

ГЛАВА 5

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ КАТАСТРОФЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ \mathbb{R}^4 , СВЯЗАННЫЕ С КОНФЛИКТАМИ РЕЖИМА

*Εἰδέναι δὲ χρῆ τὸν πόλεμον εὐντα ζῆνον,
καὶ δίκην εἶναι, καὶ γινόμενα πάντα κατ' εἶριν
καὶ χρεῶν.*

*Следует знать, что конфликт является все-
общим, что справедливость это борьба, и что все
порождается в результате борьбы и необходимос-
ти.*

Гераклит¹

5.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ГРАДИЕНТНЫЕ ПОЛЯ И СООТВЕТСТВУЮЩАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

А. Конкуренция между локальными режимами

Пусть W – открытая область пространства-времени \mathbb{R}^4 , на которой задано поле локальных динамик (M, X) . Компактное многообразие-слой M называется пространством *внутренних состояний*. Каждой точке x из W поставим в соответствие векторное поле $X(x)$ из M , которое зависит от координаты x дифференцируемым образом. Во всей этой главе, кроме пункта 5.6, мы придерживаемся следующей гипотезы: для всякой точки x из W поле $X(x)$ – это градиентное поле на M , то есть

$$X(m, x) = -\text{grad } V(m; x),$$

где $V(m; x)$ – это *потенциал*, определенный на M и дифференцируемо зависящий от x . Градиент V берется по отношению к римановой метрике, заданной на M .

Метаболическое поле (M, X) можно заменить статическим полем, слой которого – это функциональное пространство $C(M, \mathbb{R})$, то есть пространство бесконечно дифференцируемых функций на M , а $M(m, x)$ – значение этого поля в точке x .

Пусть в некоторой точке x из W устойчивые локальные режимы задаются структурно устойчивыми аттракторами поля X , соответствующими минимумам потенциала $V(m; x)$. Вообще говоря, существует множество таких минимумов, но регулировать процесс в точке x может, очевидно, только один из них. Как выбрать этот управляющий режим среди всех теоретичес-

¹ Приведенный выше перевод этого фрагмента сделан с французского перевода, который отражает интерпретацию, принятую Р. Томом. Перевод Лебедева: *Должно знать, что война общепринята, что вражда – обычный порядок вещей и что все возникает через вражду и взаимнообразно* (Фрагменты ранних греческих философов под редакцией А.В. Лебедева. М., 1989). - *Прим ред.*

ки возможных устойчивых режимов? По этому поводу принимается весьма произвольное соглашение, в пользу которого, однако, говорит его простота.

Б. Условие Максвелла

Оно формулируется следующим образом: если в точке x из W конкурируют несколько устойчивых аттракторов c_i , то побеждает аттрактор c_j , соответствующий *минимуму потенциала*:

$$V(c_j) < V(c_i) \quad j = i$$

Аналогичное правило было использовано Максвеллом, чтобы устранить неопределенность v в уравнении состояния ван дер Ваальса $F(p,v)=0$ в случае, когда на заданном интервале p имеется три действительных решения для v , соответствующем смеси газообразной и жидкой фаз. Я не буду долго рассуждать о физической правомерности этого условия. Сразу заметим, что правомерность этого правила в количественном аспекте нас не касается. Единственно, что нам здесь интересно, это описание топологической структуры ударных волн (катастрофических точек) в окрестности особенности потенциала V , где управляющий аттрактор претерпевает бифуркацию. Для этих целей функцию $V(c)$ можно вполне заменить любой другой функцией, выражающей приближенно устойчивость аттрактора, например, объемом или диаметром бассейна аттрактора в M . С помощью такого выбора можно модифицировать структуру катастрофических точек. В более общем плане по поводу данного условия можно сделать два замечания:

1. Это условие приводит к геометрически четким ударным волнам-разделителям, тогда как в природе вследствие вязкости и диффузии переходные области имеют тенденцию расширяться и флуктуировать. Впрочем, очень часто после определенного промежутка времени возникают *переходные устойчивые режимы*, конкуренция которых порождает подморфологию (такую как дорожка вихрей фон Кармана [1] в теории струй или структурированные мембраны в биологии).

2. Это условие не учитывает явления *запаздывания*, которое практически всегда имеет место при появлении нового режима. Предположим, что точкой x из W управляет аттрактор c_1 и что в этой точке появляется новый аттрактор c_2 с очень низким потенциалом $V(c_2) < V(c_1)$. В соответствии с условием Максвелла, должен произойти немедленный скачок в новый режим c_2 . На самом деле новый режим возникает в общем случае гораздо позднее, часто в разветвленной характеристической форме обобщенной катастрофы, описываемой в главе 6.

5.2 АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ ТОЧЕЧНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ПОТЕНЦИАЛА

А. Множество катастроф

Согласно условию Максвелла, точка x из W может быть катастрофической только в двух случаях: если абсолютный минимум потенциала $V(m,x)$ достигается по крайней мере в двух различных точках c, c' (называемых *точками конфликта*), или если абсолютный минимум потенциала, достигаемый в единственной точке m_0 , перестает быть устойчивым (*точка бифуркации*). Обозначим через K множество функций V в $C(M, R)$, которые обладают одним из двух указанных свойств (то есть значение абсолютного минимума V достигается по крайней мере в двух точках из M , различных или совпадающих). Если $s: \Rightarrow WC(M, R)$ определяет данное поле $[s(x)=V(m; x)]$, то множество катастрофических точек поля это не что иное, как прообраз $s^{-1}(K)$. Всюду плотная часть множества K образуется из страт $C(M, R)$ конечной коразмерности. Если принять естественную гипотезу, что поле s трансверсально множеству K , то в прообразе $s^{-1}(K)$ останутся только страты размерности ниже четырех, и при этом каждая страта будет по-

рождать особый тип локальной катастрофы в W . Оставив на время точки конфликта, рассмотрим точки бифуркации.

Б. Страты бифуркации

1. Алгебраическая лемма — **Определение.** Пусть V — действительная дифференцируемая функция n переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Говорят, что начало координат O ($x=0$) является *строго изолированной особой точкой* функции V , если в алгебре ростков функций C в O идеал J , порожденный частными производными V_{x_i} , содержит некоторую стелерь максимального идеала, определяющего O . Иначе говоря, любой одночлен M достаточно высокой степени по x выражается линейной комбинацией V_{x_i} с коэффициентами g_i из C :

$$M = \sum g_i V_{x_i}$$

Докажем теперь следующую лемму: если O — особая точка функции V , не являющаяся строго изолированной, то струя бесконечного порядка в O из V принадлежит протомножеству A бесконечной коразмерности в пространстве $J(n, 1)$ струй функций. Действительно, признавая, что O — не строго изолированная особая точка, мы должны признать (по крайней мере в формальном смысле), что через O проходит кривая особых точек. В $J^1(n, 1)$ имеется множество A_1 , задаваемое уравнением $V_{x_i} = 0$. Если утверждать, что производная $j^{-1}V$ пересекает A_1 в O не трансверсально, то в $J^2(n, 1)$ получается условие:

$$\text{Гессиан } V = \text{Det } |V_{x_i x_j}| = 0$$

что задает множество A_2 , проектируемое на A_1 . В общем случае по индукции зададим множества $A_k \subset J^k(n, 1)$, предполагая, что $j^{k-1}V(O)$ не трансверсально A_{k-1} и что коразмерность A_k больше коразмерности A_{k-1} . Последовательность множеств

$$A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow \dots \leftarrow A_{k-1} \leftarrow A_k \leftarrow \dots$$

задает протомножество A леммы.

Следствие. Любое дифференцируемое семейство функций $V(x)$ с m параметрами может быть сколь угодно точно в C^s -топологии аппроксимировано m -параметрическим семейством функций, все особые точки которых *строго изолированы*.

В. Изучение изолированных особых точек. Коранг

Определения. Возьмем многообразие M размерности n и предположим, что $O(x_1, x_2, \dots, x_n = 0)$ это особая точка функции V . Разложение Тейлора функции V в O начинается квадратичной формой $Q(x)$ ранга $n-k$. Целое число k называется *корангом* особой точки O .

Коранг также можно определить внутренним образом: пусть T локальное расщепление (feuilletage) в O коразмерности s , задаваемое s координатными функциями u_1, u_2, \dots, u_s . Будем говорить, что расщепление T *приспособлено к особенности* O из V , если ограничение V на лист $T(O)$, который содержит O , представляет в O критическую квадратичную невырожденную точку. Коранг O является ничем иным, как *минимальной коразмерностью приспособленного расщепления*.

Пусть $(u_1, u_2, \dots, u_s; y_1, y_2, \dots, y_{n-s})$ — приспособленная к расщеплению T система координат. Особая точка O задается на листе $T(O)$ при помощи системы уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial y_j} = 0 \quad j=1, 2, \dots, n-s$$

Это система максимального ранга в $T(O)$. Следовательно, при достаточно малом u она будет иметь максимальный ранг на всем листе $T(u)$. Она задает для ограничения V на $T(u)$ единственную квадратичную и невырожденную точку $c(u)$. Эта точка $c(u)$ дифференцируемо зависит от переменных и $c(O) = 0$.

Согласно классической теореме Марстона Морса [2], на листе $T(u)$ существует система

координат $Y_j, j = 1, 2, \dots, n-s$ такая, что в этой системе функция V представима в виде:

$$V = V_1(u) + \sum_{j=1}^{n-s} Y_j^2 \quad \text{Уравнение (M)}$$

где $V_1(u) = V(c(u))$ – значение функции V в точке $c(u)$.

Я утверждаю, что функция $V_1(u)$ имеет в начале координат $u=0$ критическую точку ($dV_1=0$ для $u=0$) нулевого ранга. Разложение Тейлора функции $V_1(u)$ начинается членом степени не меньшей, чем три. Если в действительности ранг этой особой точки строго положительный, в плоскости $Y=0$ можно выделить направление (например, ось u), вдоль которого V (или V_1) будет бесконечно малой строго второго порядка $V=O(u^2)$. Размерность приспособленного расщепления можно увеличить: расщепление, задаваемое при помощи (u, u_1, \dots, u_k) будет также приспособленным.

Из этого построения следует, что для утверждения о том, что критическая точка O функции V n переменных имеет коранг k , где k не меньше n , достаточно в квадратичной части разложения Тейлора принять за нуль коэффициенты квадратичной формы с k переменными u_1, u_2, \dots, u_k . Это влечет за собой $k(k+1)/2$ независимых условий.

Утверждение. В пространстве $J^2(n, 1)$ струй функций второго порядка струй особых точек коранга k образуют подмногообразие коразмерности $k(k+1)/2$ в пространстве особых струй первого порядка.

Следствие. Для семейств функций, зависящих от более чем четырех параметров (как взятое нами вначале поле s), устойчивым образом можно получить только критические точки коранга, не большего двух. Действительно, точки коранга три имеют коразмерность $3 \cdot 2 = 6$.

Г. Остаточная особенность

Теперь докажем важное свойство: особенность функции $V_1(u)$, называемая *остаточной особенностью* особенности в O является независимой от приспособленного расщепления T , выбираемого так, как будет уточнено ниже. Действительно, предположим, что мы заменяем расщепление T , заданное функциями u_1, u_2, \dots, u_s , другим приспособленным расщеплением T' , задаваемым координатными функциями v_1, v_2, \dots, v_s (которые в свою очередь являются функциями u и Y). Множество критических точек $c'(v)$ ограничения V на листы $T'(v)$ из T' задается системой

$$\left(\frac{\delta V}{\delta Y_i}\right)_{v=\text{const}} = \left(\frac{\delta V}{\delta Y_i}\right)_{u=\text{const}} + \sum_j \frac{\delta V}{\delta v_j} \cdot \frac{\delta v_j}{\delta Y_i} = 0$$

или при подстановке (M)

$$Y_i = \frac{1}{2} \sum_j \frac{\delta V}{\delta v_j} \cdot \frac{\delta v_j}{\delta Y_i}$$

Новая остаточная особенность задается функцией

$$V_2(v) = V[c'(v)].$$

Поскольку множество критических точек $c'(v)$ образует s -многообразие, которое может быть равным образом параметризовано при помощи u , функция V_2 может быть представлена в виде

$$V_2(u) = V_1(u) + \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\delta V}{\delta v_i} \cdot \frac{\delta v_i}{\delta Y_i} \right)^2$$

Имеется следующее свойство (выводимое из результата Ж.К.Тужрона [3]): если V – 2-гладкая функция в начале координат O , то любая функция вида $V+g$, где g принадлежит квадрату J^2 идеала J , порожденного частными производными V/x_i эквивалентна V , то есть существует замена локальных координат $h: \Rightarrow x \rightarrow x$, такая что $V_Q h = V+g$. Таким образом, остаточная

особенность $V(u)$ с точностью до дифференцируемой эквивалентности не зависит от выбора приспособленного расщепления T .

Этот факт имеет важные последствия. Бифуркация критической точки коранга k зависит только от k и от типа остаточной остаточной особенности, но не от размерности $n-k$ пространства, на котором задана функция. Поэтому всегда можно предполагать, что базовое пространство имеет размерность k , а изучаемая критическая точка имеет нулевой ранг. Это алгебраическое свойство является фундаментальным для нашей модели, поскольку оно показывает, что можно идентифицировать тип катастрофы и ее динамический источник без явного знания всех внутренних параметров, от которых зависит система.

Теперь мы опишем особенности коразмерности, меньшей четырех. Мы рассмотрим страты конфликта и страты бифуркации. Кроме этого мы упомянем страты, трансверсальные стратам разьединенных особенностей, не представляющие никакой морфологической новизны. Напротив, при рассмотрении расщепления пространства-времени гиперплоскостями $t = \text{const}$ интересно описать локальную эволюцию некоторых особенностей как функцию времени. При этом будут получены так называемые *переходные страты*.

5.3. КАТАСТРОФЫ КОРАНГА 1

В соответствии с теорией, изложенной в параграфе 5.2., можно предположить, что многообразие M внутренних состояний имеет размерность один и обозначить через x координату на M .

А. Страты коразмерности нуль

Рассмотрим функции, абсолютный минимум которых оказывается образующего типа, то есть локально задается квадратичным минимумом $V=x^2$. Соответствующие точки в W являются регулярными точками процесса.

Б. Страты коразмерности один

Они могут быть двух типов:

1. Вы можете столкнуться со стратой *U типа складки*. Глядя со стороны U вы имеете дело с двумя режимами, один из которых стабилен (c_1), а другой нестабилен (c_2 ; минимум V и критическая точка индекса один из V только что взаимно уничтожились при столкновении на U), при том что другие критические точки остаются неизменными (рис 5-1). Если строго следовать условию Максвелла, то одна такая страта не может иметь какого бы то ни было морфогенетического эффекта. Действительно, новый аттрактор c_1 таков, что $V(c_1)$ превосходит абсолютный минимум $V(c)$. В принципе не существует ударного фронта типа складки. Если допускается возможность запаздывания, то аттрактор с энергией, превосходящей минимальный потенциал режима, (в этом случае можно говорить о метастабильном режиме), может быть разрушен складкой вида $s^{-1}(U)$. Зона, соответствующая W , может войти в метастабильный режим низкого потенциала, или базовый режим, в соответствии с топологическим расположением бассейнов аттракторов (рис 5-2).

2. Страты конфликта. Это множество функций V , которые обладают двумя абсолютными минимумами, равных значений c_1 и c_2 . Со стороны страты Z имеем $V(c_1) < V(c_2)$, с другой стороны $V(c_1) > V(c_2)$. Прообраз $s^{-1}(Z)$ порождает ударный фронт, разделяющий районы режимов c_1 и c_2 .

В. Страты коразмерности 2

Имеется четыре типа таких страт.

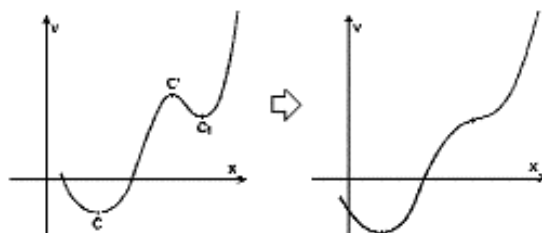


Рис. 5.1.

Рис. 5.2.

1. Трансверсальное пересечение двух страт-складок. Эти страты не представляют морфогенетического интереса, как и страты-складки.

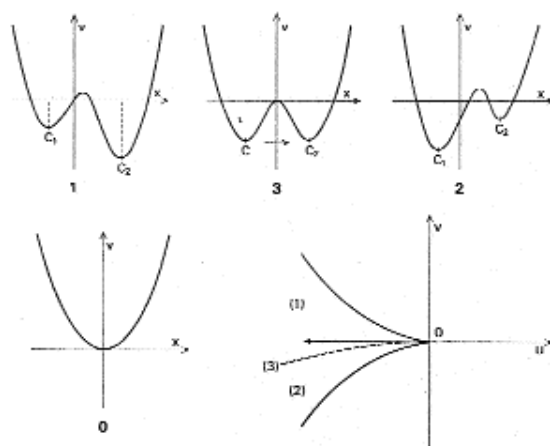
2. Страты точек-остриев. Катастрофа Риманна-Пюгонио. Эти страты очень важны для морфогенеза, поскольку они порождают самую простую катастрофу – катастрофу Риманна-Пюгонио.

Пусть c – критическая точка потенциала V , связанного с точкой O такой страты U . Если через u, v обозначить локальные координаты в L , трансверсальные к U , то потенциал V локально записывается следующим образом (при предположении, что $V(c)=0$):

$$V = \frac{x^4}{4} + u \frac{x^2}{2} + vx$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x^3 + ux + v$$

Рис. 5-3 и 5-4. Элементарные графики (1, 2, 3, 0) представляют локальные потенциалы, соответствующие положениям в универсальной развертке, обозначенным цифрами 1, 2, 3, 0.



