому, что, как часто считается, их объект слишком сложен (все в природе сложно), а вследствие того, что качественная эмпирическая дедукция и без того была достаточной для возможности предвидения и опыта.

1.2.ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ

A. Формальные модели

Перед лицом двусмысленных и катастрофических ситуаций, когда развитие явлений представляется плохо определенным, разум пытается снять неопределенность и таким образом предвидеть будущее развитие путем использования *локальных моделей*. Начиная с этого момента понятие пространственно-временного объекта влечет за собой обращение к понятию модели (это будет обсуждаться во второй главе). С этой точки зрения можно сказать, что система форм в развитии составляет *формализуемый* процесс, если существует формальная (в логико-математическом смысле) система P, отвечающая следующим условиям: всякое состояние A определенного феноменологического процесса может быть параметризовано системой высказываний a формальной системы P; если с течением времени состояние A трансформируется в состояние B, B может быть параметризовано множеством b системы P таким, что в рамках P b формально выводится из a. Иными словами, существует взоимнооднозначное отображение всех или некоторых высказываний P на глобальное множество форм данного процесса, инверсия которого превращает временную последовательность в логическую импликацию. Такая формальная модель не обязательно является детерминистической, поскольку из множества a можно, вообще говоря, вывести большое количество различных формальных последовательностей.

Таким образом, формальная модель не полностью удовлетворительна, поскольку не всегда допускает предсказание. В некотором смысле к такому типу относятся атомистические модели. Допускается, что любая форма, любое состояние определенного процесса есть порождение объединения или пересечения элементарных форм (атомов), обладающих сходством, неделимостью и неизменностью. Любая эволюция сводится к изменениям во взаиморасположении, организации этих элементарных форм. Если мы хотим наделить эту теорию предсказательной силой, то следует создать иную теорию – вообще говоря, количественную – а именно термодинамику, которой подчиняется расположение этих частиц.

Итак, каждая модель априорно содержит две части: *кинематическую*, задачей которой является параметризация форм или состояний определенного процесса, и *динамическую*, цель которой это описание временной эволюции от формы к форме. В рассмотренном выше случае формализуемого процесса кинематика задается формальной системой P и отображением h множеств высказываний P на формы процесса. Динамика, если бы она была известна, определяла бы вероятность перехода из состояния *A*, параметризованного при помощи *a* в *P*, в состояние *B*, параметризованное при помощи *b*, где *b* – следствие из *a* в *P*. Таким образом, единственное данное формализуемой кинематики уже накладывает ограничение на динамику. Вероятность перехода из состояния *A* в состояние *C* нулевая, если *h(C)* не является следствием в *P* системы *a=h(A)*. Однако естественный процесс допускает полную формализацию лишь в исключительных случаях. Как мы увидим позднее [2], в некоторых естественных явлениях исходная симметрия исчезает. Это нарушение симметрии не позволяет надеяться на возможность полной формализации. Напротив, локальные формализации возможны, что позволяет говорить о причине и результате. Только в случае, когда система *P* действительно является системой формальной логики, можно говорить, что явления процесса действительно объяснены. В большинстве известных примеров система *P* имеет более гибкую структуру. Она располагает только отношением предпорядка, которое играет роль логической импликации. Если отказаться от естественного ограничения, что *P* содержит не более, чем счетное количество элементов (параметризованных при помощи символов, букв и т.п.), то мы попадаем в область количественных или непрерывных моделей.

Б. Непрерывные модели

Представляется, что вполне естественно было бы превратить систему *P* в топологическое пространство, считая, что если точка, представляющая состояние системы, находится вне замкнутого подмножества **K** системы *P* (вне замкнутого множества точек *катастрофы*), то феноменологический облик этого состояния не меняется при достаточно малой деформации этого состояния. Каждый тип, каждая форма процесса соответствует определенной связной составляющей *P* – *K*.[1] Если *P* – это пространство с дифференцируемой структурой (евклидово пространство $\mathbf{R}^m$ или дифференцируемое многообразие), то динамика вводится при помощи векторного поля *X* в *P*. Теоремы существования и единственности решений дифференциальной системы с дифференцируемыми коэффициентами, несомненно, дают самую совершенную модель научного детерминизма. Возможность использовать дифференциальные модели является в моих глазах окончательным оправданием количественных моделей в естественных науках. Это положение, несомненно, заслуживает какого-нибудь доказательства. Основная черта метода, описанного в данной работе, состоит в априорном допущении существования дифференциальной модели, лежащей в основе изучаемого процесса, и – при отсутствии явных знаний о модели – выводе из этого предположения заключений относительно природы особенностей этого процесса. При таком подходе исходя из гипотетического существования модели, можно получить определенные следствия локального и качественного характера. При этом исследуется количественная сторона дела, но вовсе или почти без вычислений, и получаются качественные результаты. Этот вопрос стоит рассмотреть подробнее.

1.3.ИСТОРИКО-ФИЛОСОФСКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ

А. Количественное и качественное

Термин «качественный» в науке, а особенно в физике, имеет уничижительный оттенок. Один физик напомнил мне, не без раздражения, слова Резерфорда: «Качественное соответствие теории и эксперимента – не что иное, как огрубленное количественное (Qualitative is noth-

---

[1] То есть теоретико-множественного дополнения *K* до *P* (в других обозначениях – *P/K*). Здесь и ниже мы сохраняем авторскую символику. – *Прим. ред.*

ing but poor quantitative)».

Что ж, рассмотрим следующий пример: представим, что экспериментальное изучение явления Φ дает экспериментальную кривую g, описываемую уравнением $y=g(x)$. Чтобы объяснить явление Φ, теоретик может обратиться к теориям θ_1 и θ_2. Эти теории дают соответственно кривые $y=g_1(x)$ и $y=g_2(x)$. Ни одна из них не совпадает с экспериментальной кривой g. Кривая g_1 ближе количественно, в том смысле, что в рассматриваемом интервале интеграл разности $\int|g-g_1|dx$ меньше, чем $\int|g-g_2|dx$. Но кривая $y=g_2(x)$ имеет ту же форму и даже тот же вид, что и экспериментальная кривая g. В этом случае можно с большой долей уверенности утверждать, что теоретик скорее предпочтет обратиться к теории θ_2, чем к θ_1. Несмотря на более значительную количественную погрешность, можно считать, что теория θ_2, которая дает кривую того же вида, что и экспериментальная, может сказать больше о механизме, лежащем в основе явления Φ, чем теория θ_1, количественно более точная.

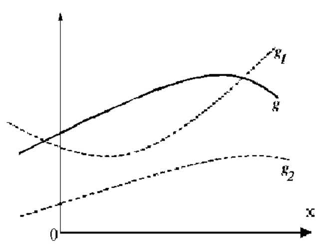

Рис. 1-1.

Понятно, что этот пример не имеет доказательной силы. Однако он иллюстрирует естественную тенденцию разума придавать форме кривой собственную значимость. Именно на эту тенденцию мы намерены обратить здесь внимание и сделать на ее основе глубокие выводы.

Б. Ошибки истории

Другая причина недоверия физиков к качественным оценкам имеет исторические корни. Это противоречие между сторонниками Декарта и Ньютона, существующее с конца семнадцатого столетия. Декарт со своими вихрями, атомами, снабженными крючками, и т.п. все объяснял и ничего не подсчитывал. Ньютон с законом всемирного тяготения ($1/r^2$) все подсчитывал и ничего не объяснял. История признала правоту Ньютона и перевела декартовы построения в разряд бесплодных рассуждений и музейных экспонатов. Несомненно, позиция Ньютона полностью оправдана с точки зрения эффективности, возможности предсказания и воздействия на явления. В том же духе с интересом перечитывается предисловие к «Принципам квантовой механики» Дирака, где автор считает несущественной проблему интуитивного осмысления понятий, лежащих в основе квантовой механики [3]. Однако я не уверен, что в мире, где все явления попадают в математически адекватные схемы, но которые при этом лишены образного содержания, человеческий разум будет полностью удовлетворен. Не окажется ли это сплошным шаманством? Лишенный возможности осмыслить, то есть геометрически интерпретировать заданную схему, человек будет или несмотря ни на что создавать образы, которые бы интуитивно оправдывали данную схемы, или же впадет в непонимание, которое в силу привычки превратится в безразличие. В том, что касается гравитации, несомненно, преобладает второе. И сейчас, в 1968 году, у нас не меньше причин удивляться падению ньютонова яблока, чем их было у Ньютона. Шаманство или геометрия – такова дилемма, перед которой стоит всякая попытка научного объяснения [4]. С этой точки зрения, умы, стремящиеся к пониманию, никогда не будут испытывать к качественным и описательным теориям, от досократиков до Декарта, неприязни, свойственной сторонникам чисто количественного подхода.

Однако то, что обесценивает в глазах современников старые качественные модели, это, конечно, не невозможность получить с их помощью количественный результат.

В повседневной деятельности нас почти всегда интересует именно качественный результат, а не определенное число с точностью до десятых или сотых. Когда мы едем на машине из города *A* в город *B*, расположенный на расстоянии двухсот километров, нас не волнует точное вычисление нашей траектории. Для нас важен качественный результат – прибыть в пункт *B* не позднее некоторого (приемлемого для нас) времени и не повредить машину в пути. А этот результат, предполагающий большое количество промежуточных элементарных действий, часть которых имеет достаточно узкий порог точности, может быть получен практически с единственным количественным действием – грубой оценкой количества топлива в бензобаке к началу поездки. Что обесценивает в наших глазах старинные умозрительные теории, это в основном не сам по себе их качественный характер, а безнадежно наивный и неточный характер используемых образов. Действительно, предлагаемые схемы (за исключением грандиозных глубочайших, хотя и туманных, видений первых досократиков Анаксимандра и Гераклита) основаны на интуиции твердого тела в евклидовом трехмерном пространстве. А эта интуиция, которая, видимо, вошла в генетический код нашего вида при работе с первыми инструментами и при их создании при всей своей кажущейся естественности, очень часто недостаточна, чтобы дать удовлетворительное объяснение даже большинству макроскопических явлений.

B. Расширение нашей интуиции

Может возникнуть вопрос: нельзя ли при помощи усовершенствования нашей геометрической интуиции придать научный смысл массе неясных образов и схем, которые обеспечили бы отдельным явлениям удовлетворительное качественное истолкование. На самом деле, необходимо убедиться в следующем: в результате недавних достижений в топологии и математическом анализе стали возможены строгие качественные построения. Мы знаем как (в принципе) дать определение *форме* и можем установить, имеют ли какие-либо две функции один и тот же топологический тип, одну и ту же форму. Мы постараемся в рамках заявленной здесь программы освободить нашу интуицию от рамок, задаваемых манипулированием твердыми телами в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$, в пользу динамических схем более общего характера. Эти схемы в действительности не зависят от конфигурационных пространств, в которых они рассматриваются. В частности, размерности пространств и число степеней свободы локальных систем могут быть совершенно произвольными (на самом деле универсальная модель такой схемы предполагает пространство бесконечной размерности). Это, очевидным образом, необходимое условие. Очевидно, что чем дальше продвигаешься к бесконечно малому, тем больше возрастает число степеней свободы системы, так что любое качественное представление микроявлений может потребовать использования функциональных пространств бесконечной размерности.

Одна из важнейших выгод даваемых описываемым здесь методом локальных моделей заключается в том, что он не предопределяет ничего окончательно в истинной природе действительности. Даже если действительность обнаружит сложность, исключающую любое описание, в окончательное макроскопическое описание войдут только некоторые аспекты локальных моделей, отвечающие «наблюдаемым» параметрам системы. Именно посредством величин, связанных с наблюдаемыми, будет построено фазовое пространство нашей динамической модели, безотносительно к лежащим в основании более или менее хаотическим структурам. Для любой отдельной системы явлений, относительно независимых от окружающей ее среды, делается попытка построить локальную модель, которая дает качественное, а в наиболее благоприятном случае и количественное отражение феноменологии системы. Но нельзя надеяться априорно интегрировать все локальные модели в глобальную структуру. Если бы было возможно охватить все локальные схемы грандиозным всеобщим синтезом, человек имел бы основание говорить, что он познал *истинную природу действительности*, поскольку лучшей модели не существует. Я лично полагаю, что это необоснованное притязание. С большой долей вероятности можно утверждать, что эра космических обобщений завершилась с разработкой общей теории относительности, и очень сомнительно (и, несомненно, мало продуктивно) стремиться ее возобновить.

1.4. КОНСТРУИРОВАНИЕ МОДЕЛИ

А. Множество катастрофы

Чтобы параметризовать локальные состояния системы, предлагается общая модель следующего вида: в дифференцируемом многообразии M имеется замкнутое подмножество K, называемое *множеством катастрофы*; если точка m, представляющая состояние системы, не пересекается с K, локальный феноменологический тип системы не меняется. Основная предлагаемая здесь идея заключается в том, что локальная природа подмножества K, топологический тип особенностей и т.п. определяются стоящей за ними динамикой, которую в общем случае невозможно эксплицировать. Эволюция системы будет определяться векторным полем X в M, задающим макродинамику. Там, где точка m пересекается с замкнутым множестовм K, в поведении системы происходит скачок, что интерпретируется как изменение предшествующей формы, то есть морфогенез. Из-за отмеченных ниже ограничений на локальную природу особенностей множества K в какой-то степени можно классифицировать и предвидеть особенности морфогенеза системы, даже не зная ни стоящей за ней динамики , ни динамики макроскопической эволюции, задаваемой полем X. На самом деле, в большинстве случаев действуют в противоположном направлении. *На основании макроскопического исследования морфогенеза процесса, локального или глобального изучения его особенностей пытаются восстановить динамику, которая их порождает.* Создание глобальной количественной модели M,K,X остается, очевидно, идеалом, к которому надо стремиться. Но эта задача может оказаться сложной, или даже не имеющей решения. Тем не менее локальная динамическая интерпретация особенностей морфогенеза остается возможной и полезной. В любом случае это необходимые предварительные действия для построения кинематики модели и, даже если описание динамики и глобальной эволюции невозможно, локальное понимание процесса будет значительно усовершенствовано.

Предложенная здесь программа выдвигает на самый первый план внимание к особенностям морфогенеза процессов, к скачкам в облике явлений. В четвертой главе будет дана очень общая классификация таких изменений формы, которые мы будем называть *катастрофами*.

Б. Независимость от субстрата

То, что таким образом можно создать абстрактную геометрическую теорию морфогенеза, *не зависящую от субстрата форм и природы сил, которые их создают*, представляется многим невозможным, особенно экспериментаторам, привыкшим резать по живому и находящимся в непрерывной борьбе с действительностью, которая им сопротивляется. Однако эта идея не нова, она сформулирована почти в явном виде в классическом трактате д'Арси Томпсона *О росте и форме*. Но идеи этого великого провидца слишком опережали время, чтобы оказаться принятыми. Они были часто выражены в очень наивной с геометрической точки зрения форме, им не хватало математических доказательств, которые стали возможны благодаря недавним достижениям в дифференциальной топологии и анализе. С достаточно общей точки зрения просматривается одно возражение. Если, в соответствие с нашим основным постулатом, устойчивые особенности любого морфогенеза определяются единственным измерением окружающего пространства, то почему все явления нашего трехмерного мира не обладают одинаковой морфологией? Почему форма облаков отличается от формы гор, а форма кристаллов не такая, как у живых существ? На это я отвечу, что наша модель имеет целью классифицировать только *локальные случаи* морфогенеза, которые мы называем *элементарными катастрофами*. Но общий макроскопический облик, форма в обычном смысле слова, происходит из совокупности огромного количества локальных случаев. И статистика локальных катастроф, корреляции, которые определяют их появление по ходу заданного процесса, определяются внутренней топологической структурой и динамикой. Интеграция всех этих случаев в единую глобальную структуру требует, если приложить нашу модель, рассмотрения катастроф в пространстве гораздо большей размерности, чем наше трехмерное. И именно благодаря топологическому богатству внутренних динамик, их более или менее цельному характеру в конце концов можно будет объяснить почти бесконечное многообразие внешнего мира и, может быть, фундаментальное различие между живым и неживым.

В. Формы живого и неживого

В этой связи нужно рассмотреть эту неправильно понимаемую ситуацию в целом. Тогда как форма живых существ в течение веков притягивала внимание биологов, морфология в неживой природе только случайно вызывала интерес физико-химиков. В этой связи можно вспомнить несколько дисциплин, эмпирическая польза которых очевидна. Это форма облаков в метеорологии, формы земного рельефа в структурной геологии и геоморфологии. Эти науки располагают корпусом точных наблюдений и локальными динамическими объяснениями, нередко вполне удовлетворительными. Но там не делалось практически никаких попыток глобального обобщения, которое поднялось бы над чисто словесными описаниями. Можно упомянуть также астрономию, изучающую морфологию звездных объектов (и в особенности спиралевидные туманности, которые мы рассмотрим в главе 6). Теория структуры кристаллических решеток, развивающаяся благодаря практическим потребностям металлургии, также хорошо разработана. Но центральная проблема, изучение геометрического распределения вещества между двумя фазами никогда не становилась предметом систематических исследований, и не имеется ни одной модели для объяснения, к примеру, древовидного роста кристаллов. Причина такого отношения физикохимиков вполне понятна [5]. Речь идет об очень неустойчивых, сложно воспроизводимых явлениях, априори сопротивляющихся любой математизации. *На самом деле, характер любой формы, любого морфогенеза — это дискретное выражение свойств среды.* А ничто так не ставит математика в затруднение, как дискретность, поскольку любая количественная модель, пригодная к применению, основывается на использовании непрерывных аналитических функций. Так явление обрушения волны (deferlement) в гидродинамике понято еще очень плохо. Однако оно играет большую роль в морфогенезе в трехмерном пространстве. С редким предвидением д'Арси Томпсон сравнивал форму медузы с фигурой, образуемой при диффузии в воде чернильной капли [6]. Не исключено, что изучение более медленного и лучше контролируемого морфогенеза в биологии поможет в понимании некоторых быстрых и трудноуловимых явлений морфогенеза в неживой природе.

Г. Заключение

Выбор явлений, считающихся интересными для науки, несомненно, в огромной степени произволен. Современные физики создают громадные устройства, чтобы зафиксровать состояния продолжительностью не более 10^{-23} секунды. Конечно, нет ничего предосудительного в стремлении ученых создавать всевозможные технические средства для изучения всех явлений, доступных для восприятия. Но закономерен вопрос: большое количество знакомых (в том смысле, что они больше не привлекают внимания!) явлений плохо описываются теорией, к примеру, трещины на старой стене, форма облаков, листопад, пена на кружке пива... Кто знает, может, усердные математические размышления над мелкими явлениями оказались бы в конечном счете более полезными для науки.

Читатель почувствует определенно досократический дух предлагаемой здесь качественной динамики. Эпиграфы из афоризмов Гераклита стоят перед несколькими главами потому, что ничто не подходит лучше к размышлениям такого рода. Действительно, основные интуитивные положения морфогенеза можно найти уже у Гераклита. Моя единственная задача была поместить их в геометрические и динамические рамки, допускающие количественный анализ. «Глас веский, беспристрастный», подобный гласу Сивиллы, который звучит не ослабевая уже тысячелетия, заслужил это отдаленное эхо.

ДОПОЛНЕНИЕ

О понятии объекта.Обозначим через U пространство всех возможных положений моего тела во внешнем мире. В каждом положении $u \in U$ множество поля ощущений, создаваемого моими органами чувств, в принципе разложимо на дискретные сущности, или *формы*, каждая из которых сохраняется при небольшом перемещении точки u. Таким образом, каждой точке u из U ставится в соответствие дискретное множество форм F_u и объединение множеств F_u может быть снабжено топологией, котрая превращает пространство $\cup_u F_u$ в пространство U^*, построенное *над U*. Если V открыто в U, то можно рассмотреть множество $G(V)$ сечений отображения $V^* \Rightarrow V$, порождаемого отображением $U^* \Rightarrow U$, и если $V \subset V'$, то имеется каноническое ограниченное отображение $G(V') \Rightarrow G(V)$. *Объектом*, по определению, называется любое максимальное сечение U^*U по оператору продолжения $G(V') \Rightarrow G(V)$. Таким образом, каждому объекту c поставлена в соответствие его область существования $J(c) \subset U$. Эта область обязательно связная. Например, если форма A – лист бумаги и если я его сминаю, то есть придаю ему вид B, A может быть непрерывно деформирован в B и наоборот B в A, если листок разгладить. A и B – два вида одного объекта. Но если я разрываю листок, т.е. придаю ему вид C, я получаю новый объект, поскольку переход $A \Rightarrow C$ необратим.

Другой постулат, задающий то, что обычно понимается под объектом, следующий: *каждый объект (с) характеризуется своей областью существования J(c)*. Или иначе говоря, если два объекта имеют одну и ту же область существования, они идентичны. Из этого следует, что если описывается петля k в пространстве U и если ее продолжить последовательностью сечений $U^* \Rightarrow U$ вдоль k, эти сечения никогда не меняются местами. Этот постулат не согласуется с квантовым принципом неопределенности. Действительно, в этом случае в пространстве U условий наблюдения поля с k частицами в камере имеется замкнутое подпространство K, соответствующее состояниям, когда по крайней мере две частицы столкнулись. Множество $U-K$ связное, и если u и v – две различные точки из $U-K$, соответствующие состояниям частиц $(a_1,\dots a_k)$ и $(b_1,\dots b_k)$, то любой путь q, связывающий u с v, позволяет отождествить множество$(a_1,\dots a_k)$ с множеством $(b_1,\dots b_k)$. Но эта идентификация в общем зависит от класса гомотопии пути q, прослеживаемого в $U-K$.

Равным образом можно предположить, что два объекта *A, B* функционально связаны в том смысле, что любое преобразование $A \Rightarrow A'$ в U продолжается в преобразование $B \Rightarrow B'$, но тем не менее может существовать преобразование $B \Rightarrow B''$, которое не затрагивает A. Тогда говорят, что B это *отражение A*. Эту аномалию можно избежать в случае твердых тел внешнего мира только благодаря тому, что материя взаимно непроницаема, что позволяет манипулировать отдельно каждым объектом. Однако кажется вероятным, что свойства связности, обратимости и «неразложимости», которые задают пространство обликов одного и того же объекта, происходят не от физических свойств внешнего мира, а от ограничений нашей физической динамики (которая, как мы увидим в главе 13, запрещает нам думать более чем об одной вещи сразу).

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Самый убежденный соллипсист если он продолжает жить и действовать, обязательно должен подчиниться внешнему ходу вещей, допустить их структурную инвариантность, чтобы их использовать.Что это, как не признание тем самым их определенной реальности?

[2] Мы намекаем здесь на *обобщенные катастрофы*, описанные в главе 6 и отвечающие за нарушение симметрии.

[3] «главная цель физики это не получение картин, но формулировка законов, управляющих явлениями, и использование этих законов для открытия новых явлений. Если есть картина, тем лучше. Но есть картина или нет – это вопрос десятый» П.Дирак, *Принципы квантовой механики*. (P.A.M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, Oxford 1961, p.10.)

[4] Как будет показано в главе 13, классическая евклидова геометрия может рассматриваться как магия. Ценой минимальных деформаций облика (точка без протяженности, прямая без толщины...), чисто формальный язык геометрии адекватно описывает пространственную реальность. В этом смысле можно сказать, что *геометрия – это успешная магия*. Я бы хотел сказать обратное: не является ли любая успешная магия геометрией?

[5] Отсутствие интереса ученых к морфогенезу неживого, возможно, берет свое начало тоже в биологии. Действительно, весь наш аппарат восприятия генетически настроен на обнаружение живых существ – жертв или врагов и в этом смысле играет большую роль в нашем выживании и поддержании физиологического равновесия. Напротив, неживые объекты привлекают только рассеянное беглое внимание и только в той мере, в какой их форма напоминает живое существо.

[6] D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*, Cambridge Press, Oxford, 1961, p. 72-73.

ГЛАВА 2

ФОРМЫ И СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Для нас греков все вещи – формы
Поль Валери, Эвпалион.

2.1. ИЗУЧЕНИЕ ФОРМ

А. Форма в обычном смысле

Что такое форма? Если попытаться дать определение, покрывающее все, что обычно понимают под этим словом, задача будет непростой. С математической точки зрения сразу же напрашивается следующее определение: два топологических пространства X и Y имеют одинаковую форму, если они *гомеоморфны* (т.е. если существует отображение $f: X \Rightarrow Y$, которое является взаимнооднозначным и в обе стороны непрерывным). Если ограничиться определением формы объектов в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$, то понятие гомеоморфизма будет, очевидно, слишком гибким, чтобы соответствовать тому, что обычно понимается под формой объекта. Обратим внимание сначала на тот факт, что то, что обычно называется пространственным объектом, является, с топологической точки зрения, закрытым подмножеством пространства (и даже компактом, поскольку кроме крайне редких случаев объекты не простираются до бесконечности). Поэтому можно предложить новое определение: два объекта A и A' пространства имеют общую форму, если существует движение D пространства $\mathbf{R}^3$ такое, что $A'=D(A)$ (D преобразует объект A в объект A'). В этом случае определение будет слишком узким. Кроме того, с точки зрения гештальт-психологии неочевидно, что квадрат с вертикальными и горизонтальными сторонами и такой же квадрат, наклоненный под углом 45°, представляют одну и ту же фигуру (см. рис. 2-1).

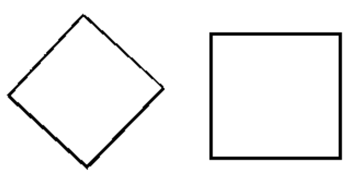

Рис. 2-1.

Итак, группа движений не подходит. Ее следует заменить псевдогруппой локальных гомеоморфизмов, которые оставляют форму инвариантной. Формально определить такую псевдогруппу нелегко. Априори, эта псевдогруппа должна сохранять инвариантность горизонтальных и вертикальных направлений, содержать движения, а также окрестность единицы группы афинных преобразований $x'=kx$, $y'=k'y$ плоскости xOy [1]. Существует ли на самом деле такая единственнная псевдогруппа G, подходящая для всех форм сразу? Вероятно, нет. Можно предположить, что каждая произвольно определенная форма F допускает такую собственную псевдогруппу G_F. Очевидно, что определенные формы имеют для нас практическую ценность или являются биологически важными. Таковы формы продуктов питания, животных, инструментов. Эти формы глубоко врезаны, впечатаны в восприятие на генетическом уровне вида, и их инвариантная псевдогруппа G_F для них узко специально приспособлена. Дать точное определение этой псевдогруппы G_F в общем случае сложно или даже невозможно. Например, определение пространственной формы животного – это то, что в биологии называют фенотипом этого животного. А как будет показано в главе 8, нет ничего более сложного, чем точно определить фенотип. Следует подойти к проблеме классификации пространственных форм с другой точки зрения, близкой к «гештальтистской».

Б. Пространство форм

Рассмотрим пространство Y всех компактов пространства $\mathbf{R}^3$, снабженное хаусдорфовой топологией. Это пространство, по крайней мере, в своей наиболее значительной части, разделено на бассейны (области притяжения) аттракторов, где каждый аттрактор соответствует биологически важной форме. Это подразделение на бассейны, естественно, не является раз и навсегда данным для данного субъекта, оно может изменяться с изменением психического состояния субъекта, его осознанных и неосознанных потребностей и т.п. Как известно, на этой изменчивости построены тесты Роршаха. Хотя эта интерпретация восприятия форм имеет все шансы оказаться правильной, она не очень успешно продвигает нас в создании математической модели. Мы возвращаемся к более абстрактной ситуации при помощи следующего определения: если E – топологическое пространство, а G – группа (или псевдогруппа) заданная на E, то *G-форма* – это по определению класс эквивалентности замкнутых множеств E, определяемый действием G. Если, к примеру, E это дифференцируемое многообразие, а G – группа Ли, которая дифференцируема в E, то вообще говоря, существует непрерывная бесконечность* классов эквивалентности G-форм. Каждая G-форма будет параметризована системой действительных параметров. Но если G это группа (или псевдогруппа) бесконечной размерности, то может случиться, что будет получено только конечное (или самое большее счетное) множество форм, обладающих свойством *структурной устойчивости*.

В. Структурная устойчивость

Будем называть G-форму *A структурно устойчивой*, если любая форма B, достаточно близкая к A в E, является G-эквивалентной A. Иными словами, чтобы класс G-эквивалентности F определял структурно устойчивую форму, необходимо и достаточно, чтобы совокупность точек E этого класса эквивалентностей образовывала открытое множество в пространстве E. Понятие структурной устойчивости, с моей точки зрения, является ключевым в интерпретации явлений, к каким бы научным понятиям они не относились (кроме, может быть, квантовой физики) и в свое время будет объяснено, почему. Пока же заметим только, что субъективно отождествляемые формы, формы, представленные в языках именами существительными, *обязательно являются структурно устойчивыми*. Действительно, естественно существующий объект всегда подвержен деформирующим влияниям со стороны внешней среды, которые, пусть очень слабые, всегда как-то воздействуют на форму объекта. Для сохранения постоянства формы эти изменения не должны выходить за рамки класса G-эквивалентности. В таком случае в пространстве будет существовать открытое множество, образованное точками, представляющими структурно устойчивые формы. Дополнение этого множества содержит только неустойчивые формы, изменяющиеся при малейшем воздействии; такие формы не заслуживают такого названия, они, собственно, являются *бесформенными*.

Г. Бесформенные формы

На самом деле, можно выделить два основных типа неустойчивых форм, которые можно связать непрерывной цепью промежуточных случаев. Некоторые формы являются *бесформен-*

---

* То есть бесконечность мощности континуума. – *Прим. ред.*

ными, поскольку они имеют очень сложную хаотическую внутреннюю структуру, так что в них невозможно выделить определенные элементы. Другие, напротив, составлены из небольшого числа идентифицируемых элементов, однако их объединение представляется противоречивым или очень необычным (типичными примерами являются химеры и другие чудовища). Эти неустойчивые формы в определенном выше пространстве *Y* представляют формы *бифуркации*. Точка, представляющая соответствующее состояние системы, расположена на разделе между двумя или несколькими бассейнами аттракторов. При виде этих форм восприятие колеблется между соседними аттракторами, будучи не в состоянии сделать выбор. В результате наблюдатель испытывает неудобство или страх. Художники-сюрреалисты прекрасно знают этот эффект, который они сполна использовали. Напротив, неустойчивые формы первого типа представлены в *Y* точками, прилегающими к бесконечному числу различных бассейнов (в статической модели, определенной в главе 4, эти формы находятся в стратах[1] множества бифуркации бесконечной коразмерности). *См. фото 1.*

Д. Геометрические формы

К этому списку добавим такие геометрические формы, как прямая, квадрат, треугольник и т.п. Группа эквивалентности этих форм является теоретически группой Ли конечной размерности и в хаусдорфовом пространстве пространственных форм они образуют страты бесконечной коразмерности. Но с «гештальтистской» точки зрения не вызывает сомнения что эти формы на самом деле открыты, поскольку они допускают незначительные деформации, не переставая быть опознаваемыми. Несомненно, в зарождении геометрической мысли человека следует видеть крайний случай *стабилизации порогов*, описанной в главах 5 и 9.