(См. 3.2.в, где описана эта особенность). На плоскости u, v , трансверсальной U , полуку-

бическая парабола $4u^3 + 27v^2 = 0$ задает страты-складки коразмерности один из K , проходящие через U . Таким образом страта U возникает как ребро возврата гиперповерхности бифуркации K . С внешней стороны полукубической параболы имеется только один минимум и, таким образом, один возможный режим. Внутри имеется два минимума, соответствующие конкурирующим режимам. Сразу видно, что внутри параболы невозможно выбрать непрерывный режим. Страта конфликта вырождается в *острие* и разделяет области, управляемые каждым из минимумов c_1, c_2 . По условию Максвелла страта конфликта задается уравнением $V(c_1) = V(c_2)$. Она имеет коразмерность один и имеет U_1 в качестве свободной границы. Сечение s дает $s^{-1}(U)$ в качестве свободного края ударного фронта, разделяющего два режима, возникающие при непрерывном дифференцировании одного и того же режима (см. рис. 5-3 и 5-4). Это явление хорошо известно в газовой динамике как образование ударной волны в цилиндре перед поршнем, движущемся с ускорением, которое было изучено Югонио. Теоретическая возможность этого явления была предсказана еще Риманом (см. [4] и [5]), однако топологическая особенность, лежащая в основе этой катастрофы (*острие* Уитни или *точка сборки* отображения плоскости на плоскость) получила объяснение только спустя сто лет в работах Уитни [6]. В классической оптике эта особенность порождает каустики, которые являются структурно устойчивыми (фото II, III, IV). В геологии эта особенность приводит к *провалам* (см. Фото V).

3. Страты конфликта. Если конкурируют три режима c_1, c_2, c_3 , то множество (несовпадающих и невырожденных) точек, в которых потенциал V имеет один и тот же абсолютный минимум, локально формирует страту коразмерности два. Эта страта имеет вид тройного ребра, имеющего общую границу с тремя стратами конфликта коразмерности один:

$$V(c_1) = V(c_2) < V(c_3); V(c_2) = V(c_3) < V(c_1); V(c_3) = V(c_1) < V(c_2).$$

Прообраз этой страты по s определяет тройное ребро, имеющее общую границу с тремя стратами конфликта (рис. 5-5).

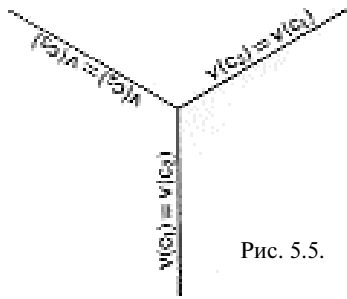


Рис. 5.5.

Эта особенность известна в газовой динамике (она появляется в *отражении Маха*). В случае проблемы Плато ее можно также реализовать с помощью мыльной воды. В биологии эта особенность была тщательно описана Д'Арси Томпсоном [8] в связи с клеточными мембранами.

4. Трансверсальное пересечение складки и страты конфликта. Существует четыре таких режима, из которых три являются устойчивыми.

Г. Страты коразмерности три

Для простоты мы выделим только принципиально новые ситуации, не останавливаясь на описании страт, которые представляют собой трансверсальные пересечения страт, относящихся к совершенно разным режимам.

1. Ласточкин хвост. Эта ситуация возникает при наличии особенности отображения $\mathbf{R}^3 \Rightarrow \mathbf{R}^3$ (или его разрыва) и обозначается $(S)_3^3$. Если $\dim M = 1$ (координата x) и если u, v, w – координаты, трансверсальные страте U , то уравнения локальной модели будут

$$V = \frac{x^5}{5} + \frac{ux^3}{3} + \frac{vx^2}{2} + wx$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x^4 + ux^2 + vx + w = 0 \quad (Q)$$

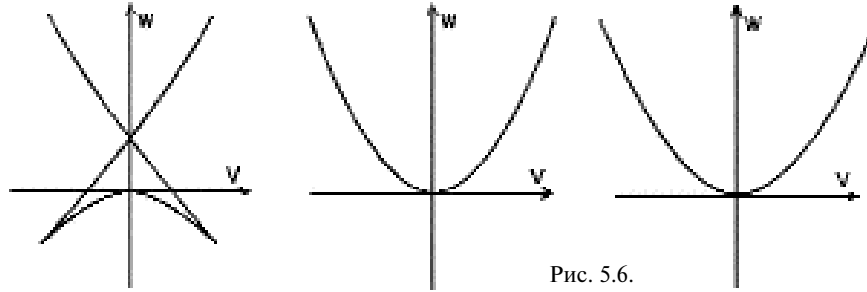


Рис. 5.6.

В пространстве \mathbf{R}^3 с координатами u, v, w дискриминант уравнения (Q) определяет некоторую поверхность K . Чтобы описать форму этой поверхности рассечем ее плоскостями $u = \text{const}$. Найдем множество точек \mathbf{R}^3 в которых уравнение четвертого порядка (Q) имеет по x тройной корень. Мы имеем

$$O = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 4x^3 + 2ux + v$$

$$O = \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} = 12x^2 + 2u$$

откуда получается параметрическое представление кривой C :

$$u = -6x^2; \quad v = 8x^3; \quad w = -3x^4.$$

Эта кривая C представляет собой ни что иное как *ребро возврата* поверхности K ; сама C имеет возврат в начале координат. При отрицательных u сечение K плоскостью $u = -a^2$ имеет два возврата, симметричных относительно оси v ; поскольку это сечение содержит семейство прямых с единственным параметром x без стационарной прямой, кривая этого сечения не имеет точек перегиба. Поэтому эта кривая может иметь только вид ласточкиного хвоста (рис. 5-6).

При положительных u возвраты не появляются, и кривая сечения является просто выпуклой кривой. Если начать с $u = -a^2$ и двигаться в сторону возрастания u , то криволинейный треугольник, образующий ласточкин хвост, будет постепенно исчезать и при $u=0$ выродится в точку, совпадающую с началом координат. Кривая сечения в начале координат имеет бесконечную кривизну. Следует заметить, что поверхность K имеет самопересекающуюся кривую (алгебраически задаваемую соотношениями $v=0, w=u^2/4$). В алгебраической или аналитической модели эта двойная кривая полностью принадлежит поверхности K . Следовательно при положительном u кривая сечения K имеет двойную изолированную точку. Такая особенность в общем случае не имеет никакого значения для наших моделей (рис.5-7).

Теперь исследуем, могут ли возникать конфликты режима в окрестности такой особенности. Для этого необходимо, чтобы уравнение имело четыре действительных корня (в противном случае нельзя получить два минимума функции V). Таким образом, следует разместиться внутри криволинейного треугольника ласточкина хвоста при $u < 0$. Поскольку один из возвратов этого треугольника задает катастрофу Римана-Пюгонио, в этом треугольнике имеется фронт ударной волны, линия конфликта между двумя режимами, которая начинается на ребре возврата треугольника и заканчивается в двойной точке кривой сечения. Именно в этом, как нетрудно убедиться, заключается единственная топологическая возможность разделения режимов. Если проследить изменение сечений по мере уменьшения, то таким образом можно качественно описать ласточкин хвост. При $u > 0$ имеется кривая-складка, которая отделяет ус-

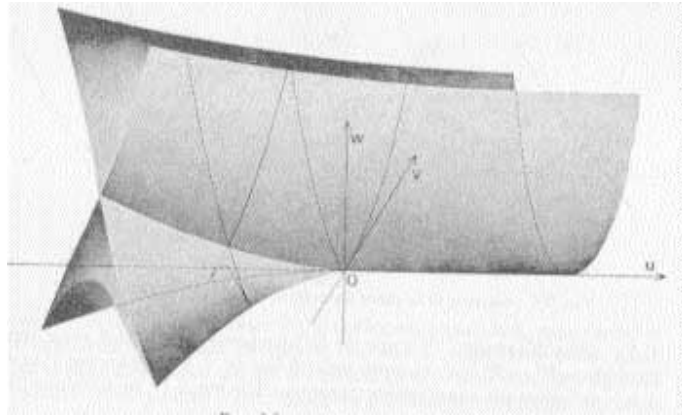


Рис. 5.7.

тойчивый режим от пустого режима (без аттракторов). При $u=0$ эта кривая имеет бесконечную кривизну, а при отрицательных u — две точки возврата, придающих криволинейному треугольнику вид ласточкина хвоста. Внутри треугольника возникает два режима, разделенных кривой, соединяющей одну из этих точек возврата с двойной точкой (рис.5-8), или, если принять условие Максвелла — с точкой складки. *Ласточкин хвост* уже давно замечен в алгебраической геометрии. Но я сомневаюсь, что даже сегодня вполне осознано его значение в качестве устойчивой особенности ударной волны. Мы находим его в физике, в теории ударных фронтов в плазме [10], а совсем недавно он был заново открыт в качестве особенности поверхностей

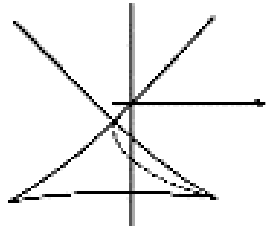


Рис. 5.8.

Ландау [9], связанных с некоторыми диаграммами Фейнмана. Ласточкин хвост также обнаруживается в классической геометрической оптике в качестве особенности каустик (фотографии с VI по IX). Что касается эмбриологии, то в 9 главе будет предложено рассматривать оконечности бластопорической борозды как ласточкины хвосты.

2. Переходные страты. Переходы на стратах-остриях.

В пространстве наших трех параметров страта Риманна-Югонио представляет собой кривую. Сечение плоскостями $w = \text{const}$ может таким образом иметь особенности, поскольку плоскость $w = \text{const}$ касательна к этой кривой. На

самом деле здесь идет речь не о новой особенности, а о вариации по одному параметру (например, по времени) секущих гиперплоскостей особенности *острие*. Имеется два типа контакта: а) *особенность губа*: два острия возникают при $t = 0$ и затем разделяются, оказываясь связанными через линию разделения двух режимов (рис 5.9); б) *особенность клюв в клюв*: два симметричных острия сходятся своими крайними точками и затем соответствующие разделители воссоединяются. (см. рис.5-9).

3. Страты конфликта. Когда конкурируют четыре режима, это задает в K страту коразмерности три. В пространстве \mathbf{R}^3 , трансверсальном этой страте, имеется четыре тройных ребра, исходящих из одной точки, и шесть поверхностей конфликта. Общая топологическая конфигурация представляет собой конус, вершина которого находится в центре правильного тетраэдра, и основание которого образовано ребрами этого тетраэдра. Сечение этой особеннос-

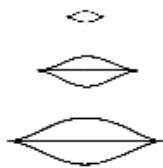
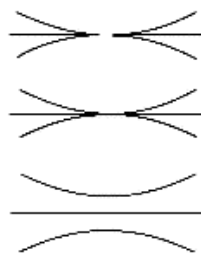


Рис. 5-9



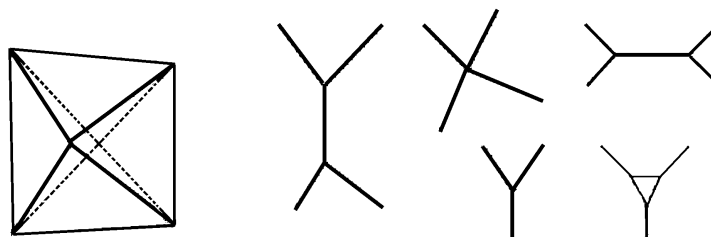
5-10.

ти плоскостью $t = \text{const}$ дает при варьировании от $-a$ до $+a$ взаимное изменение связей между четырьмя разделительными линиями (см. рис. 5-11).

(a)

(b)

Рис. 5-11. Сечение четверной точки.



Д. Страты коразмерности четыре

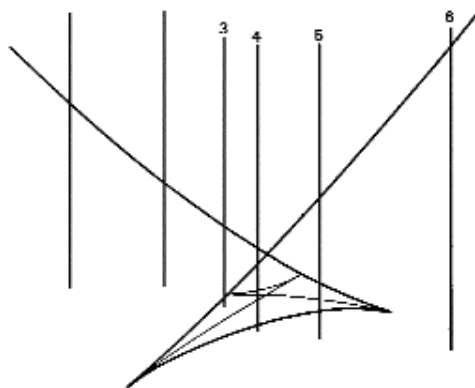
1. *Бабочка*. Речь идет об особенности отображения \mathbf{R}^4 в \mathbf{R}^4 , обозначаемой в классической терминологии $(S_1)^4$. Если обозначить через u, v, w, t координаты трансверсальные страте, то локальная модель этой особенности запишется как

$$V = \frac{y^6}{6} + \frac{ty^4}{4} + \frac{uy^3}{3} + \frac{vy^2}{2} + wy$$

$$\partial V = y^5 + ty^3 + uy^2 + vy + w = 0 \quad \text{Уравнение } (H)$$

(через u здесь обозначена координата M).

Можно достаточно легко составить представление о расположении гиперповерхности дискриминанта D уравнения (H) в пространстве-времени $\mathbf{R}^4(u, v, w, t)$. Для этого нужно параметрически представить поверхность A , на которой (H) имеет тройной корень и кривую C , на которой (H) имеет четверной корень. Чтобы не входить в детали расчетов, которые терпеливый читатель может восстановить сам, ограничусь тем, что покажу на рисунке 5-12 качественное представление D с помощью сечений гиперплоскостями $t = \text{const}$. При положительных t сечение D является поверхностью, с ребром возврата a (сечение A). Эта кривая не имеет особенностей и имеет вогнутую форму. При $t = 0$ это ребро имеет в начале координат бесконечную кривизну. При отрицательных t отсюда выходят два ребра возврата по форме весьма напоминающих ласточкин хвост, но *открытые* в третье измерение. Поверхность сечения D имеет двойную линию W с двумя неподвижными точками на возвра-



тах C и два возврата в точках, где ребро возврата A пересекается с одним из слоев, связанных с другой ветвью C . Плоскость симметрии $v = w = 0$ пересекает поверхность D по кривой, имеющей три ребра и не имеющей возвратов (рис.5-12-4). Это кривая формы бабочки имеет три точки самопересечения, где плоскость встречается с двойной кривой W .

- А) Бабочка и замечательные сечения
- б) Изометрическая проекция бабочки.

Какие конфликты режима могут быть связаны с этой особенностью? Во внутреннем криволинейном четырехугольнике, образованном кривой-бабочкой, уравнение H имеет пять действительных корней. Следовательно, существует возможность конфликта между тремя режимами (минимумами функции I).

Единственная возможная конфигурация разделения между этими тремя режимами представлена на рис. 5-12-4. Из тройной точки исходит три разделительные линии (сепаратриссы), заканчивающиеся соответственно на двух возвратах (Риман-Пюгонии) и в двойной точке. Каче-

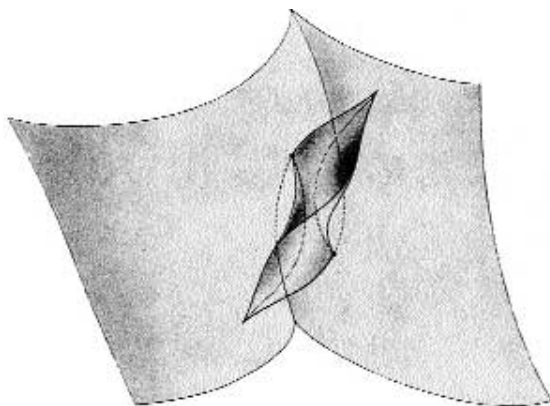


Рис. 5-12.

ственно вариация может описываться так: при положительных t имеется поверхность ударного фронта волны, краем которого служит кривая Римана-Пюгонии. При $t < 0$ край ударной волны отслаивается, порождая маленькое тройное ребро (рис. 5-13-1).

Эта особенность хотя и структурно устойчива, но неудобна для непосредственного наблюдения из-за ее переходного характера. Более нагляден результат пересечения этой особенности с некоторой областью пространства \mathbf{R}^3 . На свободном крае, как мы видели, проис-

ходит отслоение или *вздутие* ударной волны. Очень часто край ударной волны продолжает свое движение вверх, несмотря на соединение двух крайних точек тройной линии. В конце концов получается пузырь, альвеола, присоединенная к вертикальной стенке (рис. 5-13-2). В биологии имеются многочисленные примеры структур этого типа, например, узлы венозных стенок. В семантической интерпретации элементарных катастроф, которую мы предложим в 13 главе, бабочка выступает в роли организующего центра для *кармана*.

Склеивая две отслоившиеся поверхности симметрично вдоль их краев, мы получаем полностью закрытый пузырь. Такая конфигурация соответствует особенности потенциала коразмерности пять. Хотя образование пузырей на ударном фронте волны, разделяющем два режима, определяется неустойчивой особенностью потенциала, оно часто наблюдается. Затем закрытый пузырь развивается в открытый, в альвеолу – явление, символизирующее захват промежуточного режима пузыря одним из пограничных режимов, а именно тем, к которому обращена открытая часть. Помимо всем известных прыщей, лопающихся на нашей коже, в качестве иллюстрации этого процесса можно привести маленькие песчаные пузыри, возникающие на пляже во время отлива (фотография X).

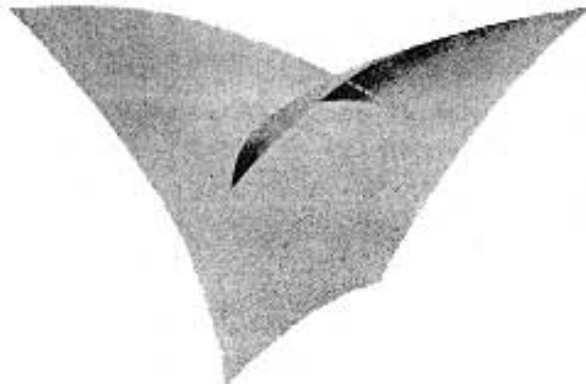


Рис.5-13-1 Отслоение ударной волны.

5.4. Элементарные катастрофы коранга два

А. Омбилические точки

Особенности потенциала $V:M \Rightarrow \mathbf{R}$, описанные выше, являются особенностями коранга один. Если многообразие M имеет размерность n , потенциал V в некоторой особой точке O имеет второй дифференциал, который представляет собой квадратичную форму ранга $n-1$. Может случиться, что этот ранг снизится до $n-2$ структурно устойчивым образом. В действительности, утверждение о том, что квадратичная форма с n переменными зависит только от $n-2$ переменных, требует обращения в нуль трех коэффициентов (например, коэффициентов a, b, c , квадратичной формы с двумя переменными $ax^2+2bxy+cy^2$). Эта особенность может проявляться устойчиво в виде изолированных точек в \mathbf{R}^3 . По соображениям, которые будут изложены позднее, мы назовем эти точки омбилическими или омбиликами.