2.2. СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И НАУЧНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ

А. Условия научного опыта

Вернемся к фундаментальному понятию структурной устойчивости. Вселенная, как мы сказали, не хаос; мы наблюдаем в ней рекурренцию типичных форм, которым мы даем имена. Кроме того следует осмыслить сами условия научного наблюдения. Ученый не может наблюдать все Вселенную целиком. Он вынужден выделить для наблюдения и эксперимента некоторую подсистему, внутренняя эволюция которой не зависила бы от остальной части Вселенной. Практически ученый изолирует подсистему *S* в камере *B*, уточняя ее геометрические характеристики и природу используемых инструментов регистрации. Далее следует подготовить определенное состояние *a* системы *S*. Это определяется процедурой подготовки, т.е.способом наполнения камеры *B*, описываемого с максимально возможной точностью. Когда состояние системы *a* достигнуто, наблюдатель наблюдает или подвергает эксперименту содержимое камеры *B* в определенные промежутки времени после подготовки *a*. Надежда экспериментатора (без которой, надо сказать, его работа была бы напрасной) заключается в том, что если другой ученый предпримет тот же опыт в другое время и в другом месте в камере *B'*, соотносимой с *B* посредством элемента галилеевой группы *g* , используя ту же процедуру подготовки *a*, то он будет наблюдать в *B'* хотя бы приблизительно те же явления, что и в *B*. Однако какие бы предосторожности ни были предприняты для изоляции системы *S*, нельзя надеяться полностью исключить взаимодействие S с внешним миром. Более того, *процедура подготовки может быть описана и реализована только приблизительно.* Начальные условия двух экспериментов

[*] Опонятии стратификации см 3.1Г. — *Прим. ред.*

никогда не будут в точности совпадать, и это начальное расхождение обязательно повлияет на развитие системы. Таким образом, можно надеяться получить приблизительно одинаковые (благодаря движению *g*) результаты, только предполагая, что эволюция системы *S* начиная с состояния *a* по крайней мере на качественном уровне устойчива по отношению к воздействию на начальные условия и внешнюю среду. Таким образом, *гипотеза о структурной устойчивости изолированных научных процессов является скрытым постулатом любого научного наблюдения.*

Остается уточнить, что подразумевается, когда утверждается, что явления в камерах *B* и *B'* приблизительно «те же». Предположим, что в некоторый момент времени наблюдатель может описать локальное состояние системы в любой точке (x,t) произведения *B* на ось времени *T* (скажем, при помощи локальных зондов). Тогда приблизительное постоянство качественных результатов в *B* и *B'* может быть выражено следующим образом: существует ε–гомеоморфизм произведения $B\ \ T$: $h(x,t) \Rightarrow (x,t)$ такой, что произведение преобразований $g^{\circ}h$ отображает процесс в *B* на процесс в *B'*. С этой точки зрения локальное состояние процесса можно также определить как *росток* структурно устойчивой эволюции данного процесса.

Б. Квантовое возражение

Это рассуждение, выдержанное в классическом и доквантовом духе, будет с порога отвергнуто представителем квантовой физики, который не преминет возразить, что:

1. любой опыт, любое измерение нарушает течение процесса, причем иногда необратимо;
2. не существует какой-либо локальной устойчивости в масштабе отдельных процессов, а существует только статистическая устойчивость для большого числа случаев.

Я думаю, что те же трудности возникают в многочисленных процессах, которые считаются классическими. Например, в биологии наблюдатель нередко должен убить изучаемое животное, чтобы вскрыть его. В этом нет помехи для описания процесса, потому что можно возобновить эксперимент с другим животным и продвинуться дальше, вмешавшись позже. Равным образом возникает и трудность второго типа: никогда нет уверенности, что два животных действительно имеют сходную наследственность (генотип) и эта неизвестная разница может нарушить устойчивость воспроизводимого процесса. Лично я считаю, что трудности, с которыми столкнулся бы физик, пытаясь привести два электрона строго в одно и то же состояние, имеет ту же природу, что и трудности биолога, стремящегося получить двух уток с одинаковыми наследственными свойствами. В квантовой механике любая система в момент *t* несет следы (иногда неустранимые) всех взаимодействий, через которые ранее прошла система, и особенно тех, которые привели к ее возникновению, и эти эффекты, вообще говоря, невозможно ни выявить, ни оценить. В заключение отметим, что предложенную здесь схему, как и все рассматриваемые модели, нужно понимать как некую идеализацию, несомненно применимую к многочисленным макропроцессам. Я не удивлюсь, если она окажется пригодной и для описания квантовых явлений, но несомненно, принцип неопределенности заставляет отказаться от традиционных пространственных координат при определении основного пространства.

В. Изоморфные процессы

Остается точно определить, что мы называем *изоморфными процессами*, т.е. процессами, преобразуемыми один в другой при помощи некоторого гомеоморфизма камеры *B* (или произведения B на T). Для начала заметим, что состояние a системы S в принципе не изолировано во множестве состояний системы. На самом деле любая процедура подготовки обязательно включает в себя задание реальных параметров c_i в конечном или бесконечном количестве. Например, единственная метрическая форма камеры B может требовать для своего описания бесконечного числа параметров, то есть функционального пространства. Несомненно, некоторые из этих параметров могут оказаться избыточными, не оказывая заметного влияния на развитие процесса. В этом случае этими параметрами можно пренебречь, то есть, с геометрической точки зрения, к перейти к фактор-пространству. В конечном счете состояния системы S распределяются в топологическом пространстве, в котором связные составляющие оказываются дифференцируемыми многообразиями конечной или бесконечной размерности. В последнем случае можно попытаться интерпретировать эти многообразия как функциональные пространства. В современной квантовой механике эти многообразия – пространства L^2 (пространства функций, квадрат которых интегрируем), имеющие гильбертову структуру. В более общем виде можно снабдить эти функциональные пространства топологией C^m, поскольку речь идет о дифференцируемых непрерывно m-кратно дифференцируемых отображениях. Если исходное многообразие компактно, то такое многообразие имеет локально линейную структуру *банахова пространства*.

Топологию пространства состояний можно также определить посредством меры. Допустим, что с помощью зондов, вводимых в камеру B, наблюдатель может измерять какие-то характерные величины локального процесса. Он получит функцию $g(x_i, t)$, характеризующаю состояние a, и даже если процедура измерения необратимо нарушит нормальное развитие процесса, это не вызовет помех, поскольку состояние a при t=0 неограниченно воспроизводимо. Вообще говоря, функции $g(x, t)$, которые могут быть получены этим путем, не являются независимыми и могут быть вычислены, с помощью некоторого конечного числа таких функций. Таким образом можно параметризовать соседние с a состояния точками функционального пространства (или конечного произведения функциональных пространств).

Г. Природа эмпирических функций

Здесь ставится предварительный вопрос, по поводу которого даже сейчас физики расходятся во мнении. Измеримые функции $g(x, t)$ определяются только конечной сетью точек, поскольку в B можно ввести только конечное число зондов и сделать конечное число замеров (человеческая жизнь конечна, а каждое измерение занимает конечно время). Какие гипотезы можно строить о математической природе этих функций, известных только по конечному множеству своих точек? Являются ли эти функции аналитическими (включая многочлены) или, напротив, только дифференцируемыми? Я считаю, что ответ очень прост: все зависит от того, что вы хотите сделать. Если вы хотите построить точную количественную модель, нужно делать многочисленные подсчеты и проверки. Только аналитические фукнции (на самом деле, только многочлены низкой степени!) вычислимы. В этом случае функции $g(x, t)$ будут аналитическими, задаваемыми в основном формулами в явном виде. Если же вы хотите исследовать процесс только с точки зрения структурной устойчивости, то напротив, более естественно предположить функции $g(x, t)$ только m раз непрерывно дифференцируемыми (где m мало – на практике 2 или 3). Тогда локальное или глобальное состояние нашей системы будет параметризоваться точкой функционального пространства, банахового многообразия, и ситуация будет аналогична ситуации, возникающей при процедуре подготовки. Однако мы более специальным образом интересуемся морфогенетическими процессами, которые характеризуются возникновением и эволюцией фигурных структур (форм) в камере B. Эти структуры характеризуются заданием в $B \ T$ замкнутого множества K, такого, что в каждой точке K процесс меняет вид. Такое замкнутое множество *K* называется *множеством катастрофических точек* процесса. Естественно постулировать, что точка (x,t) из *B T* катастрофическая, если по крайней мере одна из функций *g(x, t)* (или одна из ее первых или вторых производных) имеет в этой точке разрыв. Предполагается, что *K* не является локально плотным. Если оно оказывается таковым в окрестности точки (x_0,t_0) , то мы будем иметь основние считать процесс в окрестности этой точки изначально хаотическим и турбулентным, и понятие структурной устойчивости потеряет большую часть своей привлекательности. Таким образом, для двух реализаций одного и того же состояния *a* в камерах *B* и *B'*, различающихся в пространстве и времени, катастрофические замкнутые множества *K* и *K'* соотносятся при помощи ∈-гомеоморфизма произведения *B T*. В частности, в обеих камерах они имеют один и тот же топологический тип, одну и ту же форму.

Д. Регулярные точки процесса

На открытом множестве *B T-K*, дополнительном к катастрофическим точкам, процесс называется *регулярным*. В окрестности любой регулярной точки из *B T* функции *g(x,t)* непрерывно дифференцируемы. Если локальное состояние представлено точкой функционального пространства *L(X,Y)*, то локальная эволюция будет определяться отображением $F{:}B\ T\ X \Rightarrow Y$. Таким образом предполагается, что в любой точке *(x,t)* имеется отображение s(x,t):*XY* определяемое при помощи $F(x,t,m)=y$, $m\in X$, $y\in Y$. Предполагается, что локальная эволюция процесса определяется дифференциальным оператором вида

$$\frac{ds(x,t)}{dt} = A(s,x,t) \qquad (2\text{-}1)$$

таким, что локальная задача, задаваемая этим уравнением в частных производных, как говорят специалисты по математическому анализу, *корректно поставлена*. Тогда решения задачи Коши будут локально единственными и зависящими непрерывно от исходных данных. На изоморфизм, связывающий две реализации одного и того же структурно устойчивого процесса, различающиеся в пространстве и времени (который определяется преобразованием вида

$$B\ T \overset{g^{\circ}h}{\Rightarrow} B'\ T$$

где *g* – движение, а *h* – гомеоморфизм), надо наложить следующее ограничение: *h* является локальным диффеоморфизмом в каждой регулярной точке *B T*. Если теперь *(x',t')* – результат отображения $g^{\circ}t$ регулярной точки *(x,t)* из *B T*, то *(x',t')* – регулярная точка *B' T*, и в окрестности этой точки процесс определяется тем же функциональным пространством *L (X,Y)* , что и в точке *(x,t)* , а закон локальной эволюции определяется дифференциальным уравнением вида

$$\frac{ds'(x',t,m)}{dt} = B(s',x',t)$$

Очевидно, что этот дифференциальный оператор возникает в результате преобразования оператора (2-1) при помощи диффеоморфизма $g^{\circ}h$ над переменными (*x,t*), продолженного до диффеоморфизма вида

$$(x,t,m,y) \Rightarrow (x',t',m,y)$$

действующего также на *внутренние* переменные ($m\in X$) и ($y\in Y$).

2.3. СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И МОДЕЛИ

В предыдущей главе мы определили два типа моделей: *формальные* и *непрерывные*. Формальные модели, к которым относится и кинематика, являющаяся формальной системой, имеют следующие преимущества: их описания как аксиоматического, так и комбинаторного характера довольно легки, дедукция в них формализована и теоретически механизируема. Поскольку дедукция – неопределенная операция, формальная модель совместима с некоторой неопределенностью явлений. Но у формальных моделей есть и неудобства: некоторые вопросы могут оказаться *неразрешимыми* в пределах системы (например, вопрос о том, является ли высказывание *b* следствием множества высказываний *a*). Наконец, в формальных моделях *невозможна никакая динамика*.

В отличие от формальных моделей непрерывные модели допускают динамику. Использование дифференциальных систем придает модели строгий детерминизм. Это не исключает возможности описания качественно недетерминированных явлений с помощью структурно неустойчивых дифференциальных систем. Но и у непрерывных моделей есть свои неудобства: они в целом неудобны для описания. Чтобы получить дифференциальные уравнения в явном виде, приходится ограничиваться только небольшим числом геометрических и алгебраических сущностей, допускающих простое описание. Поэтому в общем случае возникает конфликт с требованием структурной устойчивости, выдвигаемым априори, поскольку речь идет об описании эмпирически устойчивого процесса. Если выдвигается это строгое требование, приходится рассматривать не единственную динамическую систему, а целое открытое множество топологически эквивалентных динамик. Таким образом в модель снова вносится дискретный элемент, который придаст ей сходство с формальной системой.

Может возникнуть соблазн признать превосходство формальных систем, но такой вывод был бы слишком поспешен. Если верно, как говорит Поль Валери, что «нет геометрии без языка», то не менее справедливо – как предвидели некоторые логики [2] – что нет осмысленного языка без геометрии, без глубинной динамики, при помощи которой язык формализует структурно устойчивые состояния. В действительности, *понимание* формальной модели предполагает ее *семантическую реализацию*, то есть возможность придать значение каждому символу системы. Так, согласно модели К.Зимана, описанной в главе 13, множество физиологических процессов, происходящих в мозгу, когда мы придаем символу значение, является динамикой. Согласно нашей модели языка, структурно устойчивые аттракторы этой динамики порождают символы соответствующего формального языка.

Эти соображения показывают важность понятия структурной устойчивости для математических объектов. Теперь перейдем к обзору многочисленных разделов математики, где ставится проблема структурной устойчивости. Мы увидим, что эта сложная проблема несмотря на свою важность, очень редко ставилась и в настоящее время решена еще только очень фрагментарно.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Можно заметить, что псевдо-группа эквивалентности формы животного имеет формальные свойства, очень похожие на псевдо-группу эквивалентности связанной с формой буквы, например, в письме от руки. Совпадение, несомненно, неслучайно.

[2] «...Рассматриваемое сравнение ведет также к очень интересной проблеме создания теории доказательств, которые являются эффективно понимаемыми, а не только правильными. Соответствующая геометрическая проблема заключается в поиске теории осуществимых конструкций, в которые включаются только точки, близкие к исходной и устойчивые при небольших изменениях ис-

ходных данных (это очевидным образом требует определения меры геометрической интуиции).»

Г. Крейзель и Ж. Кривин, *Элементы математической логики*

(G. Kreisel, J.L. Krivine, *Elements de Logique Mathematique*, Monographies de la Societe Mathematique de France, 3, Dunod, Paris, p.209).

ГЛАВА 3

СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В МАТЕМАТИКЕ

3.1. ОБЩАЯ ПРОБЛЕМА

А. Непрерывные семейства и бифуркация

В любой теории, связанной со структурной устойчивостью, с самого начала возникает следующая ситуация. В неизбежно неточных терминах задается непрерывное семейство геометрических объектов E_a. Каждый объект этого семейства параметрируется некоторой точкой a пространства параметров S. На практике S это евклидово пространство или дифференцируемое многообразие конечной или бесконечной размерности. Пусть s – данная точка из S, а E_s – соответствующий объект семейства. Может случиться, что если t – точка из S, достаточно близкая к s , то соответствующий объект E_t , имеет ту же форму (в смысле, уточняемом в каждом отдельном случае), что и объект E^s. В таком случае говорят, что E_s – структурно устойчивый объект семейства (называемый также *образующим*) [1]. Множество s точек из S структурно устойчиво, оно образует открытое множество, множество образующих точек. Дополнение K этого открытого множества мы будет называть *замкнутым множеством точек бифуркации*. То, что обычно называется проблемой устойчивости, может быть теперь сформулировано следующим образом: является ли множество K нигде не плотным? Наконец, во многих теориях пытаются уточнить топологическую природу замкнутого K, описывая его структуру и особенности. Мы рассмотрим основные теории, в которых встречается эта ситуация, переходя от более простых к более сложным и от более разработанных к менее разработанным.

Б. Алгебраическая геометрия

Пусть дана система алгебраических уравнений вида

$$P_j(x_i, s_k) = 0 \qquad (3\text{-}1)$$

где x_i и s_k – координаты в евклидовых пространствах R^n и S соответственно, а P_j – многочлены с переменными x_i и s_k. Если зафиксировать координаты s_k, то система (3-1) определяет алгебраическое множество $E_{(s_k)}$, множество точек решений системы (3-1), при заданных значениях s_k. Значения коэффициентов могут быть при этом действительными или комплексными. Тогда вопрос о устойчивости E_s в топологическом смысле допускает положительный ответ следующего вида: в S существует истинное (т.е. нигде не плотное) алгебраическое подмножество K, такое что если s и t – две точки одной и той же связной составляющей дополнения S-K, то соответствующие им множества E_s и E_t гомеоморфны. Вследствие изотопии окружающего пространства $\mathbf{R}^n$ этот гомеоморфизм непрерывно деформируем в тождество.

Технический комментарий. В случае действительных коэффициентов приведенный выше результат можно улучшить, заменяя алгебраическое множество K меньшим полу-алгебраическим множеством K'. Для комплексных коэффициентов множество K' оказывается конструктивным. Чтобы построить это множество, возьмем график G, определяемый системой (3-1) в произведении $\mathbf{R}^n$ S. Рассмотрим проекцию $p{:}\mathbf{R}^n\ S \Rightarrow S$ на второй сомножитель. Затем стратифицируем отображение $p{:}G \Rightarrow S$. G и S разлагаются на непересекающиеся дифференцируемо погружаемые многообразия (страты), таким образом, что образ по p страты G будет стратой в S, и ранг этого отображения остается постоянным на каждой страте. Соединение страт вдоль их краев должно также удовлетворять некоторым условиям непрерывности касательных плоскостей (см. [6]). Можно показать, что если T – какая-то страта S, то проекция p $:p^{-1}(T) \Rightarrow T$ является расслоением.

Если вместо того, чтобы интересоваться только топологическими свойствами алгебраических множеств Es, потребовать, чтобы эти множества были алгебраически изоморфными, мы получим отношение эквивалентности, слишком тонкое для того, чтобы структурно устойчивые множества (в таких случаях говорят о *жестких* множествах) были всюду плотными: действительно, алгебраическая структура алгебраического множества зависит в общем случае от непрерывных параметров, модулей, и не может из-за этого деформироваться в соседнюю неэквивалентную алгебраическую структуру. Размышляя в этом же направлении, можно попытаться определить максимальное непрерывное семейство, содержащее деформации заданной алгебраической структуры такой как модуль, алгебра или алгебра Ли, и в этом направлении недавно были получены интересные результаты. Представляется, что по широте своих возможных приложений преобладают две теории: а) теория деформации G-структур, которые содержат в частности теорию систем Пфаффа и следовательно общую теорию систем уравнений в частных производных; б) классификация действий заданной группы G на заданном множестве M, которое содержит теорию обыкновенных дифференциальных систем (действия $\mathbf{R}$ в M) и определяет, по-видимому, алгебраическую теорию особенностей дифференцируемых отображений (действия обратимых *струй* $L^r(n)$ $L^r(p)$ в $J^r(n,p)$).

В. «Аналитическая» геометрия[*]

Если в системе (3-1) заменить многочлены $P(x,s)$ аналитическими функциями $F(x,y)$, предыдущие результаты о устойчивости множества нулей Es требуют досторожности при обобщении. В области комплексных чисел теорема останется точной только при условии, что проекция $p: G \Rightarrow S$ будет *собственным* морфизмом (т.е. прообраз компакта из S будет компактом в G). В этом случае множество бифуркации K – это конструктивное множество, принадлежащее собственному аналитическому подмножеству S. В области действительных чисел ситуация очень похожа, но природа множества бифуркации K плохо изучена. Классический факт, что проекция аналитического множества не обязательно является аналитической или хотя бы полуаналитической (контрпример Осгуда) – свойство, присущее этим весьма вероятно расслоенным множествам – до сих пор не получил объяснения в литературе.

Предыдущее замечание по поводу алгебраического изоморфизма остается в силе и для аналитического изоморфизма. Структура аналитического множества зависит, вообще говоря,от непрерывных модулей, которые образуют пространство конечной или бесконечной размерности.

Г. Дифференциальная топология

Пусть X, Y – два дифференцируемых многообразия, X – компакт, а функциональное пространство $L(X,Y)$ дифференцируемых отображений X в Y, снабженное топологией C^m (задаваемой на данной карте суммой абсолютных значений разностей частных производных от нулевого порядка до порядка m), является многообразием бесконечной размерности, локально моделируемым на банаховом пространстве (банахово многообразие). Это функциональное пространство $L(X,Y)$ играет теперь роль пространства параметров S, где каждая точка f из $S=L(X,Y)$ является дифференцируемым отображением X в Y. В этом случае можно поставить вопрос о классификации форм отображений, об их топологическом типе. Напомним, что два отображения f, g из X в Y имеют одну и ту же форму, одинаковый топологический тип, если существуют два гомеоморфизма $h:X \Rightarrow X$, $k:Y \Rightarrow Y$, такие, что диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{f}{\Rightarrow} & Y \\ h \Downarrow & & \Downarrow k \\ X & \underset{g}{\Rightarrow} & Y \end{array} \qquad (3\text{-}2)$$

коммутативна. Таким образом получается следующий результат. В $L(X,Y)$ существует подпространство K коразмерности один (замкнутое множество бифуркации) такое, что два отображения f,g из L, находящиеся в одной и той же связной составляющей дополнения $L\text{-}K$, имеют одинаковый топологический тип. Более того, это множество бифуркации K имеет структуру, называемую *стратификацией*, которая определяется следующим образом. K содержит регулярные точки, которые образуют открытое множество, всюду плотное в K. Это множество – регулярная гиперповерхность в L. Дополнение этого открытого множества замкнуто в K. Из этого множества, коразмерность которого равна по меньшей мере двум, можно снова извлечь регулярные точки, которые образуют подмногообразие коразмерности два, и так далее. Более

[*] Термин «аналитическая геометрия» автор употребляет не в обычном смысле, а в смысле алгебраической геометрии аналитических функций. – *Прим. ред.*

того, в окрестности всякой точки такой страты множество K локально содержит модель, задаваемую алгебраическими уравнениями или неравенствами. Локальное изучение ситуации в окрестности страты множества бифуркаций коразмерности k играет очень важную роль в нашей модели. Мы будем развивать этот подход детально, используя понятие *универсальной развертки* особенности.

Комментарий. Пусть F – каноническое отображение

$$F{:}X{\times}L(X,Y) \Rightarrow Y{\times}L(X,Y) \Rightarrow L(X,Y)$$

определяемое соотношением

$$(x,f) \Rightarrow (y=f(x),f) \Rightarrow f$$

Существует замкнутое подмножество бесконечной коразмерности $H \subset L(X,Y)$ такое, что ограничение F на $L(X,Y) - H$ будет стратифицированным. Стратификация $L(X,Y) - H$ определяется подмножеством бифуркации K, которое содержит H в качестве замкнутого подмножества. Отображения из $L(X,Y)$-K являются структурно устойчивыми, то есть образующими. Отображения из $L(X,Y) - H$ являются стратифицированными. Они «почти образующие» в том смысле, что любое отображение g из L-H может быть погружено в семейство с q параметрами, такое что отображение $X{\times}R^q$ $Y{\times}R^q$ будет образующим. (См. понятие универсальной развертки особенности в конце главы). Доказательство такое. Сначала изучается локальная задача. Пусть g: $\mathbf{R}^m \Rightarrow \mathbf{R}^n$ – росток начального дифференцируемого отображения, которое сопоставляет начало координат прообраза O началу координат образа O_1. Пусть z – струя порядка r того же типа, то есть развертка этого отображения, ограниченная членами порядка r. Существует больший порядок $r+p$ (где p зависит только от m, n, r) такой, что если данная струя порядка $r+p$ расширяется за счет добавления одночленов вида $\sum_\omega a_\omega x_\omega$, а степень $|\omega|$ мультииндекса заключена между $r+1$ и $r+p$, то почти при любом наборе коэффициентов a_ω струя порядка $r+p$ определяет локальный топологический тип прообраза любого отображения, реализующего эту струю. Множество C точек пространства коэффициентов a, которые не обладают этим свойством (соответствующая струя порядка $r+p$ не определяет топологический тип прообраза) содержится в собственном алгебраическом подмножестве, а именно в множестве бифуркации. При выделении в пространствах струй $J^r(m,n)$ всех подмножеств бифуркации, которые можно определить, возникает каноническая стратификация пространства струй. Отображение $f{:}X{\Rightarrow}Y$, r-тая производная которого (сечение расслоения r-струй $J^r(X,Y)$) при достаточно больших r (зависящих только от m,n – размерностей X и Y) трансверсальна каноническому расслоению $J^r(X,Y)$, называется *правильным.* Оно локально структурно устойчиво. Отсюда следует, что правильные отображения всюду плотны. Чтобы получить глобальную топологическую устойчивость, достаточно потребовать, чтобы образы $f(X_1),\ldots,f(X_k)$ страт множества критических точек f были трансверсальны. Это условие реализуется посредством небольшого обобщения леммы о трансверсальности.

Теория устойчивости дифференцируемых отображений с точки зрения дифференцируемости (если на диаграмме (3-2) h и k являются диффеоморфизмами), стала темой недавних ярких работ Дж.Матера [8]. В этих работах доказывается, что при определенных не существенных на практике ограничениях размерности (например, при $n < 7$*), структурно устойчивые отображения с точки зрения дифференцируемости всюду плотны.* Эта же теория решает и задачу формальной устойчивости отображений, определяемых локально формальными рядами.

Д. Дифференциальные уравнения

Исторически понятие структурной устойчивости было впервые введено в математику в 1935 г. Андроновым и Понтрягиным для качественного изучения дифференциальных систем.

Дифференциальная система задается:

1.Конфигурационным пространством, которое является дифференцируемым многообразием M (конечной или бесконечной размерности);

2.Векторным полем X на M.

Интегрирование векторного поля порождает (по крайней мере локально) группу диффеоморфизмов с параметром t (h_t: $M \Rightarrow M$). Это поток, связанный с дифференциальной системой. Динамическая система на многообразии M определяется таким же образом. Множество векторных полей на M (векторное пространство сечений расслоенного пространства векторов, касательных к M) может быть снабжено топологией, определяемой нормой

$$\mathrm{Sup}_M |X_1 - X_0| + \sum|\delta X_1/\delta x - \delta X_0/\delta x| \qquad (C^1\text{-топология})$$

Если многообразие M компактно, получается также банахово пространство B. Дифференциальная система X на M называется структурно устойчивой, если любое векторное поле X', достаточно близкое к X в C^1, обладает следующим свойством: существует гомеоморфизм h из M на себя, который преобразует всякую траекторию поля X' в траекторию поля X. Можно дополнительно потребовать, чтобы этот гомеоморфизма был малым (расстояние от x до h(x) $<\varepsilon$). Иными словами, когда динамическая система X на M структурно устойчива, достаточно малые (по норме C^1) возмущения поля (X) не изменяют на качественном уровне поведение системы. Хотя гомеоморфизм h придполагается неизменным, возмущенная система после достаточно длительного промежутка времени может значительно изменить свое поведение. Простые геометрические соображения (слишком длинные, чтобы их здесь приводить) показывают, что это единственный тип структурной устойчивости дифференциальной системы, который можно надеяться достичь. Поэтому проблему устойчивости можно сформулировать следующим образом: являются ли структурно устойчивые поля X в пространстве векторных полей B всюду плотными? Недавно был получен частичный ответ на этот вопрос. Ответ положительный, если размерность M меньше трех (Peixoto[10]), и отрицательный, если эта размерность больше четырех (S.Smale[11]) или равна трем (R.Williams [16]). Несмотря на этот отрицательный ответ не стоит думать, что проблема структурной устойчивости не представляет интереса для динамики. На самом деле, даже если размерность больше четырех, функциональное пространство B содержит важное открытое множество, где структурно устойчивые поля повсюду плотны. Это открытое множество содержит в частности поля X без рекуррентности типа векторных градиентов, а также более общие структуры, известные в литературе под названием систем Морса-Смейла [17].

Другой важный класс динамических систем это консервативные гамильтоновы системы. Напомним их определение. Сначала задается конфигурационное пространство M^n, которое является дифференцируемым многообразием размерности n. Затем строится расслоенное пространство $T^*(M^n)$ ковекторов, касательных к M^n. В этом пространстве имеется каноническая дифференциальная 1-форма β (записываемая в канонических координатах q_i, p_i как $\beta = \sum_i p_i dq_i$), и внешний дифференциал $\alpha = d\beta = \sum_i dp_i \wedge dq_i$, определяющий на $T^*(M^n)$ симплектическую структуру. Гамильтонова динамика на M определяется заданием функции с действительными значениями (гамильтониана) H: $T^*(M^n) \Rightarrow \mathbf{R}$. Поле, определяющее динамику эволюции, является *симплектическим градиентом* гамильтониана, то есть полем X, задаваемым формулой

$$i(X).\alpha = dh \qquad \text{(уравнения Гамильтона),}$$

где i означает внутреннее произведение.

На заданном конфигурационном пространстве M^n множество гамильтоновых динамик естественно параметризуется функциональным пространством гамильтонианов $L(M^n,\mathbf{R})$, снабженным топологией C^m. Хотя эти функции в общем случае являются структурно устойчивыми, в том числе и с точки зрения дифференцируемой эквивалентности, нельзя утверждать, что две гамильтоновы динамики X, X' эквивалентны, на основании того факта, что их гамильтонианы H, H' соотносятся через диффеоморфизм $h: T^*(M^n) \Rightarrow T^*(M^n)$. Это выполняется только если диффеоморфизм h оставляет инвариантной симплектическую структуру (или 2-форму α), то есть если диффеоморфизм h является *каноническим преобразованием* фазового пространства $T^*(M^n)$. Проблема структурной устойчивости гамильтоновых систем, насколько мне известно, ранее не рассматривалась в литературе. С общих позиций этот вопрос должен вызывать пессимизм, и кроме банальных случаев (например, n=1) нельзя ожидать положительного решения данной проблемы. Однако известны некоторые устойчивые конфигурации, имеющие несомненно большое практическое значение. Именно, случай замкнутых траекторий типа центра, изученный Колмогоровым, Мозером и др., вероятно, соответствует стационарным состояниям квантовой механики. Мы вернемся к этой проблеме в главах 4 и 5.

Комментарий. Рассматриваемая здесь проблема – умение характеризовать геометрическую структуру дифференциальных «образующих» систем на многообразиях может, несомненно, считаться одной из самых трудных и малоизученных в современном анализе. В этом плане Стивен Смейл недавно предложил очень важные идеи, которые могут быть описаны следующим образом. Дифференциальная система (M,X) допускает U–структуру, если в любой точке m из M, векторное пространство касательных к M векторов допускает разложение на векторную сумму вида $T_m(M)=1+U_c+U_d$, где слагаемое 1обозначает пространство размерности один над полем X. Если f_t – (локальная) группа с одним параметром, порождаемая интегрированием X, данное разложение предполагается инвариантным по производной f'_t. Кроме того, для римановых метрик f'_t стягивающее ($|f'_t|<1$) для слагаемого U_c, и растягивающее для слагаемого U_d. Пусть Ω – множество рекуррентных (не блуждающих) точек поля X. Смейл постулирует существование для почти каждого поля X U- структуры над Ω. Он показывает, что если M компактно, то существует конечное разложение множества Ω на инвариантные неразложимые замкнутые Ω_i. Каждому Ω ставится в соответствие множество $\alpha^{-1}(\Omega_i)$ исходящих из него траекторий и множество $\omega^{-1}(\Omega_j)$ траекторий, которые в нем заканчиваются. Будем говорить, что Ω_i *предшествует* Ω_j, если множество $\alpha^{-1}(\Omega_i)$ совпадает с множеством $\omega^{-1}(\Omega_j)$. Это определяет между Ω_i отношение частичного порядка. Крайние Ω_i являются аттракторами поля X. Почти каждая траектория X кончается в окрестности аттрактора. Таким образом получается обобщение структуры, возникающей в теории Морса. Ω_i являются, таким образом, критическими точками, а множества $\omega^{-1}(\Omega_i)$ и $\omega^{-1}(\Omega_j)$ – клетками градиентов, соответствующих критическим точкам.