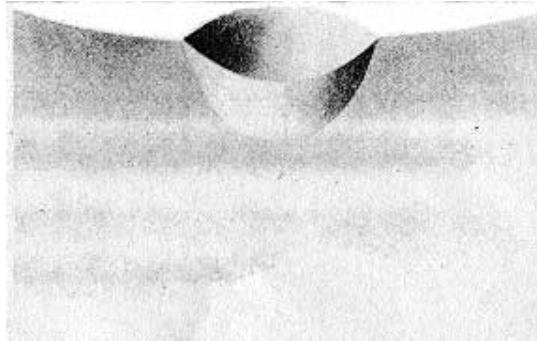


Рис. 5-13-2. Развитие отслоения в пузырь.

Б. Классификация омбилических точек

Теперь мы будем рассматривать многообразие M размерности два (локальные координаты x, y). На самом деле $n-2$ других переменных общей теории не играют никакой роли в описании особенностей. Разложение Тейлора потенциала $V(x, y)$ начинается кубической формой $Q(x, y)$. Для классификации заданных таким образом особенностей согласно теории Д. Матера [11] рассматривают идеал J , порождаемый в алгебре S формальных рядов $\mathbf{R}[x, y]$ с двумя переменными x и y частными формальными производными $\delta V/\delta x, \delta V/\delta y$. Наиболее простой случай — это когда частное S/J имеет конечную размерность равную трем. Это случается, поскольку квадратичные формы $\delta Q/\delta x, \delta Q/\delta y$ не имеют ни одного общего линейного множителя, так как произведения

$$x\delta Q/\delta x, y\delta Q/\delta x, x\delta Q/\delta y, y\delta Q/\delta y$$

порождают все векторное пространство форм степени три относительно x, y .

Факторпространство S/J является векторным, имеющим размерность два, с базой x, y и квадратичной формой $g(x, y)$. Из теории Д. Матера следует, что универсальная развертка особенности V в O задается уравнением

$$V=Q(x, y) - ux - vy + wg(x, y)$$

Поскольку мы имеем дело с потенциалом, постоянный член сюда не добавляется. Согласно теории Матера, имеется устойчивость относительно диффеоморфизмов отображения $(x, y, u, v, w) \Rightarrow (V, u, v, w)$, где эквивалентность задается в смысле диффеоморфизмов исходных пространств, проектируемых на диффеоморфизмы пространства параметров (u, v, w) .

Если квадратичная форма g имеет смешанную сигнатуру, то говорят, что перед нами *гиперболическая омбилика*. Если это форма строго положительна или строго отрицательна, то омбилика называется *эллиптической*.

Этому типу омбилик можно дать более сущностное определение. Линейная инволютивная связка $aQ+bQ=0$, очевидно, не зависит от системы координат x, y . Ее двойные лучи различны. Действительно, если $Q = Q = 0$ имеют общий линейный множитель, то этот множитель задает инвариантный луч инволюции, и наоборот. Если оба двойных луча действительные, мы имеем гиперболическую омбилику. Принимая эти двойные лучи за оси координат, мы приходим к формуле $Q=3x^2, Q = 3y^2$ откуда $Q=x^2+y^2$. Чтобы получить базу пространства квадратичных форм, можно принять $g=xy$. Отсюда следует уравнение

$$V=x^3+y^3+wxu - ux - vy \quad \text{Уравнение (H)}$$

для гиперболического омбилика и его универсальной развертки.

Поскольку двойные лучи инволюции — это сопряженные мнимые величины, можно предположить, что эти лучи изотропны, то есть что $x^2+y^2=0$. Это условие реализуется с помощью подстановки $Q = x^3 - 3xy^2, Q_x = 3(x^2-y^2), Q_y = -6xy$. При $g = x^2 + y^2$ мы получаем для эллиптической омбилики и ее универсальной развертки следующее уравнение:

$$V = x^3 - 3x^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vy \quad \text{уравнение (E)}$$

В. Морфология омбилик

Описание гиперповерхности пространства \mathbf{R}^5 пяти размерностей, задаваемой уравнениями (H) или (E) сложно для объяснения. Сначала изучается ее внешний контур V на пространстве параметров универсальной развертки u, v, w . Для этой цели с каждой областью, задава-

мой множеством бифуркации связывается топологический тип функции $V(x,y)$, соответствующий на пространстве x, y внутренним параметрам. Затем дается интерпретация явлений, возникающих при предположении что режим, связанный с аттрактором градиента V занимает всю область, которая ему предназначена.

1. *Гиперболическая омбилика: гребень волны.* Рассмотрим множество S критических точек $V(x,y)$, предполагая параметры u, v, w постоянными. Это множество S – многообразие размерности три, задаваемое уравнениями $V_x = V_y = 0$. Пусть

$$u = 3x^2 + 2wy$$

$$v = 3y^2 + 2wx$$

Проекция S на пространстве u, v, w имеет множество критических значений (множество бифуркации) B . При $w=0$ имеется отображение плоскости на плоскость, задаваемое уравнениями $u = 3x^2, v = 3y^2$. Это отображение, задаваемое «вчетверо сложенным платком» (рис. 5-14).

Кривая критических значений сводится к двум положительным полуосям Ou и Ov . Ясно, что добавление к V членов четвертого порядка приводит к отображению типа $u = 3x^2 + y^3; v = 3y^2 + x^3$. Кривая B на плоскости Ouv составлена из двух дуг, каждая из которых имеет обыкновенный возврат в начале координат (рис.5-15).

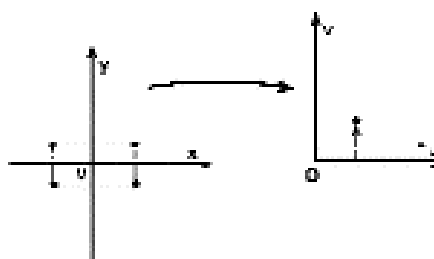


Рис.5-14. Вчетверо сложенный платок

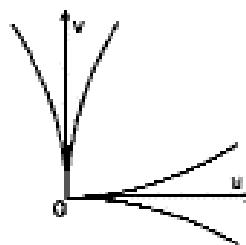


Рис.5-15 Развитие особенности 5-14.

Эта особенность может также реализовываться как особенность каустик в геометрической оптике (фотография XII). Если придать w малое ненулевое значение, двойная точка кривой S исчезнет. Мы получим критическую кривую, состоящую из двух дуг (рис. 5-16). Одна кривая выпуклая. Другая, содержащаяся внутри предыдущей, имеет обыкновенный возврат. Подобное расположение сохраняется при любом знаке, поскольку замены $x \Rightarrow -x, y \Rightarrow -y$ и $w \Rightarrow -w$ сохраняют уравнение (H). С точки зрения внутренних переменных x, y вырожденная ситуация $u = v = w = 0$ превращает кривую в тройную точку и действительную ветвь уравнения $x^3 + y^3 = 0$. Эта кривая разлагается на прямую $(x+y)=0$ и мнимую окружность $x^2 + y^2 - xy = 0$. Варьируя параметры, мы получаем три возможности:

i) Функция V не имеет ни одной критической точки, которая бы имела топологический тип линейной функции $(x+y)$

ii) Имеется две критические точки. Это минимум и точка-седло (случай ii,а) и максимум и точка-седло (случай ii,б).

iii) Имеется четыре критические точки потенциала $V(x,y)$. Например, для $V = 0$ можно получить пересечение прямой $(x+y)=0$ действительной окружностью уравнения $x^2 + y^2 - h = 0$. В таком случае имеется максимум, минимум и две седловые точки. Случай iii) соответствует внутренней области рис. 5-15 и 5-16. Возврат на рис. 5-15 соответствует внутренней фигуре r , где действительная окружность касается прямой, в результате чего три критические точки совпадают с точками касания. Случаи ii) соответствуют промежуточной области между двумя

критическими кривыми рисунка 5-16 внутри возвратов на рис. 5-15. Случай i) соответствует внешним областям рис. 5-15 и 5-16.

Рассмотрим морфогенетическое поле, связанное с гиперболической омбиликой. Поскольку в окрестности особенности возможен только один устойчивый режим (минимум потенциала $V(x,y)$), конфликта режимов в собственном смысле слова здесь нет. Тем не менее, мы имеем право допустить, что глобальная форма области устойчивого режима в пространстве универсальной развертки может быть в какой-то мере обнаружена, поскольку локальный динамический режим имеет особенность. Чтобы уточнить эту мысль предположим, что w это время, и что при отрицательных w мы имеем случай ii)a, что бассейн устойчивого режима находится целиком внутри вогнутой кривой c , и что при $w=0$ этот бассейн в O имеет угол. Тогда при положительных w мы имеем случай ii)b (поскольку чтобы получить то же уравнение, необходимо изменить знак V), при том что область устойчивого режима сводится к внутренней части контура c' (рис. 5-17a).

Если допустить, что устойчивый режим связан с жидкой фазой, предыдущее описание может быть вполне достоверно применено в случае прибоа. При отрицательных w имеется правильная волна с вогнутым дифференцируемым контуром. При $w=0$ волна имеет угловое сечение, а при положительных w контур имеет возврат. В подобных случаях ясно, что оконча-

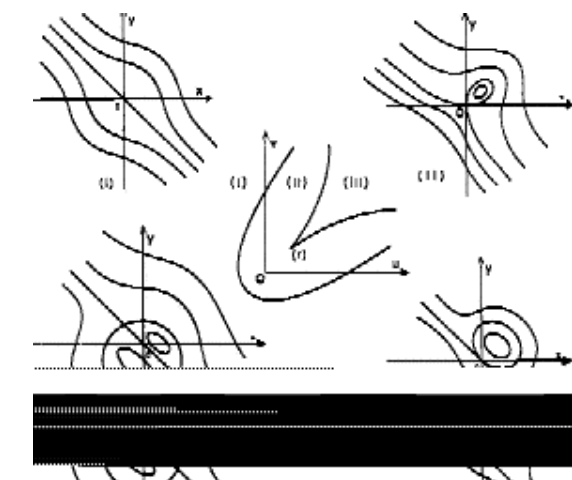


Рис. 5-16 Универсальная развертка параболической омбилики (в центре). Вокруг - локальный потенциал $V(x,y)$, соответствующий положениям (i, ii, iii, r).

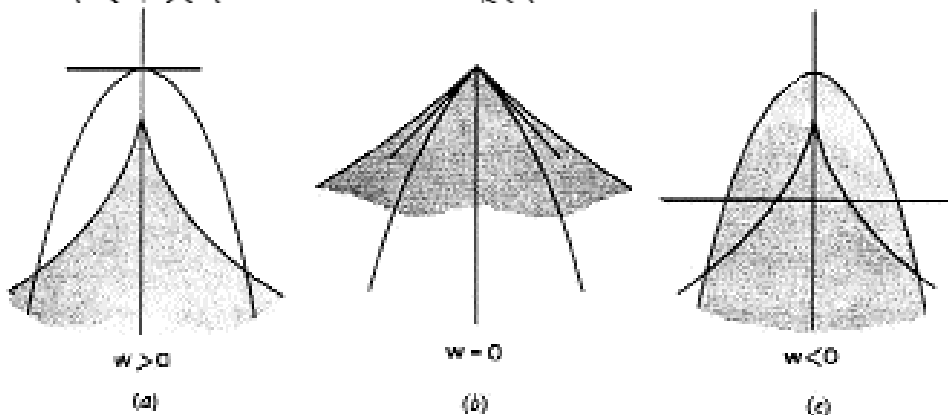


Рис. 5-17 Последовательные сечения прибоа.

тельная конфигурация оказывается неустойчивой типа обрушивающейся волны (См. прим. [1] рис. 5-18 и фотографию XIII).

2. Эллиптическая омбилика: волос. Локальная модель задана уравнением (E):

$$V = x^3 - 3xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vy$$

Множество S критических точек $V(x,y)$ отображается на Ouv через отображение

$$u = 3(x^2 - y^2) + 2wx, v = -6xy + 2wy$$

При $w=0$, это отображение переводит точку $z = x + iy$ в сопряженную точку $3z^2$. При малых значениях w мы получаем классическую деформацию отображения $Z = z^2$. Кривая критических значений на плоскости Ouv является гипоциклоидой с тремя возвратами. (см. Уитни [6]). Эллиптическая омбилика характеризуется при универсальном разложении двойным утончающимся конусом, сечение которого является гиперциклоидой с тремя возвратами (см. рис. 5-19).

На плоскости Oxy внутренних переменных особенность при $u=v=w=0$ задает кривую, имеющую тройную точку с различными действительными касательными: $x^3 - 3xy^2 = 0$ (критическая точка, называемая обезьяньим седлом (*Affensattelpunkt*)) (рис. 5-20-0). Образующая деформация этой ситуации превращает тройную точку в три двойные точки, вершины треугольника, который содержит или минимум, или максимум потенциала V (рис. 5-20, случай ii) а и ii) б соответственно). При $w=0$ также имеет место образующая деформация, дающая только два седла (случай i)). Поскольку переход от отрицательных к положительным w при $u=v=0$ преобразует случай ii) а в случай ii) б, единственной возможной областью устойчивого режима является внутренняя часть сужающихся конусов, изображенных на рис. 5-19.

Не лишена смысла попытка интерпретировать эллиптическую омбилику в гидродинамике как конец струи жидкости. В биологии можно усмотреть эллиптические омбилики в любых заостренных образованиях, нередко имеющих в покрове живых существ, таких как, например, ресницы, жгутики, волосы, иголки у ежей и т.п., хотя очевидно, что эти органы могут иметь совершенно различные функции.

3. Терминологическое замечание. Омбилики. В классической дифференциальной геометрии *омбилическая точка* поверхности S в \mathbb{R}^3 - это точка, где два главных радиуса кривизны равны. Для каждой омбилики M на S существует единственный центр кривизны $q(M)$, лежащий на нормали к M из S . Именно эту точку, возможно, неправильно, мы называем здесь омбиликой. Рассмотрим множество сфер (с переменным радиусом r) с центром на S . Они образуют многообразие Q размерности $2+3=5$, которое естественным образом отображается в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ (параметр q). Это отображение имеет в центре кривизны $q(M)$ особенность типа S_2S_1 , которая локально тождественна омбилике в смысле нашего определения. Классическая типология [12] (по Э.Пикару) омбилических точек поверхности не имеет непосредственной связи с нашей. Заметим только, что если центр кривизны омбилики эллиптический, он проходит через омбилику, соответствующую трем кривым (см. [12], статью И.Р.Портеуса).

В биологии «омбиликой» или *пупком* называется особенность, при помощи которой организм-потомок отделяется от родительского организма. Как мы увидим, имеется определен-

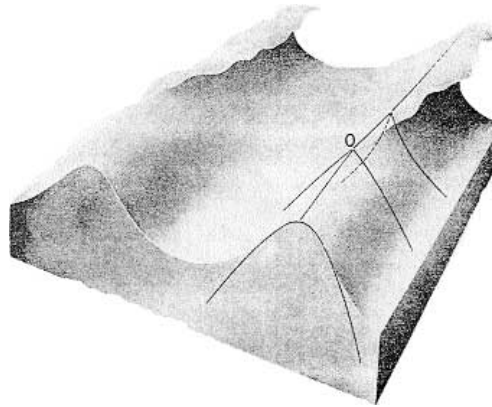


Рис. 5-18 Прибой (изометрия).

ная аналогия между этим понятием и параболическим омбиликом, который сейчас будет описан.

Г. Параболическая омблика: гриб

Поскольку эллиптическая и гиперболическая омбилики - особенности размерности три, можно устойчиво получить на \mathbf{R}^4 точки, промежуточные между этими двумя типами. Такие переходные точки мы будем называть параболическими омбиликами. Пусть

$$V(x,y) = Q(x,y) + \dots \text{члены порядка, большего трех}$$

представляет собой локальное разложение в ряд Тейлора функции V , где Q - кубическая форма от x, y . Мы докажем, что начало координат это параболическая омблика, показав, что ква-

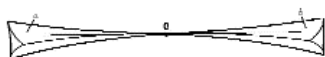


Рис. 5-19. Универсальная развертка эллиптической омбилики.

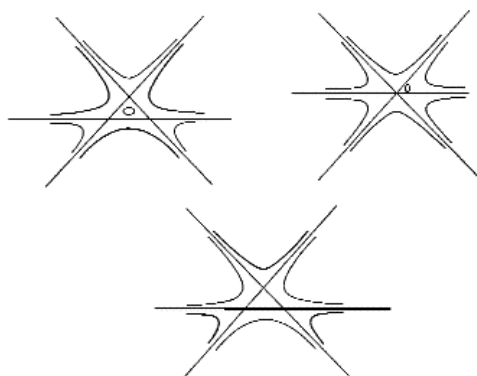


Рис. 5-20. Локальные потенциалы, связанные с положениями $a, 0, b$ на рисунке 5-19.

дратичные формы Q_x, Q_y имеют общий линейный множитель или показав, что у инволютивной связки $aQ_x + bQ_y = 0$ смешаны двойные радиусы. Если этот общий линейный множитель определяется уравнением $x=0$, то можно принять за Q произведение $x^2 y$. Действительно, если

$$Q_x = xA \quad Q_y = xB$$

где A, B - линейные множители, то равенство вторых производных $Q_{xy} = Q_{yx}$ дает $x(A_y - B_x) = B$, что показывает, что Q_y имеет вид kx^2 .

Однако следует иметь в виду, что струя третьего порядка $V = x^2 y$, не является детерминантом (в смысле главы 2). Чтобы получить струю-детерминант, необходимо стабилизировать эту струю, добавляя переменные более высокого порядка. Согласно теореме Лю [15], для этого достаточно добавить переменные четвертого порядка. Ограничимся в основном качественным изучением того, что происходит со струей четвертого порядка

$$V(x,y) = x^2 y + \frac{x^2 + y^2}{4}$$

которая соответствует компактной кривой $V=0$. Согласно [15], иной выбор переменных-стабилизаторов ведет к эквивалентной особенности.

1. Изучение этой особенности в плоскости внутренних переменных. Градиент V задается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dy} = \dots$$

$$2xy+x^3 \quad x^2+y^3$$

По направлению с угловым коэффициентом m , $y = mx$ предельное положение поля задается уравнением

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1+m^3x)}{2mx^2+x^3} = \frac{1}{2m}$$

Помимо вертикали Oy имеется еще два направления $\pm 2/2$, для которых предельное положение поля имеет в точности данное направление. Можно было бы показать, что если дойти до разрыва в начале координат, то соответствующие точки на окружности-прообразе O будут регулярными квадратичными точками индуцированного поля. Это поле проходит через эти точки разграничительных линий, которые обнаруживаются при проекции на плоскость Oxy . Сразу видно, что ветви разделительных линий, расположенные со стороны отрицательных y , являются линиями гребня. Напротив, со стороны положительных y эти ветви ограничивают все открытое подмножество траекторий, направленных к началу координат. Наша особая точка качественно имеет вид седла, но по сравнению с обыкновенным квадратичным седлом имеет интересные особенности:

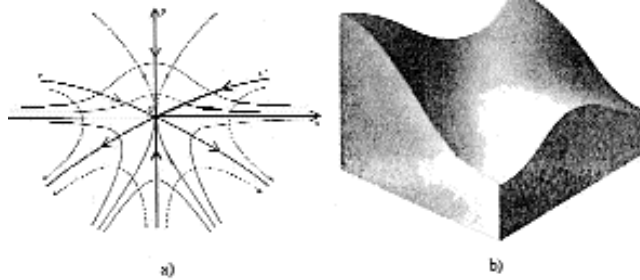
i) Тогда как линия гребня в точке обыкновенного седла регулярна, в нашем случае линия хребта в O имеет угловую точку.

ii) Тогда как для обыкновенного седла две линии *тальвега*, то есть образующие семейства регулярных кривых, трансверсальных линии хребта - это единственные линии градиента, завершающиеся в седловой точке, здесь мы имеем целый сектор линий градиента (ограниченный кривыми c, c' со стороны положительных y), завершающихся в O . Со стороны отрицательных y имеется единственная линия тальвега - отрицательная полуось Oy . Интуитивно ситуация описывается следующим образом: мы имеем дело с перевалом в горной цепи, траверс которой очень ассиметричен. В направлении убывания y путешественник попадает на перевал по широко раскрытому скату на пологом склоне. Со стороны отрицательных y путешественник попадает на перевал только поднявшись через узкую горловину с крутыми стенками (рис. 5-21).

В этом описании важно следующее: пороговая точка O , которая в классической ситуации имеет нулевую вероятность быть достигнутой, в нашем случае все-таки достигается из любого открытого множества начальных положений. Здесь мы сталкиваемся с первым примером явления *стабилизации порогов*, к которому мы еще вернемся, когда будем говорить о биологическом морфогенезе. Параболическая омбилика также появляется во всех случаях, когда имеется управляемое переливание из верхнего бассейна в нижний, как при выливании воды из кувшина в миску.

2. Универсальная развертка. Теперь рассмотрим универсальную развертку этой особен-

Рис. 5-21 а) График функций $V+x^2y+(x^4+y^4)/4$; б) изометрическое представление того же графика при $z=-V$.



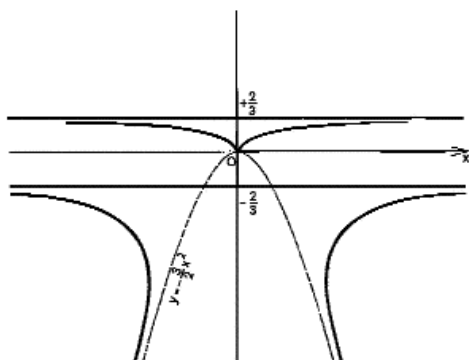


Рис. 5-22.

ности. С точностью до топологической эквивалентности она задается уравнением

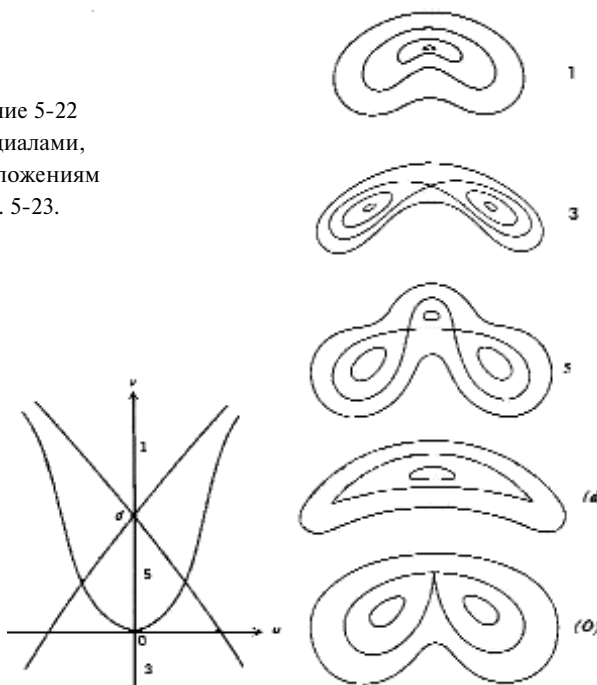
$$V = x^2 y + w y^2 + t y^3 + (x^4 + y^4) - ux - vy$$

Для $u=v=w=0$ мы имеем омбилику, которая является эллиптической при отрицательных t , и гиперболической при положительных t .

В случае $w=t=0$ для критической кривой получаем

$$u = 2xy + x^3 \quad \text{откуда}$$

Рис. 5-23 Изображение 5-22 с локальными потенциалами, соответствующими положениям (1, 3, 5, d, 0) на рис. 5-23.



$$\frac{D(u,v)}{v = x^2 + y^3} = |2y + 3x^2 - 2x| \quad D(x,y) = |2x - 3y^2|$$

$$\begin{aligned} \text{или } 6y^3 - 4x^2 + 9x^2 y^2 &= 0 \\ \text{или } x^2(4 - 9y^2) &= 6y^3 \end{aligned}$$

Соответствующая кривая (рис.5-22) состоит из трех дуг, имея в качестве ассимптот прямые $y = 2/3$ и параболу $x^2 = -2/3y$. На плоскости Ouv эта кривая имеет образ типа показанного на

рис. 5-22. Инвариантная кривая по симметрии порождает область симметричную по отношению к Ov . Внутри этой области имеется пять критических точек функции V . Их топологический тип показан на рисунке 5-23-5. Топологические типы V , соответствующие отмеченным участкам (3) и (1) показаны на рисунках 5-23-3 и 5-23-1.

Варьируя параметр t , мы получаем рис. 5-24 и 5-25, которые дают универсальные развертки эллиптической и гиперболической омбилики. Варьируя параметр w , мы получаем деформации 5-24b и 5-25b рисунков 5-24 и 5-25. Обратите внимание на маленькую гипоциклоиду с тремя возвратами, характерными для эллиптической омбилики. Все эти изображения полезны при изучении морфологии прибой (см. фотографии XV и XVI).

5.5.МОРФОЛОГИЯ ПРИБОЯ

...Я видел: в горький ветер врывались темные фигуры

Поль Валери. Потерянное вино

В \mathbf{R}^3 имеется два устойчивых типа прибой: гиперболический, который проявляется, когда гребень волны становится угловатым, а затем острым (типа *острия*), как у обрушивающейся волны. Эллиптический прибой проявляется в виде острых струй и колючек (обычно треугольных в сечении). Обыкновенно переход происходит в направлении эллиптический \Rightarrow гиперболический. В гидродинамике когда окончание струи приближается (в универсальном пространстве u, v, w, t) к параболической ситуации $t=0$, режим струи немного не доходя до $t=0$ захватывается центральным режимом режима (5) (см. рис.5-26). Сначала на конце струи происходит образование толстой капли. Затем этот центральный режим становится неустойчивым и захватывается каким-либо из устойчивых режимов (3) (см. рис. 5-22). В результате кап-

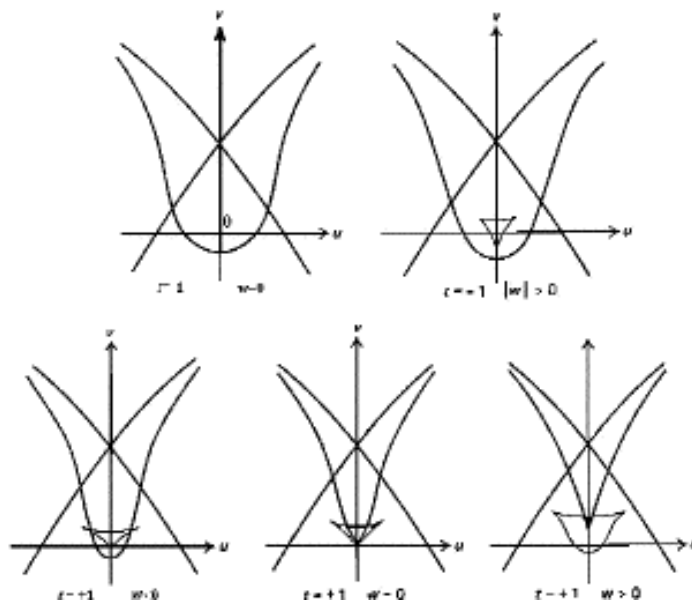


Рис. 5-24. а) универсальная развертка эллиптической омбилики;
 б)универсальная развертка омбилики, развернутой по w .

Рис.5-25. а) универсальная развертка гиперболической омбилики;
 б)универсальная развертка гиперболической омбилики, развернутой по w .

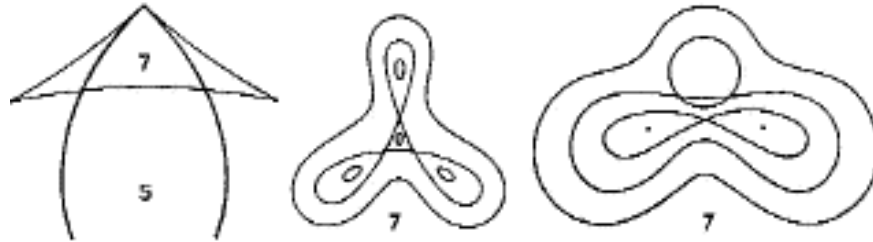


Рис. 5-26. Заметьте, что рис. 5-26 это не что иное, как перевернутый рис. 5-25а.

На рис. 5-25b показан локальный потенциал, связанный с положением 7.

ля разбивается на капельки, каждая из которых подчиняется одному из этих режимов. Кроме того, происходит отрыв от начального режима, еще присутствующего в основании струи, таким образом, что ножка, связывающая каплю с основанием струи, разрывается. В ситуациях подобного типа эволюция происходит слишком стремительно, чтобы допустить переход начального эллиптического режима в гиперболический (типа 7, рис. 5-25). При биологическом морфогенезе эволюция происходит медленнее, и она более строго контролируется. Поэтому в биологическом морфогенезе часто встречается ситуация, когда эллиптический режим сменяется гиперболическим. В этом смысле можно сравнить рис. 5-25 или 5-26 (перевернутый) со срезом гриба. Режим (5) это режим ножки, режим (7) - перепончатая пластинка – образует шляпку. Оконечности в виде острий представляют собой области неустойчивых возвратов, зоны гаметогенеза и спорообразования. Форма среза режима (3) на рис. 5-26 часто наблюдается в эмбриологии. Нервная пластинка и глазные пузыри, возможно, дают иллюстрации перехода эллиптического гиперболический, за которым следует захват режима (7) более устойчивым режимом (3). К этой проблеме мы вернемся в 9 главе. См. также фотографии XIII – XV, где показаны другие реализации этой особенности.

Тогда как примеры эллиптического возврата в избытке встречаются в биологии (любая поверхность, покрытая ресничками, колючками и т.п.), гиперболический возврат в чистом виде встречается редко. Однако, как представляется, хорошим примером может служить разрушение пластин грибов-навозников [2]. Действительно, при образовании всех несущих поверхностей гамет (пластинчатые поверхности грибов, гонады животных) в начале в общем случае имеется стадия складчатости (образование пластинок, половых канатиков и т.п.), что можно рассматривать как начало гиперболического возврата. Но немного позже гребень складки вместо того чтобы переламываться стабилизируется, и зона возврата оказывается отесненной назад на боковые стенки пластины, как если бы в конце концов мы снова получили гиперболическую омбилику. Здесь, несомненно, мы имеем дело с явлением стабилизации порога. Наложите друг на друга две гиперболические складки этого типа и вы получите трубчатые перепонки как у белых грибов.

Переход гиперболический эллиптический более редок, однако тоже встречается. Если, к примеру, гребень волны достигает угла возврата одновременно по всей длине волны, возникает в высшей степени неустойчивая ситуация, ведущая, по терминологии главы 6, к обобщенной катастрофе. Как будет показано ниже, ситуация может стабилизироваться путем образования периодической структуры, нарушающей симметрию. В нашем случае волна, поначалу гиперболическая, ошестинивается эллиптическими колючками, расположенными через равные промежутки на гребне волны. Корона, возникающая при всплеске (упоминаемая д'Арсии Томпсоном) представляет прекрасную иллюстрацию этого явления. Базидии, расположенные

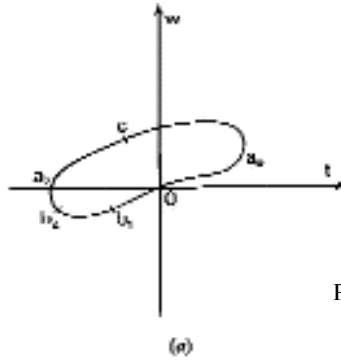


Рис. 5-27 Петля выброса.

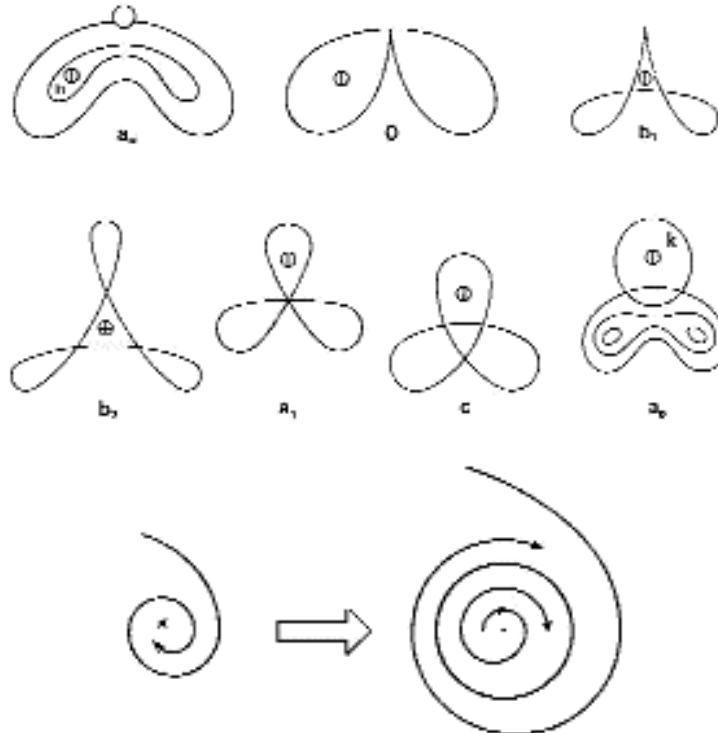


Рис. 5-28. Бифуркация точечного аттрактора в замкнутую траекторию.

на стенках пластинок гриба, равным образом свидетельствуют о частично эллиптической ситуации на первоначально гиперболическом гребне, стабилизировавшемся на вершине (см. Прим. [3]).

Сложный переход гиперболический \Rightarrow эллиптический \Rightarrow гиперболический может описываться при помощи очень интересной петли g на плоскости w, t . Эта петля начинается в точке a_0 , соседней с омбилической гиперболической точкой, при $w > 0$ достигает оси, затем выткается в параболическую омбилику $w = t = 0$, выходит непосредственно из оси $w = 0$ и достигает окрестности эллиптической омбилической точки ($w < 0, t < 0$). Затем эта кривая снова пересекает ось $w = 0$ в эллиптической омбилике a_1 и возвращается к исходной точке, не попадая в на-

чало координат. Если проследить соответствующую вариацию в пространстве внутренних переменных x, y , то можно попытаться обнаружить петлю в аттракторе (минимуме I) фигуры, соответствующем любой точке петли. Это можно сделать способом, показанным на этом рисунке. Видно, что общий эффект петли заключается в трансформации режима h в начальной точке d в центральный режим k . Общий эффект петли это *провоцирование* (в смысле Уоддингтона) нового режима. Если придать переменным x, y пространственное значение, нельзя не заметить фаллический вид множества процесса выброса. (Обратная петля очевидным образом дает процесс захвата).

Из этого примера можно сделать два вывода:

а) Один вывод касается механизма эмбриологической индукции, провоцирования нового режима. Когда динамическая система находится в критическом состоянии, в окрестности которого многие устойчивые режимы совпадают и конкурируют, колебания системы в универсальной развертке особенности способствуют появлению того или иного нового режима (согласно направлению плоскости колебаний). Можно предположить, что в биохимии вещество, провоцирующее реакцию, действует так же. Реакции каталитического характера, в которых оно участвует, имеют скоротечный характер, однако эти реакции определяют колебания в пространстве биохимических параметров, которые обеспечивают разворачивание особенности метаболизма.

б) В приведенном выше примере петли g внутренние параметры x, y имеют почти-что пространственный смысл. В этом нужно видеть стабилизацию процессом определенных порогов, которые могут расширить страты бифуркации универсальной развертки. Этот процесс проявляется, видимо, в каждом позднем эпигенезе. Математически стратификация двойственная к стратификации плоскости Ouv получается в результате почти что полярного преобразования. Отображение $x, y \Rightarrow u, v$ задаваемое через $u = K_x, v = K_y$, очень похоже на такое соответствие. Это завершает классификацию элементарных катастроф в евклидовом четырехмерном пространстве \mathbf{R}^4 в случае, когда динамика-слой является градиентной. Что происходит, если мы имеем дело с более общими динамиками? Все зависит от топологической природы аттрактора, который задает устойчивый режим. Опишем наиболее простые случаи.

5.6. АТТРАКТОРЫ МЕТАБОЛИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Самый простой аттрактор динамической системы M, X после точки это образующая замкнутая траектория. Займемся сначала точкой, поскольку точечный аттрактор векторного поля a в некоторых случаях отличается от минимума потенциала. В такой точке u поле $X(u)$ нулевое и матрица коэффициентов линейных частей составляющих $X(u)$ на локальной карте имеет все свои собственные значения на полуплоскости $R(z) < 0$. Очевидно, что эта ситуация устойчива. Как может исчезнуть такой аттрактор? Устойчивыми могут быть два случая.