Отсюда, вообще говоря, следует, что если рассматривать только грубую структуру динамики, почти любая динамическая система имеет структуру градиентного поля [2]. В частности, конечных состояний (аттракторов) бывает только конечное число. Тем не менее, топологическая структура этих Ω_i мало изучена. Априори она представляется очень жесткой, обладающей структурной устойчивостью. Известны примеры, например, геодезический поток на многообразиях с отрицательной кривизной (Аносов [4]), где соответствующее поле оказывается консервативным и гамильтоновым. Конфигурация бассейнов различных аттракторов в общем случае очень сложна топологически, и не удовлетворяет структурной устойчивости.

Контрпример Смейла для четырехмерных пространств не оставляет никакой надежды получить в общем случае устойчивую плотную систему. Множество K бифуркации имеет в функциональном пространстве B векторного поля сложную топологическую структуру даже если не является плотным. Естественно, можно заметить, что только устойчивость конечных состояний играет практическую роль, однако неизвестно, действительно ли динамические системы с неустойчивыми аттракторами могут быть локально плотными в *B*. С этой точки зрения очень важно уточнить образующую форму бифуркаций в *B*. В главе 5 будет дана классификация образующих форм бифуркации для градиентных систем коразмерности меньше четырех. Было бы очень важно узнать, что занимает место этой классификации, когда рассматриваются более общие системы, например, определить, как многомерный аттрактор (типа *U*–системы Аносова) может разрушаться при деформации. По этому поводу можно сделать следующее замечание: создание или разрушение многомерного аттрактора в момент t_0 требует в общем случае бесконечного числа изменений топологического типа системы в моменты t_i, которые накапливаются к t_0. С точки зрения морфогенеза нужно быть готовым к тому, что это изменение аттрактора выражается в *обобщенной катастрофе* в том смысле, который будет уточнен главе 6. Мы далеки от удовлетворительного понимания этих трансформаций аттракторов, и на самом деле модели, которые я предложу для эмбриологии, будут неизбежно неточными.

Кроме того, необходимо отметить, что в случае систем с аттракторами гамильтонова типа, деформации этого аттрактора, являющиеся гомеоморфизмами и зависящие от непрерывных модулей, позволяют определить локальную относительную энергию и энтропию этого аттрактора. Можно полагать, что эволюция динамики проходит по последовательным гамильтоновым ступеням, разделенными короткими переходными периодами катастрофического характера.

E. Функциональный анализ и уравнения в частных производных

Структурная устойчивость функциональных операторов не является предметом систематической теории. В случае уравнений в частных производных устойчивость практически эквивалентна *корректности задачи*. Известны класические случаи: задача Дирихле для эллиптических операторов и задача Коши для параболических и гиперболических операторов. Только линейная теория достаточно развита. Но за пределами линейной теории практиктически не остается ничего известного. Локальная теорема существования и единственности решений системы аналитических уравнений (теорема Коши-Ковалевской) имеет, видимо, более широкую область применения; поскольку для любого решения уравнение вариации имеет гиперболический тип, не лишено смысла предположение, что в подобных случаях имеется структурная устойчивость как по отношению к исходным данным, так и по отношению к возмущениям дифференциальной системы (тем не менее для исходных данных может оказаться необходимым использовать более тонкую топологию, чем C^m). Другая важная для морфогенеза задача – это определение структурно устойчивых особенностей решений системы уравнений в частных производных. Так, самая простая вариационная задача это проблема Плато, которая заключается в нахождении минимальной поверхности, ограниченной данной кривой. Хотя ее можно решить физически при помощи мыльных пленок, математический анализ в настоящее время неспособен передать структурно устойчивые особенности решения. (Однако известно, что в трехмерном пространстве существуют только тройные ребра и четверные точки, определяемые *правилом фаз* Гиббса).

Сделанное выше замечание по поводу теоремы Коши-Ковалевской поднимает следующий вопрос: в какой мере аналитическое продолжение является структурно устойчивой операцией? Существует ли на множестве голоморфных функций, определенных на компакте *K*, топология, для которой область голоморфности функции (или ее замкнутое дополнение) зависела бы непрерывно от данной функции? Очевидно, что такая топология должна быть гораздо более тонкой, чем обычные топологии типа C^0 (топологии Банаха). Основываясь на этом факте, можно утверждать, что структурная устойчивость и «вычислимость» являются, в какой-то мере противоречащими друг другу требованиями. Действительно, любая эффективно вычислимая количественная модель использует аналитические функции, поскольку в других случаях дифференцируемые функции практически никогда не поддаются явной оценке. Это утверждение, противоречащее наиболее принятым взглядам на превосходство количественных моделей в науке, заслуживает, может быть, некоторого комментария. Ему можно противопоставить классические количественные модели, например, небесную механику. Но даже и в этом случае недавние работы по проблемам трех тел, как представляется, хорошо демонстрируют, что множество траекторий, ведущих к неустойчивым или катастрофическим ситуациям, (столконовения, удаление планеты в бесконечность) , скрывает в себе в очень сложной и сжатой форме множество устойчивых движений кеплеровского типа, так что на очень длинных периодах времени не существует структурной устойчивости эволюции рассматриваемой планетной системы.

В любом естественном процессе возникает нечто вроде природной шкалы, на которой структурная устойчивость и вычислимость становятся несовместимыми. В механике планет эта шкала такова, что несовместимость неощутима. В квантовой механике, наоборот, шкала настолько мала, что несовместимость непосредственно ощущается. Современная физика приносит структурную устойчивость в жертву вычислимости. Я хочу надеяться, что она не будет жалеть о своем выборе.

3.2. АЛГЕБРА И МОРФОГЕНЕЗ

А. Пример бифуркации

Вернемся, с учетом некоторой детализации, к формальному механизму, который, с моей точки зрения, управляет всем морфогенезом. Я попытаюсь объяснить его вполне элементарно, при помощи аналогии между развитием эмбриона, с одной стороны, и рядами Тейлора с неопределенными коэффициентами, с другой. Развитие эмбриона может быть в общих чертах описано следующим образом: начиная с «универсальной» яйцеклетки клеточные массы с течением времени получают необратимую (в принципе) гистологическую специализацию. Но внутри живого организма всегда имеется линия универсальных клеток, зародышевая линия, которая приводит к формированию репродуктивных клеток (гамет) во взрослой особи. Рассмотрим, с другой стороны, дифференцируемую функцию двух переменных x,y с исходным нулем $x=y=0$, и разложим ее в ряд до третьего (к примеру) порядка:

Первый порядок $f=a_1x+b_1y$

Второй порядок $f=a_1x+b_1y+a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2$

Третий порядок $f=a_1x+b_1y+a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2+a_3x^3+3b_3x^2y+3c_3xy^2+d_3y^3$

Рассмотрим пространства последовательных коэффициентов:

$J^1(a_1, b_1)$, $J^2(a_1, b_1, a_2, b_2, c_2)$, $J^3(a_1, \ldots, c_3, d_3)$,

которые канонически проектируются одно в другое:

$$J^1 \overset{p}{\Leftarrow} J^2 \overset{q}{\Leftarrow} J^3$$

Для первого порядка (в J^1) топологическая классификация функции f проста. Если один из коэффициентов $a1$,$b1$не нулевой, одна из производных $\delta f/\delta x$ или $\delta f/\delta y$ в начале координат не равна нулю. Тогда, согласно классической теореме о неявных функциях, функция f локально преобразуется в линейную путем замены криволинейных координат в плоскости Oxy. Иными словами, каковы бы ни были значения коэффициентов a, b для порядков больших первого, форма функции, ее будущее, необратимо фиксированы. Напротив, если $a_1 = b_1 = 0$, о топологической природе функции сказать ничего нельзя. Тогда говорят, что исходная точка $a_1 = b_1 = 0$ имеет в J^1 множество бифуркации K^1, алгебраический аналог зародышевой линии в эмбриологии. Во втором порядке точки J^2, которые при помощи p проектируются вовне K^1, имеют отныне фиксированную судьбу. Точки, проектируемые при помощи p на $0 = K^1 \subset J^1$, допускают следующую классификацию:

1. Если дискриминант квадратичной формы $a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2$ не равен нулю, то согласно классической теореме М.Морса, добавление членов порядка выше второго, не изменяет топологический тип функции, которая сохраняет свою квадратичную форму.

2. Если дискриминант $b_2^2 - a_2c_2$ равен нулю, то топологический тип функции перестает быть фиксированным. Следовательно, поверхность, задаваемая уравнением $b_2^2 - a_2c_2 = 0$, определяет множество бифуркации K_2. Далее, следует различать ранг квадратичной формы в K_2. Только нулевая форма может считаться универсальной. Форма ранга один, как, например, $f = x^2$, топологически не фиксирована. Если к ней добавить член третьей степени, не делящийся на x, например, y^3, то топологический тип $f = x^2 + y^3$ не может быть изменен прибавлением членов более высокого порядка.

Если к x^2 добавить член третьей степени, делящийся на x, то топологический тип f не будет фиксированным, как показывают примеры

$$f = x^2 + 2xy^2 \text{ и } g = x^2 + 2xy^2 + y^4,$$

которые топологически различны, поскольку $g = (x^2 + 2xy^2)^2$ определяет двойную кривую, что не имеет места при $f = 0$.

Таким образом, общая природа явления такова: для каждого порядка k имеется алгебраическое подмножество бифуркации K_k и при каноническом отображении $p_k: J^k \Rightarrow J^k\text{-}1$, $p_k(K_k)$ содержится в K_{k-1}. Последовательность этих множеств бифуркации формально аналогична зародышевой линии в эмбриологии. Разумеется, речь идет о формальной аналогии, которая никоим образом не распространяется на детали (на самом деле, динамика эмбриона гораздо сложнее, и в связи с феноменами индукции и регуляции в эмбриологии мы увидим, какая интерпретация лучше соответствует экспериментальным фактам,).

В представленной выше алгебраической модели имеется очень неприятная черта. Пространство неопределенных коэффициентов не задается раз и навсегда, но приходится иметь дело с последовательностью эвклидовых пространств $J^1 \Leftarrow J^2 \Leftarrow \ldots \Leftarrow J^{k-1} \Leftarrow J^k$, каждое из которых, начиная со второго, отображается в предыдущее (это то, что в математике называют проективным пределом). Чтобы перейти к пространству конечной размерности, заданному раз и навсегда, нужно рассматреть *особенность конечной коразмерности* и ее универсальную развертку.

Б. Универсальная развертка особенности конечной коразмерности

Пусть имеются два локальных отображения f и g евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^p$, которые отображают начало координат O пространства-прообраза в начало координат O_1 пространства-образа. Если эти два отображения имеют одни и те же частные производные вплоть до порядка r включительно, то говорят (в соответствии с терминологией, введенной С. Эресманом), что эти два отображения имеют в O общую *локальную струю* порядка r. Множество этих струй образует векторное пространство, обозначаемое $J^r(n,p)$, где роль координат играют коэффициенты разложения Тейлора p функций, задающих отображение в O, вплоть до порядка r. Как показывает приведенный выше пример, в $J^r(n,p)$ существует алгебраическое подмножество бифуркаций K^r со следующим свойством: если струя порядка r отображений f и

g является точкой дополнения $J^r(n,p)$ – K^r, то f и g локально относятся к одному и тому же топологическому типу. Существуют гомеоморфизмы h, h_1, такие что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}^p \\ h\Downarrow & & \Downarrow h_1 \\ \mathbf{R}^n & \xrightarrow[g]{} & \mathbf{R}^n \end{array}$$

где $h(O)=O$, $h_1(O_1)=O_1$, является коммутативной. В этом случае струю отображения f также называют *детерминантом*. Струя может оказаться структурно устойчивой. Тогда любая достаточно малая деформация отображения f топологически эквивалентна f (гомеоморфизмы h, h_1 при этом могут смещать начало координат). Например, невырожденная квадратичная критическая точка функции является структурно устойчивой в O. Что происходит, если струя отображения f не является структурно устойчивой? Могут иметь место три качественно очень различных случая:

1. Малые (в топологии C^m) произвольные возмущения отображения f могут порождать бесконечное число различных топологических типов. Например, гладкая функция $y=\exp(-1/x^2)$ может приближаться к окрестности нуля при помощи функций, имеющих сколь угодно большое число максимумов и минимумов. То же верно и о функции-константе $y=0$. В этом случае говорят, что особенность отображения f в O имеет *бесконечную коразмерность.* В этом случае струя f не может быть детерминантом.

2. Деформации имеют только конечное число (локальных) топологических типов. Тогда говорят, что эта особенность имеет *конечную коразмерность q.* В этом случае струя f является детерминантом, а коразмерность равна q, потому что f можно погрузить в семейство деформаций с q параметрами такими, что отображение F: $\mathbf{R}^n$ $\mathbf{R}^q \Rightarrow \mathbf{R}^p$ $\mathbf{R}^q$ будет структурно устойчивым. В частности, структурно устойчивая струя задает особенность коразмерности нуль. Это семейство деформаций является универсальным по отношению к деформациям f в том смысле, что любое возмущение отображения f с m параметрами выводимо из универсального семейства при помощи отображения $\mathbf{R}^m \Rightarrow \mathbf{R}^q$. Это универсальное семейство мы будем называть *универсальной разверткой организующего центра f.* Математическая теория этого факта слишком сложна, чтобы ее здесь рассматривать. Мы ограничимся тем, что объясним ее на одном примере (на самом деле – наиболее простом), а именно на примере функции одной переменной $y=x^3$.

B. Пример: универсальная развертка особенности $\mathbf{y=x^3}$

Любая деформация функции $y=x^3$ является дифференцируемой функцией $y=f(x,v)$, зависящей от m параметров, глобально определяемых с помощью v, таких что $f(x,0)=x^3$. Обозначим

$$F(x,y,v)=f(x,v)-y$$

Эта функция в начале координат $x=y=v=0$ пространства (x, y, v) удовлетворяет следующим условиям:

$$F(0,0,0) = F_x(0,0,0) = F_{x^2}(0,0,0) = 0;\ F_{x^3}(0,0,0) = 0$$

К ней можно применить теорему Вейерштрасса (обобщенную Б. Мальгранжем для дифференцируемых функций) и записать

$$F(x,y,v)=h(x,y,v)(x^3-3a(y,v)x^2+b(y,v)x+c(y,v)),$$

где h, a, b, c – дифференцируемые функции, для которых

$$h(0,0,0) = 0;\ a(0,0) = b(0,0) = c(0,0) = 0$$

и

$$\frac{\delta}{\delta y} c(0,0) = \frac{\delta}{\delta y} \frac{F(x, y, u)}{h(x, y, u)} = \frac{-1}{h(0, 0, 0)} = 0$$

при

$$x = y = v = 0$$

С помощью уравнений $x_1 = x - a(f,v)$, $y_1 = - c(y,v) + a^3(g,v)$ график $F = 0$ преобразуется в график многочлена третьей степени:

$$y_1 = x_1^3 + A(y,v)\, x_1 \qquad A = b - a^2$$

Поскольку в начале координат $\delta A/y = \delta b/y = 0$, в первом приближении можно пренебречь изменением коэффициента A относительно y и считать, что любая деформация $y=x^3$ заменой криволинейных координат $x \Rightarrow x_1$, $y \Rightarrow y_1$ преобразуется в многочлен $y_1 = x_1^3 + A(v)\, x_1$, который в свою очередь дает универсальную развертку особенности $y = x^3$. Поскольку это семейство зависит от единственного параметра A, эта особенность имеет коразмерность один.