1. Собственное значение матрицы якобиана (функции параметра t) обращается в нуль и является единственным. Это происходит, когда аттрактор пересекает неустойчивую точку, и они оба разрушаются при этом столкновении.

2. Действительная часть собственного значения обращается в нуль при $t = 0$, при том что мнимая часть остается ненулевой. В этом случае сопряженное собственное значение претерпевает аналогичную эволюцию. Этот случай является предметом классического исследования Э.Хопфа [13], откуда и пошел термин бифуркация (Abzweigung, т.е. разветвление). С качественной точки зрения это происходит следующим образом: особая точка становится неустойчивой, но на плоскости соответствующих собственных векторов она окружена небольшим инвариантным притягивающим циклом. Все происходит, как если бы точечный аттрактор рас-

тянулся в диск размерности два, а центр диска превратился в точку отталкивания поля (см. рис 5-28). В итоге всегда возникает устойчивый режим, и соответствующий аттрактор из точки превращается в замкнутую траекторию. Поскольку новый аттрактор оказывается топологически сложнее исходного точечного аттрактора, можно (в неточных выражениях) сказать, что новый режим содержит больше информации, чем исходный (например, период цикла это новый параметр). После изолированной точки самым простым аттрактором является как раз замкнутая притягивающая траектория. Локальное исследование такой траектории осуществляется классическим методом Пуанкаре-Флоке. Траектория разрезается фрагментом трансверсальной гиперповерхности F . Двигаясь вдоль траектории из точки m из F , мы снова пересекаем F в m' . Соответствие $m \Rightarrow m'$ определяет на F локальный диффеоморфизм. Если траектория притягивающая, все собственные значения якобиана по модулю меньше единицы. В этом случае ситуация тоже структурно устойчива. Но при варьировании параметра функции аттрактор может исчезнуть в соответствии с двумя способами, указанными выше. В случае 1 он разрушается в результате столкновения с неустойчивой траекторией. В случае 2, который возникает только если размерность окружающего многообразия больше трех, происходит бифуркация и траектория превращается в замкнутую и неустойчивую сердцевину маленького инвариантно-притягивающего тора.

Это был пример инвариантного притягивающего многообразия для поля X на многообразии M . Математическое изучение притягивающих многообразий поля — дело тонкое. Некоторые из таких многообразий, когда они притягивают достаточно интенсивно и когда поле внутри многообразия в большой степени перемешивающее, структурно устойчивы. Другие, напротив, легко вырождаются в многообразия меньшей размерности или замкнутые траектории. Как указывалось в главе 2, топологическая структура структурно устойчивых аттракторов поля X не изучена. Поэтому систематическое изучение преобразований аттракторов при деформации поля в настоящее время недоступно. Однако мне кажется, что это важнейшее геометрическое явление, которое участвует в большом числе морфогенетических процессов, таких как фазовые переходы в физике и явление индукции в эмбриологии. В отсутствие точной теории приходится ограничиться качественной классификацией этих процессов, которые будут описаны в следующей главе под названием «обобщенных катастроф». Можно заметить, что не существует даже классификации устойчивых особенностей семейства замкнутых траекторий с двумя или тремя параметрами. Наконец, в случае консервативных гамильтоновых полей практически неизвестна классификация по типу замкнутых траекторий [4], и почти ничего не известно об их преобразованиях. Не изучено в общем случае даже явление исчезновения центральной замкнутой траектории, несмотря на очевидный интерес к этой проблеме (особенно в гидродинамике).

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] «Это означает, что когда обрушение происходит в окрестности гребня, волна принимает форму клина с углом 120° . Это согласуется с наблюдением за волнами в момент перед обрушением и с теоретическими результатами, полученными Стоксом.» Томпсон *Теоретическая гидродинамика* (Thompson *Theoretical Hydrodynamics*. Macmillan, Londres, 1962, p.414)

[2] «Навозники среди пластинчатых грибов в какой-то мере играют роль «образцов», имея примечательный способ созревания. У большинства экземпляров оно начинается с края и постепенно продвигает вглубь, что достаточно легко наблюдать, поскольку споры очень темные. В то же самое время пластинки обычно претерпевают нечто вроде саморазрушения: после последнего порождения базидий они превращаются в жидкость. В конечном счете от них остаются только черные линии». Анри Романези. *Новый атлас грибов* (Henri Romagnesi *Nouvel Atlas des Champignons*, Bodras, Paris, 1956, t. 1, p.36)

[3] **Тонкая устойчивость эллиптических состояний.** На проективной действительной плоскости однородных координат A, B, C эллиптические квадратичные формы $AX^2 + BXY + CY^2$ имеют мнимые корни. Они соответствуют отрицательному дискриминанту $B^2 - 4AC$. Поэтому они образуют на этой плоскости вогнутое множество в том смысле, что любая проективная прямая содержит гиперболические точки, для которых $B^2 - 4AC > 0$. Если предположить, что точка A, B, C перемещается по законам динамики, соответствующей естественной метрике проективной плоскости, то всякая такая точка после достаточно большого промежутка времени обязательно попадет в гиперболическое состояние. Выше было показано, что эллиптические состояния должны интерпретироваться как состояния напряжения, а гиперболические — как состояния расслабления. Это можно объяснить тем, что состояния напряжения, хотя и безусловно необходимы в жизни, всегда имеют ограниченную продолжительность и сменяются состояниями расслабления. Вечная диалектика эллиптического и гиперболического позволяет вспомнить оппозицию инь-ян из китайской медицины или же пару возбуждение-торможение, столь близкую нейрофизиологам. Мужской пол выражает большую эллиптичность, чем женский уже в силу самой природы пространственного переноса полового акта мужчины. Возможно таким образом можно объяснить — что в общих чертах было проверено Э.Колли вплоть до гомо сапиенс — что мужские особи более волосаты (в обобщенном смысле), чем их спутницы и что биологически они более хрупки.

В этом же круге идей находятся известные соображения Фрейда о половом символизме (особенно в снах): следует, видимо, допустить, что геометрико-динамические формы, представляющие половые процессы, встречаются в столь многих объектах живой и неживой природы потому, что это единственные структурно устойчивые формы в нашем пространстве-времени, способные реализовать столь фундаментальную функцию, как объединение гамет после пространственного перемещения. Можно почти наверняка утверждать, что эти формы предшествовали разделению полов, которое представляет собой не что иное, как генетически закрепленное проявление этих форм. См. сказанное в гл. 9 о половых креодах (см. фотографию XVII).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] О вихревых дорожках в гидродинамике.
Первоисточником является статья: Theodor von Karmann, *Ueber den Mechanismus des Widerstandes den ein bewegter Koerper in einer Fluessigkeit erfahrt*, Nachr. Ges. Wiss. Goettingen, 1911-1912.
Краткое изложение см. в: W. Kaufmann, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 1960, p.220.
- [2] Marston Morse, *Calculus of Variation in Large*, Colloquium Math. Serie
- [3] J.C. Tougeron, *Ideaux de fonctions differentiables*, Ann. Inst. Fourier, XVIII, 1968, p.177.
- [4] R.Courant, K.O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience Publishers, 1948, p.115.
- [5] Riemann, *Ueber die Fortflanzung ebener Lueftwellen von endlicher Schwingungsweite*, Abhandl. Ges. Wiss. Goettingen Math. Physik Klasse, 1860.
- [6] H.Whitney, *Mappings of the plane into the plane*, Ann. Of Math. 2, 62, 1955, p.374-410.
- [7] Об отражении Маха см. [4]
- [8] D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*, abridged ed. Cambridge University Press, 1961, fig.38, p.100.
- [9] R.C. Hwa, V.L. Teplitz, *Homology and Feynman Integrals*, W.A. Benjamin, 1966, p.140.
- [10] Courant, Hilbert, *Methods of mathematical Physics, II*, Interscience Publishers, NY, 1961, p.617, fig. 54.
- [11] J.Mather, *Structural stability of differentiable mappings I-VI*, Annals of Math., 87, 1968; 89, 1969; Publ. Math. IHES, 35, 1969, p.127-156, 37, 1970, p.223-248.

[12] О линиях кривизны в окрестности омбилики см. G.Darboux, *Theorie generale des surfaces*, t.IV, note VII и I.R.Porteous, *The normal singularities of a submanifold* (в печати в Journal for Diff. Geometry)

[13] E.Hopf, *Abzweigung einer periodischen Loesung von einer stationaren Loesung eines Differentialsystems*, Berichte Verh. Saechsicher Akad. Wiss. Leipzig, Math. Nat. Klasse 95, n 1,3, 22, 1943.

[14] V.I Arnold, A.Avez, *Problemes ergodiques en Mecanique classique*, Gauthier Villars, Paris, 1967, App. 29, p.192

[15] Y.C. Lu, *Sufficiency of Sets in $J2(2,1)$ via Decomposition*, Invent. Math. 10, 119-127 (1970).

ГЛАВА 6

ОБЩАЯ МОРФОЛОГИЯ

Μεταβαλλων αναπαυεσται
Огонь покоится, изменяясь¹

Гераклит

6.1. БОЛЬШИЕ ТИПЫ ФОРМ И ИХ ИЗМЕНЕНИЯ

А. Статические и метаболические формы

Различие между статическими и метаболическими моделями, проведенное в главе 4, подтверждаются следующими соображениями.

Определение. Если задана статическая (соответственно, метаболическая) модель локальных динамик, управляющих открытым множеством W пространства, то мы называем *статической* (и соответственно, *метаболической*) *формой* множество точек x из W , управляемых аттрактором поля. Для статической модели (динамики градиентов) этот аттрактор c является точечным в многообразии M внутренних состояний.

Статическая форма имеет следующие свойства: ее граница в общем случае геометрически проста, локально полиэдральна, относительно жестка и нечувствительна к возмущениям. Если статическую форму подвергнуть взаимодействию с внешней системой, то форма поначалу будет оставаться изоморфной самой себе вследствие структурной устойчивости. Если увеличивать интенсивность возмущения, то в конце концов произойдет столкновение аттрактора c с неустойчивым режимом и захват аттрактором более низкого потенциала, по крайней мере в районе максимума интенсивности возмущения или в окрестности границы, где аттрактор c неизбежно более хрупок. Этот процесс превращается в обычную катастрофу или конечную последовательность таких катастроф. Как мы видели на примерах предыдущей главы, соответствующие аттракторы связаны между собой отношениями соседства и преемственности, задаваемыми топологией динамики-слоя. Конечная ситуация может быть очень сложной топологически, но она всегда содержит только статические формы.

Напротив, метаболическая форма обладает следующими свойствами. Ее граница может быть топологически очень сложной. Она в принципе очень чувствительна к возмущениям и очень подвержена флуктуациям. Если подвергнуть метаболическую форму очень слабому возмущению, то она будет сопротивляться, демонстрируя структурную устойчивость, однако ее топология может измениться. Но если возмущение достигнет точки блокировки соответствующей

¹Фр. 84 DK Перевод Лебедева (цит. соч.): *Все, сменяясь, отдыхает.* - Прим. ред.

ющего метаболизма, то есть разрушения рекуррентности динамики-слоя, то возникнет новое грубое явление. Форма почти мгновенно разлагается на континуум элементарных статических или метаболических форм с более простой внутренней структурой, с аттракторами, имеющими меньшую размерность, чем начальный аттрактор c (*катаболическая катастрофа*). Далее мы обсудим различные топологические аспекты этого рода катастроф, которые мы будем называть *обобщенными*.

Кроме того, следует заметить, что метаболической форме присущи свойства внутренней кинетики, связанные с динамикой ее аттрактора, например, собственные периоды. Из этого факта следует, что можно войти в резонанс с метаболическими формами того же типа. В следующей главе мы проинтерпретируем этот факт в том смысле, что метаболические формы являются *носителями значения*.

Типичный пример статической формы — это твердое тело. Например, камень. Среди метаболических форм можно назвать струю воды, кольцо дыма (это формы, задаваемые только своей кинематикой), пламя и — если отвлечься от их сложной внутренней морфологии — живые существа. Не стоит, впрочем, скрывать, что различие между статическими и метаболическими формами — это идеализация, которую трудно выдержать до конца. Большая часть статических форм всего лишь *псевдостатичны*, в том смысле, что их точечный аттрактор может испытывать колебания, которые делают форму метаболической. Если верить в гераклитово $\rho\alpha\mu\alpha \text{ gei}$ (все течет), то любая форма метаболична при рассмотрении фундаментальных явлений, обеспечивающих устойчивость, в достаточно мелком масштабе. Возможно даже, что превращение материи в энергию тоже можно рассматривать как катастрофу этого типа...

Б. Конкуренция аттракторов гамильтоновой динамики

Пусть на открытой области W пространства задано поле локальных гамильтоновых динамик слоя M, X . Предполагается, что гиперповерхность уровня $H = E$ допускает конечное число зависящих от E странных аттракторов $c_1 \dots c_k$ с мерами Лиувилля, соответственно, m_1, m_2, \dots, m_k . Образует относительные энтропии $S_j = \text{Log} m_j$ и соответствующие температуры $T_j^{-1} = \delta S_j / \delta E$. При наличии универсальной термодинамической связи между аттракторами c_i состояние равновесия может быть достигнуто, только если все фазы X_i (управляемые аттракторами c_i) имеют одинаковую температуру. Пусть $E(T)$ — соответствующие энергии c_i (в предположении, что функции необратимы). Пусть также V_1, V_2, \dots, V_k — фазовые объемы X_1, X_2, \dots, X_k . Тогда

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + \dots + V_k &= \text{общий объем } W \\ E_1 V_1 + E_2 V_2 + \dots + E_k V_k &= E \text{ (общая энергия системы)} \end{aligned}$$

Этих двух уравнений недостаточно для задания V_j и, следовательно, для пространственного распределения фаз X_i . Вероятно, это распределение определяется условием минимума на поверхности контакта. Если A_j определяет поверхность ударной волны, отделяющей X_i от X_j , то следует задать минимум выражения вида

$$\sum k_{ij} A_{ij} = P \quad \text{где } k_{ij} \text{ — положительные скаляры}$$

В подобных случаях топология, свойственная динамике-слою, не играет практически никакой роли. Паттерны, встречающиеся в многочисленных биологических структурах (крылья бабочек, ракушки и т.п.), вероятно, подыниются этому механизму. Они имеют слишком много индивидуальных особенностей, чтобы быть строго заданными как в случае с обычными морфогенетическими полями. Даже при допущении вторичных экстремумов таких как минимум $\sum k_{ij} A_{ij}$ окончательная топологическая и геометрическая конечная конфигурация, вообще говоря, далека от определенности. *Следует допустить неопределенный характер конфигурации равновесия между фазами в термодинамическом равновесии как факт, имеющий общее зна-*

чение. Впрочем, очевидно, что если динамика допускает псевдогруппу эквивалентностей G , то эта же псевдогруппа G будет действовать в конфигурационном пространстве равновесия, что даст весь континуум решений.

Теперь мы опишем частный случай предыдущей задачи, состоящий в появлении новой фазы.

В. Появление новой фазы. Обобщенные катастрофы

Предположим, что при $t < 0$ аттрактор c динамики слоя управляет всей областью D пространства, и что при $t = 0$ под действием изменений внешних или внутренних параметров аттрактор c перестает быть единственным. Траектории, высвобожденные из-под притяжения c , устремляются к другим аттракторам, например, к аттрактору c_1 . В области D появятся, обычно в очень слабой и нерегулярной форме, участки режима c_1 . Эти участки будут соединяться и упрощать свою топологическую структуру вплоть до установления нового режима общего равновесия. Такие явления, которые мы будем называть *обобщенными катастрофами*, происходят при различных условиях как в живой, так и в неживой природе. Их топологический вид может быть весьма разнообразным. Мы дадим им огрубленную качественную характеристику. Важной характеристикой является коразмерность *ядер* новой фазы c_1 . Формально обобщенная катастрофа характеризуется нарушением симметрии или однородности. Когда область, локальная динамика которой является инвариантной относительно псевдогруппы G , перестает существовать, происходит обобщенная катастрофа.

1. Комковая катастрофа. Чтобы описать обобщенную катастрофу в первом приближении можно обратиться к статической модели. Предположим, что при отрицательном t потенциал V на D постоянен. Пусть начиная с $t = 0$ функция перестает быть постоянной и поначалу дает бесконечное число очень мелких случайных колебаний (в биологической динамической системе начало катастрофы может определяться множеством ранее существовавшего ростка). Предположим, что минимумы V (аттракторы поля $\text{grad} V$) реализуются в виде зерен новой фазы c_1 . Тогда ранее гомогенная область D при $t = 0$ из-за скоротечности этих зерен становится трудной для наблюдения. При возрастании t функция V будет, вообще говоря, топологически упрощаться. Число неоднородностей функции V будет уменьшаться, соответствующие зерна будут захватываться. К концу катастрофы останется только конечное число комков, локализованных на минимумах V . Такова общая модель катастрофы коагуляции или *комковой* катастрофы. Ее примером может быть конденсация дождя из водяных паров облака (см. фотографию 6-а).

2. Пузырьковая катастрофа. Если новая фаза c_1 термодинамически связана с предшествующей, может возникнуть ситуация, топологически двойственная предыдущей. Новый режим имеет поначалу размерность три и оттесняет прежний режим на поверхность (размерности два). Происходит *пузырьковая* катастрофа, при которой область D превращается во что-то вроде пены. Каждый аттрактор функции $-V$ определяет область размерности три. Эти области ограничены поверхностями предшествующей фазы c с особенностями страт конфликта, о которых идет речь в правиле фаз Гиббса. Когда t возрастает и V упрощается, число пузырьков уменьшается. При этом сами пузырьки увеличиваются за счет разрушения промежуточных перегородок (согласно схеме, предусмотренной для слоев конфликта коразмерности четыре). См. 5ГЗ.

3. Ламинарные и нитеобразные катастрофы. Может оказаться, что начальная коразмерность новой фазы будет равна одному или двум. В первом случае мы получаем *ламинарную* катастрофу. Область D в начале катастрофы изоборждена большим числом узких лент новой фазы c_1 . Эти ленты, поначалу очень многочисленные и свернутые, могут в конце концов образо-

вывать более простые конфигурации и утолщаться за счет захватов. Если начальная коразмерность новой фазы равна двум, то мы имеем дело с *нитеобразной* катастрофой. В момент $t = 0$ в области D появляется большое число маленьких круглых волокон, которые в конце концов могут объединяться одно с другим путем захвата. В наиболее вероятной динамической модели катастрофы этого типа такой захват осуществляется при помощи перекрещивания двух волокон и ведет к процессу *кроссинговера* в генетике.

Забавно, что фазовые переходы в неживой природе почти всегда, как кажется, относятся к первым двум типам. В биологии, напротив, чаще встречаются переходы других типов (см. фотографии с XVIII по XXI).

4. Катастрофы с пространственным параметром. В рассмотренных моделях обобщенной катастрофы параметру времени была отведена привилегированная роль. Но в этой роли может выступить и пространственная координата. В идеальном случае плоскость $x=0$ управляется аттрактором c . Но при $x > 0$ появляются зерна фазы c_1 , которые по мере роста x увеличиваются и упрощаются путем захватов. Таким образом, получается топологическая конфигурация из одного или нескольких деревьев, стволы которых соответствуют большим значениям x , а ветви находятся справа от $x=0$. Явления этого типа возникают всегда, когда имеет место распространение новой фазы c_1 . Эта фаза управляется градиентом, которому начальная фаза, вообще говоря, не подчиняется.

Типичный пример такой ситуации — наклонная песчаная поверхность, которую осторожно и равномерно поливают с самого верхнего уровня $x=0$. Образуются ручейки воды, поначалу очень маленькие и многочисленные, которые при $x > 0$ захватываются один другим. Другой пример — электрическая искра, проскакивающая с заостренного электрода на плоский (фотография XXII).

Этот тип катастроф играет важнейшую роль в биологическом морфогенезе. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить древовидные формы растений и системы кровообращения животных.

Г. Суперпозиция катастроф

Может случиться, что в некоторой области одновременно происходят две катастрофы, конкурирующие аттракторы которых независимы или очень слабо связаны. В этом случае может возникнуть сложная морфология. Например, суперпозиция двух ламинарных катастроф с достаточно регулярной периодичностью в результате «*муарового эффекта*», приводит к образованию линейного ряда комковых катастроф, производящего впечатление новой более разреженной ламинарной катастрофы. Суперпозиция ламинарной катастрофы и сопутствующей ей комковой катастрофы приводит к появлению борозд, ориентация которых параллельна во всех комках. Некоторые структуры, встречающиеся в эргастроплазме некоторых клеток (аппарат Гольджи), напоминают этот механизм. Разнообразие конфигураций, которые могут быть получены с помощью суперпозиций, практически беспредельно (см. фотографию XXIV).

Д. Модели обобщенной катастрофы. Изменения фазы

Мы видели, что в метаболической модели с гамильтоновой динамикой каждый аттрактор c был связан с псевдогруппой топологических эквивалентностей динамики $G(c)$, с помощью которой можно записать уравнение в частных производных описывающее эволюцию поля к состоянию равновесия. Следует также заметить, что как видно на примере кристаллических фаз, аттракторы распределяются по непрерывным семействам, приводя в действие на псевдогруппе $G(c)$ полную группу перемещений. Подчеркнем, что фаза аттрактора c_1 может по-

явиться внутри фазы c только если псевдогруппа $G(c_1)$ является псевдоподгруппой $G(c)$. Это утверждение, как кажется, противоречит тому хорошо известному факту, что изменения фаз в принципе обратимы. Фаза c может, конечно, породить фазу c_1 , псевдогруппа $G(c_1)$ которой не содержится в псевдогруппе $G(c)$. Но это требует предварительной катастрофы — распада фазы c . Так при плавлении твердое жидкое появляется сначала на краю твердого кристалла, что неизбежно разрушает его структуру. Пусть S — поверхность, ограничивающая ядро новой фазы c_1 , где $G(c_1)$ содержится в $G(c)$. Пусть к тому же g — локальная подгруппа изотропии, то есть множество $gG(c)$, таких что $gG(c_1) = G(c_1)$. отождествим с g множество элементов из $G(c)$, сохраняющих S . Это простое правило позволяет во многих случаях уточнять коразмерность новой фазы. Например, если две фазы c и c_1 гомогенны, то $G(c)$ и $G(c_1)$ это группы перемещений, а S является сферой. Если g — дискретная подгруппа группы вращений (случай кристалла), то S имеет полиэдральную форму, которая определяется правилом Вульфа. Неправильный характер этой формы несомненно соответствует дендрическому росту кристаллов. Если новая фаза c_1 управляется градиентом (но в остальном гомогенна), то g — это подгруппа вращений, осью которой является этот градиент. В этом случае новая фаза имеет коразмерность два (S — цилиндр).

Е. Формализация обобщенной катастрофы

Построение модели обобщенной катастрофы представляет собой, несомненно, одну из наиболее трудных задач механики. Действительно, ситуация обобщенной катастрофы существенно характеризуется тем фактом, что она феноменологически нарушает *принцип Кюри*, согласно которому любая симметрия причин влечет за собой симметрию следствий. На этом основании можно утверждать, что *обобщенная катастрофа не является формализуемым процессом* (в смысле главы 1), поскольку логическая дедукция удовлетворяет формальному аналогу принципа Кюри: в формальной системе P любой автоморфизм системы посылок расширяется в автоморфизм множества заключений. Значит ли это, что нужно отказаться от конструирования моделей? С моей точки зрения, возможны два направления попыток строить модели обобщенных катастроф.

Первое направление состоит в допущении, что катастрофа в самом начале хорошо определена при помощи заданного *множества-роста*, т.е. множества точек, в которых появляется новая фаза. С математической точки зрения, если взять модель комковых катастроф, заданных потенциальной функцией $V(x, t)$, то можно связать функцию $V(x, 0)$ с измеримой (но не непрерывной и паталогической) функцией $g(x)$. Эту функцию можно регуляризовать при помощи свертки с ядром $m(x, t)$, область задания которой увеличивается с ростом t ; тогда функции $V(x, t) = g \circledast m(x, t)$ начинаясь в исключительно сложной топологической ситуации, будут затем упрощаться. Если x — циклическая координата, то функция V стремится к своей гармонике минимальной частоты, что объясняет периодичность на конечной стадии катастрофы. (Прим. [*]).

Более тонкий подход состоит в определении условий, при которых метаболическое поле в результате катастрофы превращается в статическое. Иначе говоря, динамика с рекуррентным аттрактором может вырождаться в градиентную динамику без рекуррентности. Этот вопрос мало изучен топологически, но даже в наиболее простом случае, когда на поверхности векторного поля замкнутая устойчивая траектория разрушается в результате столкновения с неустойчивой траекторией, сопровождается (работы Сотомайора [1]) бесконечным числом обычных катастроф статического характера. Иначе говоря, в функциональном пространстве динамик на M множество полей с рекуррентностью, в общем случае ограничено гиперповерхностью бифуркации H . (В случае векторных полей на поверхности эти катастрофы являются связями

между седловыми точками коразмерности один). Трансверсальное сечение H и K сечением, задаваемым полем, показывает что гиперповерхность начала катастрофы $s^{-1}(H)$ является границей обычных катастроф, которые стремятся к $s^{-1}(H)$, разветвляясь на все более мелкие (см. рис. 6-1). В модели этого типа множество $s^{-1}(K)$, по крайней мере в окрестности гиперповерхности начала катастрофы, структурно неустойчиво. Однако в конце катастрофы от множества $s^{-1}(K)$ можно ожидать определенной структурной устойчивости. Только эта окончательная ситуация представима структурно устойчивым морфогенетическим полем (вообще говоря, статической модели) и на практике может быть объектом предсказания.

Конечное состояние обобщенной катастрофы часто определяется присутствием *поляризующих градиентов*. Например, если одна из фаз плотнее другой, то к концу катастрофы она будет располагаться внутри камеры. Но при отсутствии таких градиентов конечное состояние часто имеет не менее замечательную симметрию (периодичность) загадочного происхождения. Примеры этого явления с избытком обнаруживаются как в живой природе (сомиты, филотаксис, рисунки на перьях), так и в неживой (кольца Лизганга, языки на песке во время отлива, волны, возникающие в прямоугольном желобе, явление Бенара и т.д.) (фотографии XXV, XXVI, XXVII, примечание [1]). Другой пример это периодический эллиптический возврат кривой, разбивающейся гиперболически в диадеме *всплеска* (фото XXV). Предложенное выше объяснение множества-ростка катастрофы совсем не убедительно. Скорее надо допустить, что здесь имеется глубокое явление математической природы, требующее серьезных исследований. В конце концов симметрия существует в природе вопреки своей очевидной неустойчивости только потому, что стабилен порождающий ее процесс (см. примечания [1], [2] и ссылку [3]).

Аналогичная катастрофа имеет место, когда многомерный аттрактор c разлагается на аттракторы меньшей размерности (но не обязательно точечные). В этом случае мы имеем дело с *катаболической* катастрофой. Могут случаться также *анаболические* катастрофы, приводящие к образованию аттракторов большей размерности в данном слое. Возникновение аттрактора большей размерности также требует, вообще говоря, бесконечного числа обычных катастроф. Например, чтобы получить инвариантный тор T^2 , необходимо в каком-то смысле оплести тор замкнутыми притягивающими кривыми все большей и большей длины (непосредственное порождение тора из окружности посредством бифуркации Хопфа в этом случае невозможно). Априори представляется, что приемлемые примеры анаболических катастроф могут встретиться только в биологической динамике (телофаза митоза).

Не исключено, что понятие обобщенной катастрофы представляет интерес даже при отсутствии морфогенеза. Так, возникновение турбулентности в ламинарном потоке может в гидродинамике рассматриваться как катастрофа, поскольку при этом нарушается симметрия. Хотя турбулентное решение может быть дифференцируемым, даже в этом случае качественное описание поля оказывается топологически очень сложным. С этой точки зрения было бы

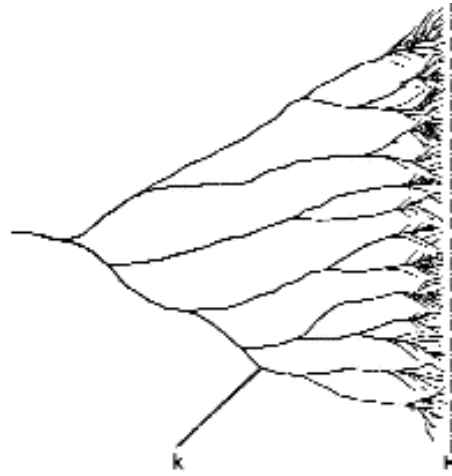


Рис. 6-1. Ветвящаяся структура, связанная с множеством бифуркации обобщенной катастрофы.

интересно изучить вариацию замкнутых центральных траекторий касательного соленоидального поля и его эволюцию к более сложным топологическим состояниям. В этом смысле возникновение турбулентности формально весьма схоже с процессом плавления: оно характеризуется заменой странного аттрактора гамильтоновой динамики типа центральной замкнутой траектории с дискретной псевдогруппой симметрий большим эргодическим множеством с транзитивной псевдогруппой (типа характеризующего газообразную фазу).

6.2. ГЕОМЕТРИЯ СВЯЗИ

Теория бифуркации динамической системы может рассматриваться как теория динамических систем, имеющих точные *первые интегралы*. Если на самом деле динамическая система зависит от параметров, представленных точкой p многообразия P , то можно предположить, что мы имеем дело с глобальной дифференциальной системой (M, X) которая имеет в качестве первого интеграла координатные функции P или же касательные к слоям дифференцируемого расслоения $p: M \Rightarrow P$. В духе этой теории с помощью естественных ослаблений гипотез мы приходим к рассмотрению динамик (M, X) которые допускают глобальные *приближенные первые интегралы*, задаваемые расслоением $p: M \Rightarrow P$. Мы также приходим к понятию *среднего поля*.

А. Средние поля

Рассмотрим сначала динамическую систему (M, X) , которая допускает систему глобальных приближенных первых интегралов, задаваемых расслоением $p: M \Rightarrow P$. То есть поле X в $T^*(M)$ имеет вид $X = X_0 + Y$, где X_0 — вертикальная составляющая, касательная к слою p , а Y — горизонтальная составляющая, которая предполагается малой по сравнению с X_0 . Каждой точке p из P поставим в соответствие аттракторы соответствующей динамики (M, X_0) . Таким образом над \hat{P} задается пространство P' , каждый лист которого ограничен стратами бифуркации, вдоль которых соответствующий аттрактор разрушается катастрофой. Для простоты допустим, что устойчивый режим аттрактора c существует до тех пор, пока представляющая точка p из P не встречает страту S границы листа, соответствующего c в \hat{P} (это сводится к допущению, что преобразование аттракторов происходит с запаздыванием). Более того, поскольку аттрактор $c(X)$ исчезает в точке p из S , его бассейн притяжения, вообще говоря, захватывается другим аттрактором $c_1(X)$. Происходит скачок вдоль S от листка c к листку c_1 . В более сложных ситуациях достижение $c(X)$ может происходить посредством конкуренции между несколькими аттракторами. Мы не будем рассматривать сейчас этот случай. Пусть в точке \hat{p} листка $c(X)$ соответствует среднему горизонтальной составляющей для всех точек $c(X)$ (здесь предполагается, что на $c(X)$ существует эргодическое поле). Мы получаем таким образом на листке c вектор Y' и характеристику этого листка. В конечном итоге на поверхности \hat{P} мы получаем поле векторов Y' , которое называют средним полем динамики (M, X) . Может случиться, что среднее поле Y' само имеет структурно устойчивые аттракторы $c(Y')$, и если взять другие (приближенно) инвариантные параметры, эту конструкцию можно повторить.

Замечание. Здесь не рассматривается математически сложный вопрос об ошибке, которая возникает при замене действительной эволюции системы ее усредненной эволюцией (работы В.И. Арнольда [4] показывают сложность этой проблемы в случае гамильтоновых динамик). Однако следует заметить следующее: динамическая система, состоящая из двух осцилляторов с одинаковым периодом, которые слабо нелинейны и слабо связаны между собой, позволяет измерять энергию периодической осцилляции между двумя осцилляторами. Это феномен *нелинейных биений*. Здесь среднее поле приводит к распределению постоянной энер-

гии между двумя осцилляторами (см. примеч. [2]). Очень грубый характер этой ошибки проявляется уже на качественном уровне, несомненно, доказывая, что здесь среднее поле не является структурно устойчивым. В общем случае ошибка будет определяться отношением горизонтальной составляющей Y и X .

Примеры. Среднее поле, соответствующее элементарной катастрофе

1. *Складка.* Пусть S – гиперповерхность складки, которая ограничивает бассейн аттрактора c , и в результате столкновения с неустойчивым режимом c разрушается на S и захватывается устойчивым аттрактором c_1 . Пусть Y, Y_1 – поля, связанные с c и c_1 соответственно. Если S задана уравнением $z = 0$ и если область существования c это отрицательные z , то мы получим интересную ситуацию, предполагая, что z -составляющая Y положительна, а z -составляющая Y_1 отрицательна. Поле S будет иметь разрыв, превращающий его в отражающую стенку (рис. 6-2). Если Y наоборот ориентировано в сторону уменьшения z , то никакого интересного эффекта не возникнет, поскольку S окажется недостижимым (рис. 6-3).

2. *Сборка.* Обратимся к случаю катастрофы Риманна-Пюгоню. Внутри возврата, задаваемого уравнением $4u^3 + 27v^2 = 0$, при отрицательных значениях параметров конкурируют два устойчивых режима. Пусть Y_1, Y_2 – соответствующие поля. В начале координат эти два поля совпадают. Для симметрии допустим, что в O поле Y афинно переносится вдоль Ou . Интересным будет случай, когда v -составляющие Y_1 и Y_2 имеют противоположные знаки, что дает зеркальные ветви полукубической параболы $4u^3 + 27v^2 = 0$ (как было показано выше). Принимая теперь во внимание знак u -составляющей, можно получить глобальную конфигурацию воронки (в случае положительной u -составляющей), что обеспечивает возможность попасть в O из любой точки, находящейся внутри сборки. Если напротив u -составляющие Y_1 и Y_2 отрицательны, то мы получаем дисперсный процесс, расходящийся из O (рис. 6-5).

Интересная проблема, связанная со средним полем, заключается в том, чтобы показать, что ситуации схождения в воронку с дискретными поправками имеющие априори целевой ха-

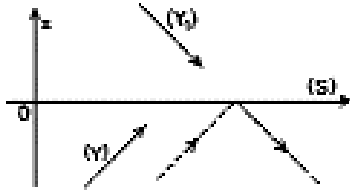


Рис. 6-2.

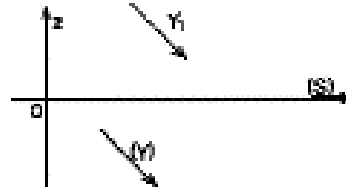


Рис. 6-3.

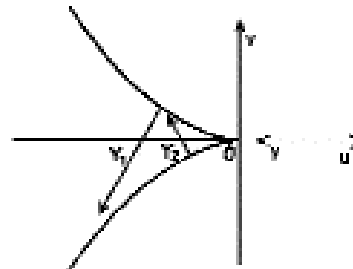
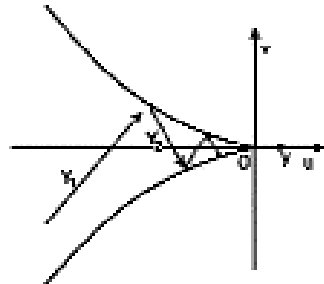


Рис 6-4. Рис. 6-5.

ракти, могут естественно возникать структурно устойчивым образом. Если допустить, что Y имеет слабую v -составляющую в начале координат, единственным эффектом такого возмущения будет более широкое раскрытие отверстия воронки. Это пример явления, названного Уоддингтоном *канализацией с острием* (cusped canalization).[15]

Выше были приведены только самые простые примеры полей, связанных с элементарными катастрофами. Приведем еще пример размерности два. Пусть в окрестности точки O конкурируют три устойчивых режима c_1, c_2, c_3 . Если теперь имеются три прямые складки S_{12}, S_{23}, S_{31} , вдоль которых происходят захваты аттракторов $c_1 \Rightarrow c_2, c_2 \Rightarrow c_3, c_3 \Rightarrow c_1$ соответственно и если средние поля Y_1, Y_2, Y_3 приблизительно постоянны, а направления даны на рис. 6-6, то можно увидеть, что происходит образование инвариантного притягивающего цикла, который оказывается структурно устойчивым (рис.6-6).