Г. Общая теория универсальной развертки

В заключение приведем формальное определение универсальной развертки особенности конечной коразмерности. Пусть $y = f(x)$ – росток дифференцируемых отображений из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^p$, струя которых в начале координат имеет особенность коразмерности q. Универсальная развертка особенности f это семейство с q параметрами

$$Y=f(x) + \sum u_j g_j(x) = F(x,u)$$

обладающее следующим свойством: для любой деформации $G(x,v)=y$, $G(x,0)=f(x)$ отображения f существуют гомеоморфизмы $(x,v) \Rightarrow (x_1,v)$, $(y,v) \Rightarrow (y_1,v)$, такие что непрерывное отображение $k{:}v \Rightarrow u$ делает коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (x,v) & \overset{G}{\Rightarrow} & (y,v) \\ h_v,k \Downarrow & & \Downarrow h_{1,v},k \\ (x_1,u) & \overset{F}{\Rightarrow} & (y_1,u) \end{array}$$

(любая деформация имеет тот же топологический тип, что и отображение универсальной развертки).

С точки зрения функционального анализа теория универсальной развертки может быть проинтерпретирована следующим образом. В пространстве отображений $C^m L\,(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$существует стратифицированное множество бифуркаций Y. Особенность f коразмерности q является точкой страты Y коразмерности q в $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$. Универсальная развертка особенности это не что иное, как фрагмент q-плоскости, трансверсальный точке f в ее страте. Универсальное семейство не единственно, но определено с точностью до изоморфизма в пределах страты.

Замечание. Как уже было сказано выше, струя не может быть организующим центром конечной универсальной развертки только если эта струя является детерминантом. Тем не менее можно показать, что если $z \in J^r(n,p)$ не является детерминантом, существует целое положительное m (зависящее только от r, n и p), такое что почти любое расширение z до порядка $r+m$ будет детерминантом. «Почти любое», как обычно в этой теории, означает дополнение нигде не плотного алгебраического множества (бифуркаций). Пример: в $J^2(2,1)$ (локальные струи из $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}$) струя $f=x^2$ не является детерминантом, но $f= x^2 + y^3$ – детерминант с универсальной разверткой $F = x^2 + y^3 + uy$

В предшествующем рассуждении рассматривались только локальные особенности, а именно особенности ростков дифференцируемых отображений. Та же самая теория, вероятно, распространяется на глобальные отображения многообразий. Любой точке f страты коразмерности q можно поставить в соответствие трансверсальную q—плоскость, которая будет задавать универсальную развертку. Тем не менее, страты множества бифуркации Y, которые определяются нелокальными особенностями, на самом деле соответствуют отображениям, для которых образы критических страт в общем положении не пересекаются. Введенные таким образом особенности, очень похоже, имеют тривиальный характер типа особенностей барицентрического разбиения симплекса, связанных с правилом фаз Гиббса. На мой взгляд, глобальная теория представляет не намного больше интереса (и трудностей) по сравнению с локальной.

ПРИМЕЧАНИЯ

1. Прилагательное «образующий» используется в математике в таких различных случаях, что, видимо, неразумно стремиться ограничить его использование рамками формальной теории. Можно только пожелать, чтобы было принято недавнее предложение Смейла [11]. Согласно Смейлу надо называть «образующими» только свойства элементов топологического пространства, не применяя его к самим элементам пространства. Свойство P точек пространства E называется образующим, если множество точек, обладающих свойством P плотно в E. Пока что право уточнять конкретное значение термина и придерживаться его до появления другой точки зрения принадлежит тому математику, который использует этот термин.

2. Следует, однако, заметить, что множества, разделяющие бассейны различных аттракторов, имеют в общем случае систем Морса-Смейла более сложную топологию, чем топология сепаратрисс градиентов. Действительно, наличие структурно устойчивых *гетероклинических точек* (термин А. Пуанкаре [15]) делает границы между бассейнами досточно случайными. Более того, на этих границах может иметься формация устойчивых конфигураций, играющих роль аттракторов, в которых можно усмотреть источник устойчивых переходных режимов, которые часто возникают в окрестности ударного фронта, разделяющего области двух конкурирующих устойчивых режимов.

3. Может возникнуть вопрос: не сыграло ли то особенное внимание, которое в математическом анализе девятнадцатого века придавалось комплексным числам и теории аналитических функций, роковую роль в ориентации математики. Позволяя возводить прекрасное – слишком прекрасное – учение, которое идеально согласовывалось с торжествовавшей тогда идеей количественного характера физических законов, оно способствовало игнорированию реальных и качественных сторон вещей. Потребовался расцвет топологии в середине XX века, чтобы математики вернулись к геометрическим объектам, изучение которых фактически только началось. Только сравните заброшенное состояние, в котором сейчас находится алгебраическая геометрия действительных чисел, с формальным совершенством, достигнутым в алгебраической геометрии комплексных чисел! Для любого природного явления, которое описываеся алгебраическим уравнением, важнейший вопрос – знать, имеет ли это уравнение *действительные* решения. Да или нет – вот вопрос, который препятствует обращению к комплексным числам. В качестве примеров ситуаций, в которых понятие действительного числа играет важнейшую качественную роль, можно вспомнить действительность собственных значений линейной дифференциальной системы, индекс критической точки функции, эллиптичность или гиперболичность дифференциального оператора.

ЛИТЕРАТУРА

В предлагаемом списке приводятся только самые новые (к концу 60-ых годов – *прим. перев.*) самые полные или самые типичные статьи по каждой из затрагиваемых тем.

Алгебраическая геометрия

Топология. Обзор – в [1], теория стратифицированных множеств более полно изложена в [2].

[1] R. Thom. *La stabilite topologique des applications polynomiales.* L'enseignement mathematique, t.VIII, fasc.,2, 1962.

[2] R. Thom. *Ensembles et morphismes stratifies*, Bull. Amer. Math., Soc., March 1969, **75**, 2.

Теория модулей. Этому предмету посвящена большая часть современной алгебраической геометрии: см., например, D. Mumford, *Geometric Invariant Theory,* Ergebnisse der Math. Band 34, Springer, 1965

Деформация алгебраических структур.

Алгебры Ли:

[3] A. Niejenhuis, R.W. Richardson Jr., *Cohomology and deformations in graded Lie algebras.*, Bull. Amer. Math., Soc., Jan, 1966

G-структуры:

[4] V. Guillemin and S. Strenberg, *Deformation theory of pseudo-group structures*, Memoirs of the American Mathematical Society, 64, 1966.

Действия группы:

[5] R. Palais, S. Stewart, *Deformation of compact differentiable transformation groups*, Amer. Journal Math., 82, 4, Oct. 1960.

Аналитическая геометрия

Дифференциальная и топологическая теория

[6] H. Whitney, *Local differential properties of analytical sets. Differential and combinatorial Topology*, Princeton University Press, 1965.

[7] S. Lojasiewicz, *Ensembles semi-analytique*, I.H.E.S., juillet 1965.

См. также [2].

Деформация аналитических особенностей

H.Grauert et H.Kerner, *Deformationen von Singularitaeten komplexer Raeume*, Math. Annal., **153**, 1964, p.236-260.

A.Douady, *Le probleme des modules pour les sous-espaces analytiques compacts*, Ann. Institut Fourier, **16**, 1, 1966, p.1-95.

Дифференциальная топология

[8] J. Mather, *Stability of C mappings* I-IV, Publications de l'IHES, **37**, 1969, p.523-548.

[9] R. Thom. *Ensembles et morphismes stratifies.* (Ср. [2])

Нелокальная теория дифференциальных уравнений

[10] M. Peixoto, *Structural stability on 2-dimensional Manifolds Topology*, 2, 1962, p. 101-121.

[11] S.Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull, A.M.S. **73**, 1967, 747-817.

[12] V.Arnold, J.Avez., *Problemes ergodiques en Mechanique claassique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[13] R.Abraham, *Foundations of Mechanics*, Benjamin, 1967

[14] D. Anosov, *Roughness of geodesic flows on compact Riemann manifolds of negative curvature*, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 1945, 1962, p.707-709.

[15] H. Poincare, *Lecons sur la Mechanique celeste,* (Reedition Dover, New York 1957)

[16] R.F.Williams, *The D.A. maps of Smale and structural stability,*

[17] J.Palis – S. Smale, *Structural stability theorems* в: Proceedings of the A.M.S. Symposium on Global Analysis, Berkely, July 1968.

ГЛАВА 4
КИНЕМАТИКА ФОРМ. КАТАСТРОФЫ

4.1. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ

А. Морфология процесса

В камере B происходит естественное явление, о природе которого у нас нет никаких гипотез. Рассмотрим произведение B T: произведение B на ось времени T. Это будет областью-ловушкой рассматриваемого процесса. Предполагается, что наблюдатель располагает зондами или другими средствами, позволяющими видеть то, что происходит в окрестности любой точки x из B T. Тогда сразу напрашивается следующая классификация точек из B T. Допустим, в окрестности точки x из B T наблюдатель не замечает ничего, достойного внимания. Если с феноменологической точки зрения точка x ничем не отличается от соседних, говорят, что точка x – *регулярная* точка процесса. По самому этому определению, регулярные точки образуют о ткрытое подмножество в B T. Замкнутое дополнение регулярных точек в B T будем называть множеством *катастрофических точек* процесса. В окрестности любой точки c замкнутого множества K катастрофических точек, процесс оказывается разрывным: в любом шаре с центром c «что-то происходит». Задание замкнутого множества K и описание особенностей в каждой из его точек составляет *морфологию* процесса.

Различие между регулярными и катастрофическими точками очевидным образом произвольно, поскольку оно зависит от точности используемых средств наблюдения. Можно предположить – и не без основания – что любая точка становится катастрофической, если используемые средства достаточно точны. Поэтому различие реально может устанавливаться только в рамках математической модели. Напомним с этой целью некоторые понятия качественной динамики.

Б. Аттракторы

Пусть (M, X) – динамическая система, определенная на поле векторов X на многообразии М. *Аттрактор* F системы это замкнутое инвариантное множество на X, обладающее тремя следующими свойствами:

i) существует открытое множество U – инвариантная открытая окрестность аттрактора F, называемая *бассейном* (или *областью притяжения*) аттрактора F, такая что для всякаой траектории, исходящей из точки из U, F является -предельным множеством.

ii) любая траектория, -предельное множество которой содержит точку из F, лежит в F.

iii) F *неразложимо*, то есть почти каждая траектория X в F является плотной в F_1.

Аттрактор F поля X называется *структурно устойчивым*, если любое поле X_1, достаточно близкое к X в C^1-топологии, допускает аттрактор F_1 такой, что существует гомеоморфизм h окрестности F на окрестность F_1, который преобразует траектории X в траектории X_1. Можно предположить, что h лежит в окрестности тождественного отображения.

Не установлено точно, имеет ли произвольное поле X на M аттракторы, тем более структурно устойчивые. Тем не менее, согласно высказанным недавно идеям Смейла (см.3.1.Е), если многообразие M компактно, то почти любое поле X имеет конечное число аттракторов, по-отдельности являющихся структурно устойчивыми. К сожалению, топологическая структура этих устойчивых аттракторов изучена плохо. В любом случае мы будем рассматривать далее только аттракторы простого типа, вроде изолированных точек или замкнутых обыкновенных траекторий, для которых свойство структурной устойчивости является непосредственным.

В гамильтоновой динамике нет аттракторов в точном смысле слова. На самом деле если поле X сохраняет неизменным объем (меру Лиувилля), никакое открытое множество не может быть преобразовано при помощи X в открытое множество U', строго содержащееся в U. Тем не менее, некоторые замкнутые инвариантные множества с положительной мерой могут рассматриваться как *странные* аттракторы (в их числе множество насыщенных траекторий замкнутой центральной траектории, изучавшееся Колмогоровым, Мозером и др.). Понятно, что замкнутая траектория g и незамкнутая траектория g', неопределенно обвивающаяся вокруг тора с сердечником g, должны рассматриваться как определяющие одно и то же термодинамическое состояние системы. Эти странные аттракторы тем более закономерно рассматривать, что они обладают устойчивостью по отношению к достаточно малым гамильтоновым возмущениям. Может быть, у них нет структурной устойчивости в топологическом смысле, но они обладают общей сопротивляемостью гамильтоновым возмущениям.

B. Распределение по бассейнам

Относительное топологическое расположение бассейнов, связанных с различными аттракторами, может быть весьма различным. В наиболее простом случае, а именно в случае градиентной динамики, различные бассейны разделены гиперповерхностями, обычно погружаемыми по частям.

Например, для географической карты с линиями уровня (горизонталями), бассейны, относящиеся к различным рекам, разделены линиями водораздела, которые образуются совокупностью линий хребтов. Эти разделительные линии снижаются на перевалах, которые они проходят как регулярные точки, но встречаются на вершинах, где они образуют углы или точки возврата.

Но в любом другом случае и особенно когда динамика (M,X) является рекуррентной, относительное топологическое расположение двух бассейнов может быть очень сложным. Иногда при структурной устойчивости случается, что два бассейна взаимно проникают друг в друга таким образом, что образуют топологически крайне сложную конфигурацию. Например, при размерности два разделительная кривая двух бассейнов может навиваться на замкнутую траекторию. В таком случае можно говорить о ситуации *борьбы* или *конкуренции* между двумя аттракторами. На самом деле, если исходить из начального положения в окрестности точки - предела разделительной линии, результат процесса зависит от очень слабого варьирования начальных условий. В таком случае явления остаются практически неопределенными, и можно только измерять относительную вероятность каждого аттрактора оценивая локальную плотность каждого бассейна.

Вышеперечисленные соображения можно *a fortiori* приложить к странным аттракторам гамильтоновых динамических систем. Здесь едва ли можно говорить о бассейне, и преобладание какого-либо одного аттрактора никогда не является однозначным. Такая текучесть и флуктуационная изменчивость гамильтоновой динамики очевидным образом заставляет вспомнить вероятностный характер квантовой механики.

4.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕГУЛЯРНЫХ ПРОЦЕССОВ

В дальнейшем мы будем иметь дело с моделями двух типов – *статическими и метаболическими*.

А. Статическая модель

В этой модели задаются два дифференцируемых многообразия U (пространство внутренних параметров) и V (на практике V это область действительных или комплексных чисел). Допускается, что процесс можно описать локально в окрестности каждой регулярной точки x при помощи поля отображений вида $G: W\ U \Rightarrow V$, где W это окрестность x в $B\ T$. В каждой регулярной точке x локальное состояние процесса описывается отображением $g: U \Rightarrow V{=}G(x,u)$ исходя из которого, теоретически можно описать все, что наблюдается в этой системе.

Б. Метаболическая модель

В каждой регулярной точке x заданы:

1. Многообразие M (пространство *внутренних параметров*)
2. Векторное поле X на M, зависящее от x.
3. Аттрактор $c(x)$ динамики ($M, X(x)$).

Предполагается, что $X(x)$ зависит от x дифференцируемым образом. Действительно, на определение локального состояния влияет только окрестность поля $X(x)$, лежащая в окрестности аттрактора $c(x)$. Остальная часть поля $X(x)$ не играет реальной роли. Наблюдаемые компоненты системы определяются заданием аттрактора $c(x)$.

Пока мы не сделали никаких предположений о классе дифференцируемости функций g или X. Они предполагаются m раз непрерывно дифференцируемыми, где m достаточно велико. Катастрофическая точка может характеризоваться тем, что в этой точке поле g_x или $c(x)$, или одна из их производных порядка меньшего или равного m, имеет разрыв. В примерах, взятых из термодинамики, порядок m может быть взят равным самое большее двум. Очевидно, что разрывы производных очень больших порядков могут легко ускользнуть от наблюдения.

В. Эволюция полей

Допустим, что в окрестности регулярной точки $x{=}(y,t)$, $y \in B$, эволюция статического или метаболического поля развивается по дифференциальному закону вида

$$dg/dt{=}\ H(g,t,y) \qquad \text{(статический случай)}$$
$$dX/dt{=}H_{c(x)}\ (X,y,t) \qquad \text{(метаболический случай),}$$

где операторы H приводят к локально корректно поставленным задачам. Под этим, как обычно, понимается, что решение задачи Коши относительно этого оператора существует и единственно, и это решение непрерывно зависит от исходных данных во всей окрестности $g(y,0)$. Заметим, что в метаболической модели закон эволюции зависит от аттрактора $c(x)$.