Полная топологическая классификация средних полей Y очевидным образом недоступна (эти разрывные поля известны в литературе под названием обрушивающихся систем). Однако априори можно допустить, что естественно возникают только поля Y , связанные со структурно устойчивой особенностью динамики-слоя, которая является организующим центром среднего поля Y , заданного на универсальной развертке этой особенности. С этой точки зрения важно сделать следующее замечание: в определенных ситуациях для подходящих значений горизонтальной составляющей Y (поскольку она не является постоянной на универсальной развертке) система может эволюционировать в направлении аттрактора, который вовсе не содержит начального организующего центра. Все это происходит так, как будто система имеет бесконечные первые интегралы, которые держат ее в удалении от организующего центра.

Пример. Вернемся к сборке и предположим, что u -составляющая U полей Y_1 и Y_2 положи-

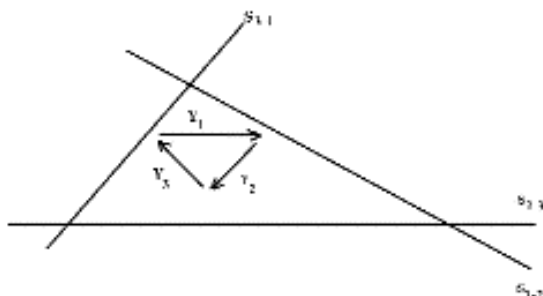


Рис. 6-6. Притягивающий центр, задаваемый разрывным полем.

тельна при $u < u_0$ и отрицательна при $0 > u > u_0$. Ясно, что отрезок прямой $u = u_0$, содержащийся в полукубической параболы, является притягивающим циклом, пробегаемым поочередно в двух направлениях (рис.6-7). Если затем область $u > u_0$ при отрицательном U стремится к нулю, притягивающий цикл снова стремится к организующему центру, который может восстановиться.

Б. Средние поля связи

Рассмотрим две динамические системы (M, X) и (P, Y) . Предположим сначала, что $Y = 0$ или по крайней мере мал. Любое взаимодействие между этими двумя системами можно определить как возмущение системы-произведения $(M \times P, X+Y)$. Если $Y = 0$ и если взаимодействие слабо, проекция $M \times P \Rightarrow P$ определяет систему приближенных первых интегралов возмущенной системы произведения. В общем случае над пространством P возникают средние поля Z , вызываемые взаимодействием. Структурно устойчивые аттракторы этих средних полей образуют устойчивые конфигурации взаимодействий на P , которые сопротивляются малым деформациям взаимодействия.

В той мере, в какой эти средние поля связаны со структурно устойчивой особенностью динамики-слоя, эти конфигурации совершенно не зависят от топологической природы дина-

мики (M, X) . Природа этих конфигураций может в весьма широких пределах быть независимой как от (M, X) , так и от взаимодействия.

Абстрактно говоря, можно образовать функциональное пространство всех динамик (M, X) . Это пространство лишено расслоения, которое задает множество бифуркаций H . Любое взаимодействие задает отображение h из P в B и среднее поле в образе $h(P)$. Для всех возможных конфигураций среднего поля, вызываемого взаимодействием существует универсальная модель.

В. Среднее поле, понятия масштаба и катастрофы

Мы видели, что динамика, заданная средним полем в пространстве P приближенных первых интегралов, может иметь структурно устойчивые аттракторы обычного типа (градиент). В этом случае макроскопическое наблюдение за процессом (то есть морфологией среднего поля) не дает возможности восстановить исходную динамику (M, X) , о существовании которой можно только догадываться. Но если средняя динамика демонстрирует явления структурной неустойчивости и в особенности обобщенной катастрофы, то об исходной динамике можно надеяться получить сведения, исследуя эволюцию катастроф. Эта эволюция будет эффективно зависеть от множества-ростка, о котором можно предположить, что он определяется динамикой-слоем (M, X) в начале катастрофы. Известно, что большую роль в научных наблюдениях играет фотография. А что такое фотография, как не *контролируемая химическая катастрофа*, множеством-ростком которой является множество точек ударов фотонов, которые требуется обнаружить? То же самое происходит при обнаружении элементарных частиц с помощью пузырьковых или искровых камер. Аналогичным образом, в эмбриологии многочисленные обобщенные катастрофы развития контролируются тонкой структурой нуклеиновых кислот хромосом. Все это рассуждение еще раз показывает теоретическую и практическую важность обобщенных катастроф, которые являются для нас практически единственным средством изучения бесконечно малого.

6.3. СЕМАНТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Пусть P – естественный процесс, разворачивающийся в открытой области W пространства-времени. Любой анализ процесса начинается со следующей задачи: определить области W , где морфология P структурно устойчива. Предположим, что процесс P структурно стабилен в открытой области $U \subset W$. Напомним, что под этим мы понимаем, что существует универсальная модель $K \subset U$, такая что ограничение P на U изоморфно локальному процессу P' , индуцированному в K вложением $j: U \Rightarrow U$. В этом случае говорят, что P задано на U морфогенетическим полем, или согласно терминологии К.Уоддингтона [5], что P представляет собой *креод* на U .

А. Определение креода

Креод c в пространстве-времени \mathbf{R}^3 определяется:

1. Открытой областью U на гиперплоскости $t = 0$, называемой *областью инициации* c .

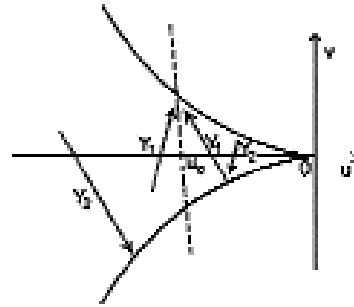


Рис.6-7 Притягивающий цикл, сечение универсальной развертки сборки.

2. Как и в любом естественном процессе развития, события происходящие в точке пространства-времени x могут осуществляться только как события, расположенные на вершине конуса $C(x)$, называемого конусом будущего (подобно световому конусу в теории относительности). Объединение таких конусов, при котором x пробегает по открытой области инициации U дает открытую область W , называемую зоной влияния креода.

3. Существует открытая область V , содержащаяся в W и содержащая U в своей границей, называемая базой креода s и обозначаемая $|c|$. На V существует морфогенетическое поле (статического или метаболического типа), заданное с точностью до изоморфизма. Дополнение $W-V$ образует зону бифуркации или *омбилическую* зону креода. (см. рис. 6-8)



Рис. 6-8. Схема креода.

Может случиться, что база V креода распространяется до $t = +\infty$ и что сечение морфогенетического поля, задаваемое на гиперплоскости t , постоянно стремится к фиксированному пределу при t стремящемся к бесконечности. В этом случае говорят, что креод *асимптотичен* (см. рис. 6-9).

Замечание. Понятие креода отличается от более общего понятия морфогенетического поля только той особой ролью, которая уделяется времени (и направлению его изменения). Необратимость времени оправдывается следующим фактом: в естественных процессах, в которых участвует диффузия и которые хотя бы частично управляются уравнениями параболического типа, возможности качественной ретроспекции (восстановления прошлого на основании настоящего), несомненно, гораздо более ограничены, чем возможности предсказания.

Б. Подкреод креода

Креод J является подкреодом креода K , если область инициации i , следовательно, база креода J содержатся в базе креода K . Морфогенетическое поле задается базой J путем вложения баз $|J| \Rightarrow |K|$.

Если в базе креода K задана точка x , то существует бесконечно много подкреодов K , база которых содержит точку x . Практически любая достаточно малая окрестность задает такой подкреод.

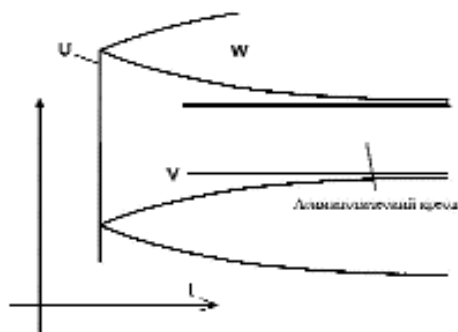


Рис. 6-9. Асимптотический креод.

Поскольку точка x это обычная катастрофическая точка морфогенетического поля, связанного с K , существует фундаментальная система подкреодов, содержащих x , которые все изоморфны. Напомним, что если x это существенная катастрофическая точка поля, такая система не существует.

В. Атлас преемственности креодов

Если открытая область инициации креода g расположена на пересечении омбилических зон креодов k_1, k_2, \dots, k_n , то говорят, что g является *наследником* k_1, k_2, \dots, k_n . В принципе один и тот же креод может иметь много сис-

тем креодов-предков и наоборот, одна и та же система креодов может породить многочисленные конфигурации потомков. Полное описание семантической модели требует задания всех возможных отношений преемственности между креодами по всем известным правилам, которые позволяют уменьшить неопределенность, присущую этой схеме. С этой точки зрения следует учитывать не только абстрактные отношения преемственности креодов, но и относительные геометрические положения креодов в этой конфигурации. Прежде чем подойти к общей теории таких моделей, полезно показать на примерах большую обобщающую силу этой схемы.

Г. Примеры семантических моделей

1. Диффузия капли чернил в воде.

Вспомним эксперимент Гельмгольца, упоминаемый д'Арси Томпсоном [2]. Падая с высоты нескольких сантиметров, капля чернил погружается в воду. В результате торможения жидкой средой она останавливается и порождает завихрение (соответствующее креоду в виде перевернутого гриба). Потом это завихрение разделяется на три или четыре капельки, каждая из которых после падения порождает свое маленькое завихренище. Здесь креод «перевернутый гриб» наследует сам себя посредством омбилической зоны, которая свидетельствует о большой неустойчивости процесса. При этом даже число капелек, на которые распадается завихрение, очень сильно зависит от начальных условий. На самом деле это наследование является типичным примером обобщенной катастрофы с разложением метаболической формы завихрения в статическую форму капелек.

2. Диаграммы Фейнмана в теории элементарных частиц. В этом случае креоды — это элементарные взаимодействия, символизируемые вершинами диаграммы. Вся внутренняя структура взаимодействия (о которой, впрочем, ничего неизвестно) не принимается во внимание. Отношения преемственности между вершинами задаются ребрами, полностью характеризующимися качественной природой частицы (электрона, фотона...) и ее моментом. В этой теории допускаются любые конфигурации, совместимые с комбинаторными ограничениями, накладываемыми на элементарные взаимодействия. Задача теории состоит в том, чтобы по крайней мере косвенно оценить относительную вероятность каждой конфигурации.

3. В биологии практически любая морфология может рассматриваться как семантическая модель (см. гл. 9 и 10).

4. Поведение животных и человека можно разложить на функциональные поля, играющие роль креодов. В частности, человеческий язык является системой, описываемой семантической моделью размерности один (время), роль креодов в которой играют слова.

5. Этот последний пример в высшей степени значим. Если верно, что, как говорит Кондильяк, «любая наука — это хорошо сделанный язык», то не менее верно и то, что любое естественное явление — это плохо понятый язык. Напомним здесь еще раз Гераклита: «Владыка, оракул которого — в Дельфах, ни говорит, ни скрывает — он обозначает».

Д. Анализ семантической модели

Для анализа этой модели мы будем исходить как раз из частного случая языка. Первый метод это формальный штурм. Полностью игнорируется внутренняя структура каждого креода (здесь — значение любого слова), и описываются только формальные соотношения. Для достоверных выводов касательно формальной структуры отношений преемственности прежде всего необходимо собрать достаточно обширный экспериментальный материал. Следует, как говорят лингвисты, построить «корпус» модели. Отсюда в принципе

можно вывести «грамматику», которая регулирует связь креодов в конфигурациях, представленных в тексте.

Построение корпуса это важнейшая и первоочередная задача экспериментатора. Множество наук, и биология в их числе, практически не вышли из этой стадии. В принципе, в лингвистике можно, благодаря интуитивно воспринимаемому значению слов, прийти к формальной классификации слов, связанной с их грамматическими функциями. Можно также определить формальные условия, при которых фраза будет грамматически правильна, но не обязательно будет что-то обозначать. Задача лингвистов очень тяжела, потому что между устной или письменной структурой слова и его значением практически нет никакой связи. Выбор соответствующих слов для определенных обозначаемых, совершалась в результате длительного исторического процесса, квази-перманентной обобщенной катастрофы. Это, впрочем, отражает коммуникативную функцию естественного человеческого языка, которая накладывает строгие ограничения на структуру выражения (см. в этой связи гл. 13).

В естественных процессах, не связанных с коммуникацией, которые могут быть сведены к языкам только в порядке метафоры (впрочем, полезной метафоры), следует рассчитывать, что внутренняя структура каждого креода относительно прозрачна. В таком языке все слова были бы звукоподражаниями. В действительности хорошо было бы постулировать, что априори в таком креоде нет ничего, кроме того, что можно обнаружить феноменологически, т.е. кроме множества его катастрофических точек, и действовать в рамках наиболее экономичного (conservative, как говорят по-английски) динамического анализа этого креода. В этом свете *значение* креода — это не что иное, как топологическая структура его катастроф, и, по возможности, динамический анализ, ведущий к определению организующего центра креода.

Е. Динамический анализ креодов статической модели

Здесь мы ограничимся креодами, связанными с полями градиентных динамик, потому что только их можно рассматривать математически. Метаболические модели через катаболические катастрофы ведут к обобщенным катастрофам, о которых мы пока еще ничего не знаем. В обычном пространстве-времени все креоды, связанные с этой моделью, уже описаны. Что можно сказать об их связях? Некоторые из них встречаются чаще, чем другие. Важный класс таких конфигураций определяется организующими центрами более высокой коразмерности, чем коразмерность пространства-времени. Предположим, к примеру, что мы берем струю z определяющей функции, но коразмерности, например, пять. Универсальная развертка особенности, задаваемой этой струей, имеет размерность пять, а условие Максвелла определяет универсальное множество катастроф K . Пространство \mathbf{R}^4 , трансверсальное K в окрестности начала координат, дает конфигурацию креодов структурно устойчивых относительно малых деформаций глобальной эволюции процесса. В этом случае о струе z удобно говорить как об организующем центре конфигурации. Локально устойчивые конфигурации креодов (то есть грамматика процесса) полностью содержатся в топологии множества бифуркации функционального пространства потенциалов. Деформация погружения \mathbf{R}^4 в универсальную развертку, достигая, к примеру, исходной точки z , приводит к модификации устойчивой конфигурации креодов. Таким образом, можно говорить о *связанных* или *дуальных* конфигурациях по отношению к организующему центру.

Идея, что последовательность устойчивых трансформаций нашего пространства-времени могут управляться, программироваться организующим центром, то есть некоторой *внешней по отношению к самому пространству-времени* алгебраической структурой, может показаться трудно приемлемой абстракцией. Главное, как всегда, видеть в этом только язык, предназначенный содействовать интуитивному выявлению глобальных координат всех частных систем,

участвующих в этих преобразованиях. Мы приложим эти идеи к биологии (главы 9 и 10) и к естественному языку (глава 13).

ДОПОЛНЕНИЕ

Морфология спиралевидных туманностей

Пусть O — центр тяжести облака газа, сконцентрировавшегося под воздействием гравитации. Предположим, что существенная часть этой массы уже сконцентрирована в окрестности O , образуя ядро. Рассмотрим поле скоростей газа в окрестности ядра, которое в первом приближении мы будем считать точечным.

Пусть J — полный импульс газа. Поле скоростей $V(m)$ в O нулевое. Допустим, что нуль поля V является образующей особенностью векторного поля. Это означает, что матрица M , образованная линейными частями составляющих V , имеет различные собственные значения, действительные части которых отличны от нуля. Поскольку глобальный процесс — это свертка, необходимо, чтобы по крайней мере одно из собственных значений имело отрицательную действительную часть. В то же время в этом облаке представлены только те стационарные состояния, у которых гравитационный потенциал определяется оборотом вокруг оси Oz параллельно J , исходящему из O (см. [6], теорема 3.5). При этих условиях единственная матрица M , совместимая со стационарным состоянием, это та, для которой Oz имеет собственный вектор, а два других собственных значения s , s' определяют вращения в ортогональной плоскости Oxy . Допустим, что наша матрица M является, по крайней мере, вначале, близкой к матрице, связанной с таким стационарным состоянием.

Если это так, то можно допустить, что матрица M изначально свертывается как по Oz , так и по Oxy . Но свертка по Oz , на которую не действует центробежная сила, возникающая в результате вращения, идет с ускорением, так что у собственного вектора, соответствующего Oz , уменьшается собственное значение. Под действием падающей на ядро материи поле на Oxy начинает снова (слабо) расширяться. Поэтому особенность поля V в O является бифуркацией Хопфа. Поле образует вокруг O на Oxy инвариантный притягивающий цикл. Такой цикл, притягивающая траектория поля V , символизирует кольцо, образующееся в диске туманности. Разрыв кольца по экватору ядра приводит к реактивному возобновлению свертывания поля на O . Это выражается в бифуркации, создающей закрытую отталкивающуюся траекторию. Потом новое расширение на Oxy приводит к новому образованию концентрического кольца внутри первого и т.д. Геометрически можно считать, что собственное значение s мнимой положительной частью ωi , где ω — угловая скорость вращения, подвергается вибрации с двух сторон мнимой оси. Но в то же время эти кольца удаляются от ядра, сохраняя свою скорость вращения. Поэтому они придают ядру импульс. Нужно быть готовым к тому, что мнимая часть i числа s уменьшается по ходу этого процесса. Окончательная кривая, описывающая s на комплексной плоскости, будет иметь вид 6-10a) или 6-10b). В случае а) мы имеем предельное состояние, определяемое чистым вращением ($s_0 = i\omega$). Это соответствует случаю обычных спиралевидных туманностей (ядро находится в состоянии относительно медленного вращения его периферии; наша модель не претендует на описание внутренней части ядра, где, возможно, следует ожидать более высоких скоростей вращения). В случае б) собственное значение s в конце концов встречается с действительной осью в O или в окрестности O . При бифуркации два собственных значения s сливаются и становятся действительными. Отрицательное значение γ_1 дает сильно сжимающий собственный вектор. Положительное значение γ_2 дает слабо растягивающий собственный вектор. Материя диска ядра будет таким образом концентрироваться на оси, которая образует нечто вроде рукава, протянутого вдоль диаметра uu' централь-

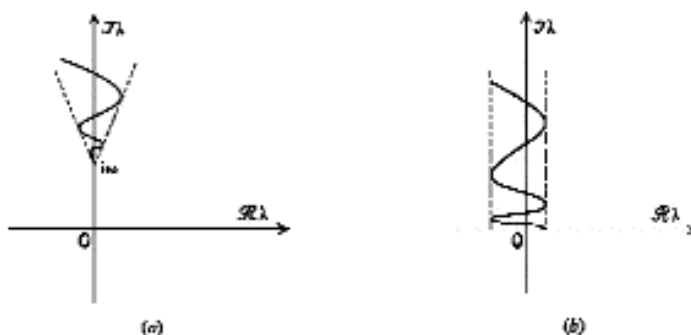


Рис. 6-10.