Г. Эквивалентность моделей

Необходимо понимать, что модель необязательно должна быть единственной. Рассмотрим этот вопрос в статическом, более простом для изучения случае.

Пусть имеется статическое поле на $B\ T$ со значениями в функциональном пространстве

$L(U,V)$. Если дано два других многообразия U_1, V_1 и отображения $k: U_1\ U, j:V \Rightarrow V_1$ то с помощью поля $g_x \in L(U,V)$ можно построить поле g_{1x}, заданное с помощью $g_{1x}=j^\circ g^\circ k$. Очевидно, нет никаких оснований сводить оператор эволюции поля g_1, порождаемый оператором эволюции поля g при помощи диффеоморфизма $h:x \Rightarrow x$ базовых пространств, к хорошо поставленной задаче, кроме случая, когда отображения j и k являются диффеоморфизмами. Можно следующим образом задать два отношения эквивалентности между статическими моделями: отношение D при котором j и k являются диффеоморфизмами, и более общее отношение E, при котором j и k не обязательно биективны. В двух точках x,x' локальные модели могут быть изоморфными по E, но неизоморфнымы по D. Такой тип изменения поведения процесса в принципе совершенно ненаблюдаем, но априори его нельзя исключить. Такая ситуация будет иметь место, если, к примеру, начиная с момента $t=t_0$ степень свободы внутреннего пространства U, до этого времени полностью подавленная, начинает эффективно участвовать в процессе. Мы допускаем возможность появления таких *тихих* (silencieuses) *катастроф*. Впрочем, это не исследованный вопрос, который сводится к выяснению того, существует ли в классе эквивалентности по E универсальная максимально простая модель, все другие представители которой строятся при помощи удачно выбранных отображений j, k.

Д. Изоморфные процессы

Пусть на открытых областях пространства-времени W,W_1 заданы два процесса одинаковой природы. Говорят, что эти процессы изоморфны, если существует гомеоморфизм $h: W \Rightarrow W_1$ такой, что

1. h преобразует катастрофическое множество $K \subset W$ в катастрофическое множество $K_1 \subset W_1$ другого поля;
2. ограничение h на регулярные точки из W, будет диффеоморфизмом на регулярных точках из W_1. В регулярных точках x, $x_1 = h(x)$ поля изоморфны.

В последующих определениях (обыкновенных и существенных катастроф), используется метрическая структура базового пространства. Это накладывает на теорию весьма произвольные ограничения. Следует, однако, заметить, что эта теория применяется преимущественно к естественным структурно устойчивым процессам. Как было показано в главе 2, это предполагает сравнение двух камер, подобных в смысле преобразования Галилея (в нерелятивистском, единственном, рассматриваемом здесь случае). При этих условиях введение евклидовой метрики полностью оправдано. Нужно только использовать неявное предположение, что рассматриваемые элементарные динамики удовлетворяют условию галилеевой инвариантности.

4.3. КАТАСТРОФЫ

А. Обыкновенные катастрофические точки

Будем называть точка из $B\ \ T$ *обыкновенной катастрофической точкой*, если пересечение множества катастроф X с шаром $b_r(y)$ с центром в y и достаточно малым радиусом r, имеет модель, которая является погружаемым непустым полуаналитическим полиэдром без внутренних точек. Более того, ограничение процесса на открытый шар $b_r(y)$ остается изоморфным себе при всех достаточно малых значениях r.

Катастрофические точки z, достаточно близкие к y, содержащиеся в шаре $b_r(y)$, удовлетворяют тем же условиям, что и y: множество K в окрестности z не пустое и полуаналитическое [1]. На $K \cap b_r(z)$ существует коническая структура, которая выражает изоморфизм локальных процессов. Следовательно, обыкновенные катастрофические точки образуют открытое подмножество в множестве K катастрофических точек.

Обыкновенная катастрофическая точка вполне может быть изолированной. Тем не менее, для всех моделей морфогенетических полей, которые мы рассматриваем, такая катастрофа может быть структурно устойчивой только в одном случае – когда размерность пространства-времени равна одному.

Б. Существенные катастрофические точки

Определение. Катастрофическая точка, не являющаяся обыкновенной, называется *существенной.* Существенные катастрофические точки образуют закрытое подмножество множества катастроф K.

Как будет видно из примеров, нельзя исключать возможность того, что замкнутое множество M_1 существенных катастроф образовано внутренними точками. Действительно, естественный процесс вполне может в некоторой области пространства-времени стать локально хаотичным, причем необходимым и структурно устойчивым способом. Столкнувшись с такой ситуацией, наблюдатель, как правило, попытается изменить модель. Он откажется от первоначальной модели в пользу *редуцированной модели*, которая в каком-то смысле представляет среднее термодинамическое состояние исходной модели. Действительно, следует понимать, что глобальная устойчивость нашей вселенной покоится на законе компенсации. Когда катастрофы становятся слишком многочисленными и частыми, то каждая по отдельности не может быть очень серьезной. Часто каждая катастрофа оказывается настолько незначительной, что даже их совокупность может быть ненаблюдаемой. В этих случаях наблюдатель может игнорировать слишком мелкие катастрофы и при помощи операции усреднения выявлять усредненные факторы, доступные наблюдению. Эта процедура, которая будет описана в параграфе 4.7. под названием *редукции поля*, в общем случае ведет к замене метаболической модели статической.

Уже по определению существенная катастрофическая точка не может быть изолированной в множестве катастроф K. На самом деле, если y – существенная катастрофическая точка, то процесс, ограниченный на каждый шар $B_r(y)$, изменяет класс изоморфизма, когда r стремится к нулю, что приводит к тому что граничная сфера $B_r(y)$ сталкивается с новыми катастрофами. Различается два типа существенных точек: те, которые прилегают к обыкновенным катастрофам, и те, в окрестности которых есть только существенные катастрофы. В изучаемых нами моделях точки первого типа расположены на гиперповерхностях, одна сторона которых содержит только обыкновенные катастрофы, а другая – только существенные катастрофы (или не содержит катастроф вообще). Точки второго типа заполняют открытые множества (хаотические процессы) сложной топологической конфигурации типа совершенного канторова множества.

4.4. МОРФОГЕНЕТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ, СВЯЗАННЫЕ С ЛОКАЛЬНЫМИ КАТАСТРОФАМИ

А. Статические модели

Теперь мы приступаем к фундаментальному построению, определяющему, с нашей точки зрения, морфологию процесса, исходя из его динамики. Рассмотрим сначала случай статической модели. Пусть W – базовое пространство (область пространства-времени) и $L(U,V)$ – расслоенное функциональное пространство. Предположим, что в $L(U,V)$ существует замкнутое подмножество H' подмножества бифуркации H, обладающее следующими свойствами. Пусть $s{:}W \Rightarrow L(U,V)$ – сечение поля. Допустим, что *локальный процесс изменяет свой феномено-*

логический вид только в точке, где отображение внутренней динамики $g:U \Rightarrow V$ изменяет свой топологический тип. Таким образом, любая точка $x \in W$ такая что отображение $s(x)=g$ структурно устойчиво, является регулярной точкой процесса. Каждая катастрофическая точка y такова, что $s(y)$ принадлежит множеству бифуркации H функционального пространства $L(U,V)$. В действительности, только в одном известном случае статической модели, а именно, в случае, когда V это действительная прямая $\mathbf{R}$ (который будет рассмотрен в следующей главе), устойчивые режимы, аттракторы локальной динамики соответствуют минимуму функции $g:U \Rightarrow \mathbf{R}$. Таким образом, катастрофические точки получаются как прообразы страт H' из H по s, где H' обозначает множество функций $g: U \Rightarrow \mathbf{R}$ имеющих по крйней мере два равных минимума (*условие Максвелла*). Эти страты H' часто в качестве свободной границы имеют страты $H_1 \subset H$, где два минимума совпадают или один минимум разлагается на два при бифуркации. Наиболее простой случай этого явления описан в следующей главе под названием катастрофы Римана – Гюгонио. Множество этих явлений можно описать при помощи железнодорожной метафоры: *бифуркация порождает катастрофу.*

Множество $H' \subset H$, определенное при помощи условия Максвелла, инвариантно относительно внутренних диффеоморфизмов многообразий U и V. Так что определение катастрофических точек конкретного процесса не зависит от представителя, выбранного в классе изоморфизмов статических полей. Обычно предполагается, что сечение s это трансверсальное отображение W на H'. Это позволяет определить топологический тип катастрофического множества в окрестности любой точки. В пятой главе будет проведено описание этих локальных типов, когда размерность пространства меньше четырех. В ситуации этого рода получаются только обыкновенные катастрофы. *Структурно устойчивое появление в нашем пространстве-времени существенных катастроф достаточно ясно показывает недостаточность статической модели или неточность гипотезы о трансверсальности.*

Однако статическая модель позволяет понять важное явление – распространение фронта ударной волны, и теоретически определить все структурно устойчивые особенности такого фронта.

Б. Устойчивые особенности волнового фронта

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор порядка r, действующий на действительных функциях $f(x,t)$, где $x \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$, вида

$$\frac{\delta^r}{\delta t^r} f = \sum_{|\omega|=r} a_\omega D_\omega f + \sum_{|\omega'|<r} b_{\omega'} D_{\omega'} f$$

где коэффициенты а зависят только от x. Множество членов максимального порядка $(d^r/dt^r)f - \Sigma a_\omega D_\omega f$ составляют *главную часть* оператора. Если решение f имеет разрыв одной из производных порядка r^{-1}, локализованный для $t=0$ на гиперповерхности с уравнением $S(X,O)=0$, то, как известно, область этого разрыва распространяется в $\mathbf{R}^n$ как гиперповерхность $S(x,t)=0$, где $S(x,t)$ – решение *уравнения Якоби*:

$$\frac{\delta S}{\delta t} + H\left(x_i, \frac{\delta S}{\delta x_i}\right)=0$$

такое, что $S(x,O)$ – заданная функция, и где $H^r=\Sigma_{|\omega|=r} a_\omega P_\omega = G$ и, как обычно, $\delta S/x_i = P_i$.

Чтобы получить вариацию этой гиперповерхности, как известно, достаточно построить *характеристическую систему* уравнения Якоби

$$X_i = -\frac{\delta H}{\delta P^i}, \quad P_i = \frac{\delta H}{\delta x^i}$$

которая определяет *бихарактеристики* данного уравнения. Так как

$$X_i = -\frac{1}{r} G^{\frac{1-r}{r}} \frac{\delta G}{\delta p_i}$$

очевидно, что для всех ковекторов *(x_i , p_i)* получается единственная бихарактеристика *g(p)*, инвариантная относительно гомотетии *(p_i)* $\Rightarrow \lambda$ *(p_i)* вследствие однородности. Выберем подходящим образом точку x_I и будем рассматривать все ковекторы, исходящие из этой точки x_I как внутреннее пространство *U*. Пусть *p* – ковектор из *U*, а g(*p*) – соответствующая бихарактеристика. Вообще говоря, эта бихарактеристика пересекает начальный волновой фронт *S*(*x,O*)=0 в точке $x_0(p)$. Вычислим действие $\int_{x_0}^{x_1} \Sigma_i\, p_i\, dx_i$ вдоль этой бихарактеристики между x_0 и x_I. Оно равно $\int_{x_0}^{x_1} Hdt$ и минимально для ковектора $p_1 \in U(x_1)$, касательного к ударной волне в x_I. Теперь остается связать с каждой точкой x_1 функцию, дифференцируемую в пространстве U(x_1) нормализованных ковекторов, исходящих из x_I, и *взять в каждой точке минимум этой функции*. На самом деле, все это представляет собой другой способ описания конструкции Гюйгенса, который представил ударный фронт в момент *t* как огибающую сферических волн с центром на фронте ударной волны в момент *t*=0 (см. рис. 4-1).

В случае нашего трехмерного пространства нормированные ковекторы с заданным началом образуют сферу S^2. Можно получить все особенности коранга два для функции *S* в пространстве *U*. Обращая это построение, можно увидеть, что таким образом все особенности оказываются выявленными. Среди них структурно устойчивыми будут только те, коразмерность которых меньше четырех. Их изучению посвящена следующая глава.

B. Метаболические модели

В метаболических моделях, в которых роль слоя играет динамика (*M,X*) на *W*, теория выглядит следующим образом. В функциональном пространстве *F* векторного поля *X* имеется подмножество бифуркации, то есть множество систем, в окрестности которых конфигурация аттракторов поля *X* не является структурно устойчивой. Из этого множества *H* извлекается подмножество *H'*, которое задает те поля *X*, для которых аттрактор *c(x)*, связанный с сечением *s*, не является структурно устойчивым. Катастрофические точки процесса образуют прообраз подмножества *H'* по сечению *s:W* $\Rightarrow$ *F*. В противоположность тому, что происходит в статическом случае, множество *H'* хотя и (возможно) не стратифицируемо, не является локально замкнутым в *F*. Поэтому множество $\mathbf{K} = s^{-1}H'$ может иметь сложную топологическую структуру и, в частности, иметь существенные катастрофические точки.

4.5. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КАТАСТРОФ

A. Область существования и бассейн

Пусть имеется естественный процесс, протекающий в области пространства-времени *W*, описываемый метаболической моделью (расслоением) (*M,X*). Если предельное положение точки $y \in W$ в локальной динамике (*M,X*) определяется структурно устойчивым аттрактором *c(y),* то точка *y* является регулярной точкой процесса. Все регулярные точки, которые могут быть соединены с *y* только посредством регулярных точек, образуют область W_y, которую называют *областью существования* данного аттрактора. Не надо путать область существования аттрактора, открытую область пространства-времени W, с бассейном этого аттрактора, который является открытым множеством многообразия M внутренних состояний.

В окрестности W обыкновенной катастрофической точки $y \in \mathbf{K}$ процесса существует по крайней мере два аттрактора c, c_1 из (M, X), области существования которых пересекаются с W. Естественно предположить, что такая конкуренция возможна только если бассейны c, c_1 имеют в M общую границу. Так геометрически интерпретируется высказывание Гераклита о том, что всякий морфогенез есть результат борьбы.

Б. Катастрофы конфликта и катастрофы бифуркации

1. Если каждый аттрактор, приводящий к катастрофе, в окрестности каждой катастрофической точки, соседней с данной точкой, конкурирует с одним или несколькими другими аттракторами, то говорят, что мы имеем дело с катастрофой *конфликта*. Поведение ударной волны, разделяющей различные области существования, в общем случае трудно уточнить. Во многих случаях каждому аттрактору приписывают потенциал V_i, и ударную волну, разделяющую области c и c_i, определяют уравнением $V_i(y) = V_j(y)$. Именно это называется *условием Максвелла*, из которого при некоторых общих предположениях следует правило фаз Гиббса.

2. Когда аттрактор находится в конфликте сам с собой (после непрерывной вариации) говорят, что имеет место катастрофа *бифуркации*. Самый простой пример – это катастрофа Римана-Гюгонио, описанная в пятой главе. В этом случае условие Максвелла также позволяет уточнить топологическую структуру локальных ударных фронтов. Но это условие применимо только если среда W может быть отображена на универсальную развертку особенности локальной динамики при помощи отображения максимального ранга. Для этого среда W должна быть достаточно поляризована. В других случаях универсальная модель известна только для градиентных динамик. Вообще, хорошо определенные локальные модели, дающие обыкновенные катастрофы, получаются только в случае *градиентных динамик при условии, что среда W предварительно поляризована*. В других случаях (если динамики рекуррентны или среда недостаточно поляризована) можно получить существенные катастрофические точки, приводящие к обобщенным катастрофам (ср. гл.6).

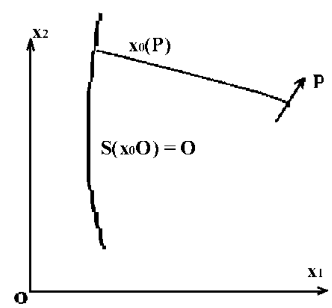

Рис. 4-1.

4.6. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ

А. Микроканоническая энтропия

Дано

1. Конфигурационное пространство с локальными координатами q_i, которое является дифференцируемым многообразием V размерности n.

2. Фазовое пространство с локальными координатами q_i, p_i, которое является расслоенным пространством $T^*(V)$ ковекторов V.

3. Не зависящий от времени гамильтониан, который является действительной функцией $H: T^*(V) \Rightarrow \mathbf{R}$.

Если обозначить через каноническую 2-форму $T^*(V)$, локально определяемую как $\alpha = \Sigma_i dp_i dq_i$, то поле эволюции X задается в $T^*(V)$ уравнением Гамильтона $i(X).\alpha = dH$, где i обозначает внутреннее произведение. Известно, что поле X допускает H как первый интеграл (единственный, если V компактно) и сохраняет инвариантной 2-форму α. n-ая внешняя степень α задает на X инвариантную меру Лиувилля α^n. Обозначим через $m(x)$ общий объем Лиувилля точек p из $T^*(V)$, таких что $H(p)$ x. Тогда производная $a(x)=dm/dx$ дает $2m$-1-объем гиперповерхности энергии $H=x$. *Микроканонической энтропией* системы называют функцию $S(x)=\mathrm{Log}\ a(x)$. Можно определить «формальную температуру T» как $1/T=dS/dx$. Эта величина геометрически выглядит как средняя кривизна гиперповерхности энергии.

Введение логарифма Log $a(x)$ может быть мотивировано следующим образом.

Рассмотрим две консервативные гамильтоновы системы S_1, S_2 с конфигурационными пространствами V_1 , V_2 и гамильтонианами H_1, H_2. Предположим, что мы связываем эти системы «термодинамически», т.е. почти в каждый момент объединенная система развивается так, как будто системы S_1 и S_2 не взаимодействуют, но в отдельные очень короткие промежутки времени обмениваются энергией в ходе катастрофических и случайных процессов, в результате которых система находится на гиперповерхности энергии, пропорциональной мере Лиувилля (*эргодическая* гипотеза). Таким образом гиперповерхность общей энергии c, из уравнения $H_1(x_1)+H_2(x_2)=c$ имеет объем (Лиувилля) A, который может быть вычислен по формуле

$$A(c)=\int a_1(c-t)\,a_2(t)dt$$

Наиболее вероятное значение параметра t это то, для которого объем произведения гиперповерхностей H_1 = c-t, H_2 = t является максимальным. Это ведет к соотношению $da_1/a_1dt=da_2/a_2dt$ которое означает, что две системы S_1, S_2 имеют одинаковую формальную температуру $T_1 = T_2$ или же $dS_1/dH=dS_2/dH$.

Б. Взаимодействие двух систем

Если имеется две системы S , S_2 с общей энергией c, в состоянии термодинамической связи, режим равновесия определяется поиском значения параметра t, при котором суммарная энтропия $S_1(c - t) + S_2(t)$ является максимальной. Если имеется только один, причем достаточно выраженный максимум, объединенная система развивается в направлении этого состояния и остается в нем, не считая неизбежных флуктуаций. Напротив, если существует несколько различных максимумов или если максимумы достаточно плоские, об эволюции системы ничего нельзя сказать априори: система может занять один из этих максимумов или напротив флуктуировать, не достигая определенного предела.

Важность термодинамической связи проистекает из того факта, что если привести в пространственный контакт две динамические системы, управляющие двумя смежными открытыми множествами U_1 и U_2, то можно допустить (не делая предположений о природе взаимодействия), что эти две системы находятся в состоянии термодинамической связи. Если две системы имеют в качестве функций $S(H)$ пересекающиеся вогнутые кривые (как в рассматриваемом случае), сложение одной такой кривой и кривой, получаемой из первой посредством симметрии $t \Rightarrow c-t$, дает кривую с единственным выраженным максимумом (рис. 4-2). В этом случае две системы имеют единственный режим равновесия. Но возможны и другие случаи, когда имеются две динамические системы, очень непохожие на обычные термодинамические системы, состоящие из большого числа элементов.

Рассмотрим несколько таких случаев. Предположим, что каждая из кривых $S(H)$ имеет выраженный максимум при некотором значении a. Тогда суммарная кривая энтропий $S_1(t)+S_2(c-t)$ при c, отличном от $2a$, имеет два различных максимума (в окрестностях $t=a$ и $t=c-a$). В подобном случае можно столкнуться со следующей ситуацией: на каждом открытом множестве U_1, U^2 каждая из систем S_1, S_2 приближенно сохранит свой собственный режим. На общей границе двух открытых множеств два режима будут разделены поверхностью ударного фронта или узкой зоной связи флуктуативного характера, вихреобразной или турбулентной. Две системы практически не смогут быть связаны и будут развиваться каждая самостоятельно (рис. 4-3)

В. Приближение к состоянию равновесия при термодинамическом взаимодействии

Вернемся к ситуации, когда имеются две классические гамильтоновы системы, связанные термодинамическим способом. Если обозначить через A_1, A_2 объемы гиперповерхностей соответствующих энергий $H_1 = E_1$, $H_2 = E_2$, будет ясно, что энтропии S_1, S_2 двух систем задаются как S_1=Log A_1, S_2 = Log A_2, а температуры как $T_1^{-1}=dS_1/d\,E_1$, $T_2^{-1}=dS_2/dE_2$, где T_1 и T_1 – скалярные функции, задаваемые на осях энергии, и T_i имеет размерность энергии. Более того, если H_i (i=1,2) зависит от внешних параметров (например, от точки пространства G_i) и если есть другие первые интегралы, кроме энергии, которые также складываются векторно, задавая, к примеру, пространство P_i, то на произведении $G_i\ P_i$ можно определить функцию T_i. Если равновесие получено для максимума энтропии на гиперпространстве $H_1 + H_2=E$, то в общем случае о приближении к состоянию равновесия ничего неизвестно.Поскольку положение равновесия (предположительно единственное), задаваемое через $T_1(E_1)= T_2(E- E_1)$, разумно предположить, что эволюция энергии E_1 первой системы определяется как $dE_1/dt=k(T_2 - T_1)$, где k– безразмерный коэффициент. Это значит, что в пространстве E_1GP направление приближения к состоянию равновесия задается градиентом энтропии.

Г. Поляризованные динамики

Предположим теперь, что на U_1, к примеру, имеется поле *поляризованных динамик*. Под этим имеется в виду что каждой точке x из U_1 соответствует локальная динамика, характеризуемая локальной функцией $s(h,x)$ (далее мы обсудим условия, диктуемые этому полю функций для реализации локального термодинамического равновесия). Предположим, что на U_2 мы сталкиваемся с динамикой, характеризуемой функцией $S_2(H)$ с очень размытым максимумом (в виде плато). Если каждая из функций $s(h,x)$ обладает выраженным максимумом m по h, зависящим от x, то говорят, что на $U1$ имеется поле поляризованных локальных динамик. Локальная связь между S_1 и S_2 приводит для суммарной энтропии к функции с выраженным максимумом m', лежащим в окрестности m (рис. 4-4) и, следовательно, зависящим от точки x, заданной в U_2.

Это означает, что поляризация поля динамик S_1 растворяется в открытом множестве U_2. Происходит *пространственное расширение поляризации*. Если динамика S_2 имеет только один выраженный максимум, то режим S_2 не может адоптировать режим S_1, и расширения поляризации не происходит. Это дает модель для объяснения явления памяти ткани в эмбриологии. В модели этого рода потеря памяти при старении ткани интерпретируется следующим образом. Первоначально плоский максимум функции $S(H)$ постепенно становится все более и более выраженным. В дальнейшем мы увидим, как можно интерпретировать это явление.

Д. Псевдогруппы локальных эквивалентностей поля

Наша теория поля локальных динамик отличается от классической термодинамики в одном важном пункте. В обычной термодинамике рассматривается дискретное множество *A взаимодействующих* динамических систем , на котором не задается никакой топологии (отличной от дискретной). В рассматриваемой здесь теории динамических систем в качестве множества A берется обычное топологическое пространство U (чаще всего, область пространства-времени $\mathbf{R}^4$). Взаимодействие между системами E_x заметно только если точки x из U рассматриваются вместе с соседними. Кроме того, существует псевдогруппа преобразований G, действующая одновременно в U и в общем конфигурационном пространстве системы и оставляющая инвариантной общую динамику системы. Если псевдогруппа G действует в U транзитивно, мы имеем дело с *однородным* полем на U. В противном случае мы имеем дело с *поляризованной* динамикой. Далее мы покажем, как можно определить над каждой точкой x из U многообразие

P, параметризованное первыми приближенными интегралами динамики-слоя. Получается приведенное поле, определяемое сечением расслоения над U по слою P. При этом уравнение эволюции поля, определяемое условием локального максимума энтропии, будет инвариантным относительно псевдогруппы G.

4.7. ПРИВЕДЕННОЕ ПОЛЕ

А. Определение приведенного поля

На открытой области W из $\mathbf{R}^n$ зададим метаболическое поле. Возьмем в качестве пространства внутренних состояний многообразие F, а в качестве динамики-слоя – гамильтонову динамику $H(F)$. Тогда метаболическое поле определяется как сечение $s{:}W \Rightarrow H(F)$, которое задает в F векторное поле и некоторую особую точку $s_1(x)$.

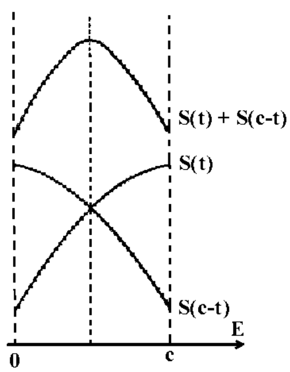

Рис. 4-2.

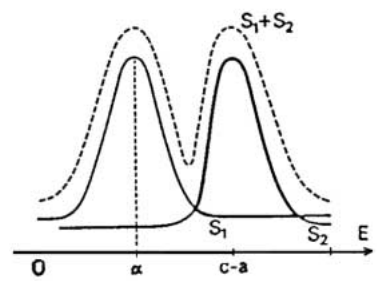

Рис. 4-3.

Пусть энергия E – первый интеграл поля $H(F)(x)$. *Приведенным полем* метаболического поля (s, $s1$) называют статическое поле, заданное функцией $g{:}W \Rightarrow E(s_1)$: внутренняя тонкая структура динамики-слоя $H(F)$ полностью игнорируется и сохраненяется только значения энергии в выделенной точке $s_1(x)$. Более общим образом, если динамика-слой $H(F)$ имеет систему *глобальных первых интегралов*, задаваемую дифференцируемым расслоением $p{:}F \Rightarrow P$, то приведенное поле поля (s, s_1) есть снова статическое поле, задаваемое функцией $g(x)=p(s_1(x))$, где $p(s_1(x))$ обозначает множество значений первых интегралов динамики $s(x)$ в точке $s_1(x)$. Заметим, что статические поля относятся к тривиальному типу. Слой $L(U,V)$ сводится к V, а многообразие U – к точке.

Б. Взаимодействие поля с собой. Эволюция приведенного поля

Пусть на базовом пространстве W имеются локальные гамильтоновы динамики, допускающие в качестве первых интегралов расслоение $p{:}F \Rightarrow P$. Пусть в открытом множестве U из W локальная динамика имеет странный аттрактор $c(x)$. Этот аттрактор как правило содержится в некотором слое расслоения $F \Rightarrow P$. Очень часто в слое содержится целый континуум аттракторов типа $c(x)$, причем этот континуум является симплектическим, и для него можно определить меру Лиувилля A, а затем и энтропию относительно c по формуле $S=\mathrm{Log}A$. С помощью S можно определить также температуру T как $1/T=dS/dE$.

Теперь допустим, что с аттрактором c связана псевдогруппа локальных динамических эквивалентностей *G*. *G* действует одновременно в *W* как подгруппа перемещений, и в континууме аттракторов *c* слоя *F*. Если *G* транзитивна в открытом множестве *U* из *W*, и транзитивна ее подгруппа изотропии (подгруппа *G* , оставляющая некоторую точку неподвижной), то соответствующая динамика однородна и изотропна в *U*. Допустим (для простоты), что это именно так. Выясним, при каких условиях достигается локальное равновесие. Для локальной системы над диском *D* из *U* должно соблюдаться равновесие обмена энергией с остальной частью системы, предполагаемой неизменной (термостат). Из принятой выше гипотезы (см. 4.6.B), согласно которой изменение энергии пропорционально разности температур, сразу следует, что $dE=0$, если и только если интеграл $\int_D(T-T_0)$ равен нулю на D (T_0 обозначает температуру в центре D). В состоянии равновесия температура является гармонической функцией $\Delta T=0$. Если равновесия нет, то уравнение эволюции будет иметь вид $dE/dt=k\Delta T(E)$. Поскольку локальная динамика совпадает с динамикой линейного осциллятора, *T* и *E* можно отождествить (с точностью до скалярного множителя) и получить уравнение теплоты. В случае квантового поля , когда энергия *E* может рассматриваться как комплексная, возникает уравнение Шредингера (ср. прим.[2]).

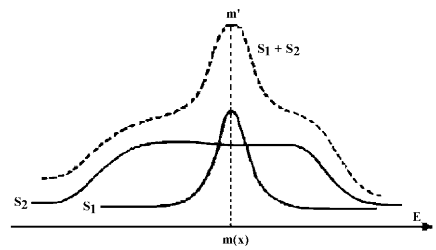

Рис. 4-4.

Вполне возможно, что для некоторых естественных процессов, приближение к равновесию осуществляется через суперпозицию двух способов: обратимой составляющей типа гамильтониана и необратимой составляющей градиентного типа.

Следует заметить, что применимость уравнений эволюции вида $dE/dt=\Delta T$ зависит от возможности определить локальную температуру, связанную с хорошо определенным аттрактором *c* локальной динамики. Когда этот аттрактор перестает быть определенным и захватывается другими аттракторами, в *W* возникают катастрофы с морфогенетическим эффектом и уравнение эволюции теряет смысл.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Напомним, что полуаналитическим называется множество, определенное конечным числом аналитических уравнений и неравенств, или же конечное объединение таких множеств. Известно (Лоясевич, (Lojasiewicz)), что эти множества триангулируемы на аналитически погружаемые симплексы. Тот факт, что сечения полуаналитических множеств концентрическими сферами достаточно малого радиуса оказываются гомеоморфными, может быть установлен с помощью теоремы об изотопии трансверсальных сечений стратифицированных множеств (см. ссылки [2] и [7] к гл.III)

[2]. Квантовые поля. В качестве дополнения отметим, что происходит при связи двух квантовых систем. Квантовая система это гамильтонова система, имеющая четное число первых интегралов на многообразии *P*, снабженном симплектической структурой. В частности, энергия *E* является комплексной, и аргумент *E* является фазой системы, а модуль $|E|$ – скалярной энергией. Каждой точке из *P* соответствует фазовое многообразие, объем Лиувилля *A* которой позволяет определить энтропию $S=\mathrm{Log}A$. При связи двух систем этого типа роль динамики-произведения играют первые интегралы, определенные многообразием *P*. Кроме того имеется отображение $P_1\ P_2 \Rightarrow P$, которое задает глобальные первые интегралы объединенной системы. В частности, комплексные значения энергии E_1 и E_2 складываются. В отличие от предыдущего случая предполагается, что катастрофы, при которых системы взаимодействуют, обратимы во времени. Это становится понятным,

например, когда рассматриваемые катастрофы порождаются однопараметрическими подгруппами общего фазового пространства, сохраняющими глобальную симплектическую структуру пространства. В этом случае объем *A(p)* слоя над точкой (p_1, p_2) не изменяется при взаимодействии; энтропия *S* остается постоянной, и в ядре отображения $P_1 P_2 \Rightarrow P$, не происходит приближения к равновесию. В этом случае поле эволюции само будет гамильтоновым, задаваемым (по направлению) как dp/dt=i.grad *S* (где i.grad обозначает симплектический градиент). Объединенная система будет вращается вокруг этого положения равновесия, никогда его не достигая.