ного диска. В результате силы гравитации, действующие на периферическое кольцо (находящееся в медленном вращении) захватывают эту полоску материи. Таким образом образуется фигура вида θ , которую часто можно наблюдать в перегороженных спиралях. Вытянутый рукав $\alpha\alpha'$ разбивается и разлетается на звезды (см. рис. 6-11). Затем активные рукава, увлекаемые дифференциальным вращением, выпрямляются, принимая прямолинейную форму, задаваемую полем градиентного типа, которое накладывается на поле вращения.

Спиралевидная структура. Мы видели, что в нашей модели туманности нормальной оказывается структура концентрических колец, а не спиралевидных рукавов. Очень похоже, что более тонкая модель должна принимать во внимание форму ядра и структуру экваториального обрушения. Если сравнить линзообразную форму поздних эллиптических туманностей (стадия E7, пример 4530) с еще более поздним состоянием (как 4594), то невозможно избежать ощущения, что здесь произошло обрушение гиперболического типа вдоль экваториального ребра. Возникающий сегмент остриеобразного сечения оказывается неустойчивым и разбивается на замкнутые кольца или спирали. Как происходит это явление? Можно предположить, что сначала на экваторе появляется пара гиперболических омбилических точек m и m' ; каждая из которых, вообще говоря, может перемещаться по экватору, а затем в результате параболического обрушения периодического характера появляется первое периферическое кольцо. Если точка m захватывает точку m' , то может возникнуть замкнутое кольцо. Затем возможно образование на экваторе устойчивой конфигурации, состоящей из точек выброса, например, из двух диаметрально противоположных точек. Каждая из этих точек порождает свободный рукав. Однако можно считать, что речь здесь идет о неустойчивой ситуации, подверженной значительным топологическим изменениям, в ходе которых рукава могут захватывать друг друга и порождать различные разветвленные конфигурации. Предложенная выше модель перегороженных спиралей имеет серьезный недостаток: она требует, чтобы диаметральный рукав был неподвижен. Кажется, что этот рукав можно было бы оживить, заставив его вращаться вокруг центра O . В этом можно было бы усмотреть действие магнитного поля. Аксиальное магнитное поле оказывает на заряженную массу тот же эффект, что и сила Кориолиса, возникающая в результате враще-

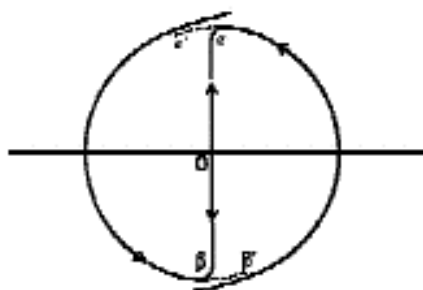


Рис. 6-11.

ния.

Можно также заметить, что движение точек выброса на экваторе центрального диска не обязательно связано с эффективным вращением ядра. Аналогичным образом перемещение (гиперболической омбилической) точки обрушения на гребне разбивающейся волны не связано с сопутствующим перемещением жидкости.

ПРИМЕЧАНИЯ

[*]Этим замечанием я обязан В.И. Арнольду.

[1]. Устойчивость симметрий. Периодическое повторение некоторых обобщенных катастроф может объясняться следующим соображением: конечное решение является плодом конкуренции между комками новой фазы, играющими роль центров-аттракторов для материи новой фазы. Говоря антропоморфно, при борьбе между приблизительно равными по силе и ловкости партнерами высока вероятность того, что локальная серия побед одного партнера над другим будет неустойчива и сопровождаться реваншами. Говоря геометрически, если область аттрактора незаконно распространяется на некоторую точку, она формирует в этой точке зуб, который имеет сравнительно слабый градиентный аттрактор и относительно длинную границу. Эта зона оказывается хрупкой и уязвимой для вражеских атак. Было бы очень интересно предложить геометрическую модель для процессов этого типа. Более подробное рассмотрение этой проблемы см. в [3].

[2]. Это утверждение корректно только если гамильтониан взаимодействия не содержит квадратичного члена. В противном случае — который и встречается на практике — среднее поле эффективно ведет к синусоидально колеблющейся энергии, распределенной между двумя осцилляторами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Sotomayor, *Estabilidade estrutural de primeira ordem e variedades de Banach*, These I.M.P.A., Rio de Janeiro, 1964. *Generic one-parameter families of vector fields on twodimensional manifolds*, в печати в Topology.

[2] D'Arcy Thomson, *On Growth and Form*, Cambridge University Press, 1945, p.660, 505, 396.

[3] H.Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, 1952.

[4] V.I. Arnold, A.Avez, *Problemes ergodique en Mecanique classique*, Gauthier-Villars, Paris 1967, параграф 22.

[5] C.H. Waddington, *The strategy of the genes*, Allen and Unwin, London, 1957.

[6] S. Chandrasekhar, *Principles of stellar Dynamics*, Dover, NY, 1942.

ГЛАВА 7

ДИНАМИКА ФОРМ

«Здесь многое вызывает восхищение и потрясение»

Лорд Рейли о кольцах Лизганга

Большая часть идей, высказываемых в этой главе, носят несколько авантюрный характер. Им недостает четких формулировок и строгих математических доказательств. Некоторые читатели согласятся со мной, что интересность или полезность математических или физических идей редко являются синонимом формальной строгости. Другие же должны будут просто подождать несколько лет...

7.1. МЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

А. Ограничения классических и квантовых моделей

Механические модели бывают только двух типов: классические и квантовые. Напомним, что классическая модель строится с помощью конфигурационного пространства (дифференцируемого многообразия) M и фазового пространства (пространства ковекторов) $T^*(M)$. задается гамильтониан $H: T(M) \Rightarrow \mathbf{R}$ и динамическое поле X , которое является симплектическим градиентом гамильтониана, т.е. $i(X).a = dH$, где a — это каноническая 2-форма $a = \sum dp_i \wedge dq_i$ на $T^*(M)$.

В квантовой модели состояния системы параметризуются векторами гильбертова пространства, а эволюция вектора состояния задается самосопряженным оператором H (гамильтонианом):

$$\frac{d\psi}{dt} = iH(\psi)$$

Эти две модели имеют одинаковый характер. Они представляют интерес, только когда гамильтониан H (классический или квантовый) достаточно прост, чтобы допустить явные вычисления, или по меньшей мере глобальную качественную оценку динамики. Для каждой из этих двух моделей существует типичный пример, свидетельствующий о ее триумфе. Это ньютоновская механика (с законом притяжения $1/r^2$) в классическом случае и атом водорода (с гамильтонианом $\Delta - 1/r^2$) в квантовом случае. Эти две области науки обеспечили успех соответствующих моделей. Но как только возникает необходимость рассмотреть более сложные ситуации, обе модели сразу же демонстрируют свою неэффективность. Причина этого проста. Если гамильтониан задается априорно, интегрирование уравнений движения может оказаться затруднительным или вовсе невозможным. В этой связи стоит вспомнить о проблеме трех тел, которая не поддается никаким усилиям механики, ни классической, ни квантовой. Если же исходят из экспериментальных данных и пытаются сконструировать подходящую модель

(классическую или квантовую), которая их объясняет, проблема, вообще говоря, допускает слишком много решений, и гамильтониан подбирается *ad hoc*. В этом случае он оказывается искусственным и не связанным сущностным образом с конфигурационным пространством. С этой точки зрения было бы неплохо произвести учет всех естественных классических динамик. Это, к примеру, геодезические потоки на таких замечательных многообразиях, как группы Ли, и однородные пространства, снабженные каноническими метриками, допускающими большую группу изометрии. Не кажется случайным, что в некоторых естественных консервативных явлениях эти особые динамики реализуются геометрически предсказуемым образом. Может быть, в этом следует видеть основание для применения групп внутренней симметрии в теории элементарных частиц. Но это возможно только на малом числе пространств с естественной метрикой, которая обеспечивает им большую группу изометрии. Поле отображений естественных классических моделей также очень узко. В квантовом случае ситуация совершенно аналогична.

Б. Детерминизм

К этим ограничениям известных механических моделей добавляется классическая контроверза детерминизма. Обычно считается, что явления макроскопического мира описываются классической механикой и вследствие этого строго детерминистичны, тогда как явления квантовых масштабов в сущности недетерминированы. Это книжное видение вещей, и оно, как мы полагаем, глубоко ошибочно. Я здесь не собираюсь обсуждать вопросы квантового индетерминизма. Хочу только отметить, что аргумент, на котором он базируется — принцип дополненности или неопределенности — выявляет только приближенный и неадекватный характер точечной модели частиц. Втискивая объект в концептуальные рамки, слишком бедные для его отображения, не приходится удивляться возникающей несовместимости или схожим трудностям. Вернемся в макроскопический мир. Даже если встать на в высшей степени метафизическую и даже теологическую лапласову точку зрения, согласно которой существует универсальная дифференциальная система, параметрирующая состояния Вселенной, нужно признать, что такая модель может допустить экспериментальный контроль только при соблюдении следующих двух условий: А) модель допускает *процедуру локализации*, с помощью которой можно строить локальные модели; Б) построенные таким образом локальные модели структурно устойчивы. Но банальным экспериментальным фактом (см. Введение) является то, что многие явления являются неустойчивыми. Таким образом, очевидно, что никакой экспериментальный критерий не позволяет отличить структурно неустойчивое, но детерминированное явление, от явления неустойчивого в принципе. Вот почему, как только проблема детерминизма переводится из философской плоскости в феноменологическую*, она формулируется в виде утверждения, которое трудно оспорить: *имеются более и менее детерминированные явления*. Более или менее детерминированный характер процесса выражается преимущественно более или менее гладкой (дифференцируемой) непрерывностью этого процесса как функции исходных условий. Я добавлю к этому следующий постулат.

Постулат (ЛС) *Более или менее детерминированный характер процесса определяется локальным состоянием этого процесса.* Для каждого процесса, удовлетворяющего (ЛС), имеется, таким образом, два типа областей: области, где процесс хорошо детерминирован и структурно устойчив, и зоны неустойчивости и недетерминированности. Таким образом, вводятся семантические модели, рассмотренные в предыдущей главе. Области первого типа, вероятные островки детерминизма, будут креодами Уоддингтона. Области неустойчивости это омбилические зоны креодов. Очень часто в этих областях происходят обобщенные катастрофы, которые невозможно формализовать.

Эти модели, превращающие детерминизм и неустойчивость в локальные свойства рассматриваемого процесса, кажутся мало приложимыми к биологии. Будут ли они когда-нибудь приспособлены к квантовым процессам? По крайней мере, на это можно надеяться.

7.2. ИНФОРМАЦИЯ И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ

А. Принятое понятие информации

Эта глава написана под впечатлением от современного состояния молекулярной биологии, где сегодня часто употребляется слово «информация». Постоянно говорят об информации, содержащейся в нуклеиновых кислотах хромосом, о потоке информации, испускаемом ДНК в цитоплазму при посредничестве передатчика РНК и т.д. Биологи подсчитывают в *биотах* количество информации, содержащейся в хромосоме *Escherichia coli*, и сравнивают ее с информацией, содержащейся в геноме человека, неявно постулируя равновероятность всех комбинаций нуклеотидов в цепи ДНК, что трудно проверить теоретически или экспериментально. Даже если такое употребление термина неоправданно, надо тем не менее признать, что слово «информация» вскрывает полезное понятие, имеющее право на существование. Это ставит вопрос о научном содержании понятия информации и о его высвобождении из стохастической оболочки, в которую оно до сих пор заключено.

Б. Относительный характер сложности

Центральный тезис этой главы заключается в том, что там, где обычно говорят об информации, следовало бы употреблять слово «форма». Мера информации – как, впрочем, и термодинамические величины энергии и энтропии – должна поддаваться геометрической интерпретации как *топологическая сложность формы*. К несчастью, при современном состоянии топологии сложности формы трудно дать точное определение. Одна из главных трудностей вытекает из следующего факта: если задана динамическая система, параметризованная формой F , сложность F только изредка задается сущностно связанным с F способом. В общем случае F необходимо погрузить в непрерывное семейство G , и определять топологическую сложность F относительно G . С этой точки зрения энергия оказывается сложностью относительно наибольшего непрерывного семейства, в которое можно погрузить систему. Эта сложность сохраняет смысл при любых взаимодействиях системы с внешним миром. Это в каком-то смысле «универсальная форма» сложности, самая бедная с точки зрения информации. Если за семейство G , содержащее форму F , принять более мелкие подсемейства, которые сохраняют более частные особенности формы F , получают более специальные сложности, которые провозможно рассматривать как разновидности информации. Обратимся и здесь к примеру из биологии. Пластиды растений извлекают из света самую большую сложность, энергию. Сетчатка глаз животных извлекает из светового поля корреляции, формы, иными словами, информацию, часто необходимую для получения пищи, т.е. энергии. Теперь перейдем к более техническим деталям, чтобы определить сложность формы.

В. Топологическая сложность формы

Вернемся к случаю, во многих аспектах типичному, связанному с формой дифференци-

* (здесь) то есть формулируется в терминах экспериментальных наблюдений. - *Прим. ред.*

руемого отображения многообразия X на многообразии Y . Мы видели, что в функциональном пространстве $L(X, Y)$ существует локально замкнутая гиперповерхность с особенностями H , называемая множеством бифуркации, такая что любая связная составляющая $L(X, Y) - H$ задает структурно устойчивую форму отображений X в Y . Пусть f, g — две такие формы. Если — это наше предположение — f может быть непрерывно деформировано в g , то существуют дифференцируемые пути, связывающие f и g . Почти любой путь этого типа пересекает гиперповерхность H трансверсально. Обозначим через $d(f, g)$ минимальное число точек пересечения такого пути со стратами из H коразмерности один. Это позволяет определить на множестве форм расстояние с целым значением, поскольку $d(f, g) = d(g, f)$ (симметричность). Если $d(f, g) = 0$, то f и g имеют одну и ту же форму (рефлексивность). Наконец, выполняется неравенство треугольника: если f, g и k три структурно устойчивых отображения, то

$$d(f, k) \leq d(f, g) + d(g, k)$$

Попытаемся теперь определить форму f_0 , которую можно рассматривать как топологически простейшую. Это будет базовая форма (ground form) нашего семейства форм. Определим сложность некоторой (структурно устойчивой) формы f как целое число $q(f) = d(f_0, f)$. Сложность структурно неустойчивого отображения g можно посредством обобщения определить как верхнюю границу сложностей $d(f_0, g')$, где g' — произвольное структурно устойчивое отображение из окрестности g . С этой точки зрения определение сложности формы основывается в первую очередь на выборе простейшей (базовой) формы. Таким образом этот выбор поднимает проблему, пока еще практически не затронутую в топологии.

Г. Выбор базовой формы

Пусть $m = \dim X$ — размерность многообразия-прообраза, а $n = \dim Y$ — размерность пространства-образа. По крайней мере в одном случае выбор базовой формы не вызывает сомнений. Если $n \geq 2m + 1$, то в любом классе гомотопий отображений из X в Y , имеется простейшая форма, а именно погружение X в Y . Любые два таких погружения изотопичны, так что топологический тип погружения является единственным. При $n < 2m + 1$, к сожалению, о простейшей форме нельзя сказать ничего определенного, и остается предположить, что она в этом случае уже не будет единственной. Можно только надеяться, что число таких форм будет конечным. При $n = m$ в качестве простейших естественно рассматривать отображения без особых точек. Такие отображения являются дифференцируемыми расслоениями (по крайней мере, когда X и Y компактны). Поэтому неизвестно, является ли число расслоений (заданных с точностью до гомеоморфизма) конечным или нет. Априори в этом приходится сомневаться (случай накрывающего отображения окружности в себя $S^1 \rightarrow S^1$, как кажется, достоверно указывает на отрицательный ответ). Можно ли с помощью гомологических или гомотопических критериев уточнить простейшую (или простейшие) форму (или формы)? Я ограничусь здесь постановкой вопроса. Другой очень естественный путь для оценки сложности отображения заключается в принятии во внимание особенностей этого отображения. Если в первом приближении допустить, что сложность замкнутого множества K можно связать с суммой чисел Бетти $\sum b_i(K)$, то можно попытаться определить сложность отображения f как сумму чисел Бетти множества особых значений f . Тогда для дифференцируемой функции $f: V \rightarrow \mathbf{R}$ сложность будет определяться общим числом критических точек этой функции, предполагаемых невырожденными и квадратичными. На таком подходе основаны известные результаты по топологии графиков собственных функций уравнения колеблющихся мембран (или уравнения Шредингера). К сожалению, это все верно только в общем, тогда как на компактном многообразии V имеется бесконечное число различных топологических типов дифференцируемых функций, имеющих минимальное число критических точек, требуемое теорией Морса. У некоторых из

этих функций клетки градиента расположены сложнее и в каком-то смысле более связаны, чем у других. Последние на этом основании можно считать более простыми [1]. Тем не менее, в классических динамических ситуациях, например, в случае уравнения колеблющейся мембраны, кажется, что сложность можно описать непосредственно в терминах особенностей. Наконец, сделаем замечание относительно сложности структурно неустойчивых форм. Отображения, имеющие особенности бесконечной коразмерности, обязательно имеют и бесконечную сложность, поскольку они могут быть локально приближены отображениями произвольно большой сложности. Таким образом, действительная функция $f: \mathbf{R}^n \Rightarrow R$ постоянная на открытой области U из \mathbf{R}^n имеет в каждой точке U особенность бесконечной коразмерности. Поэтому ее сложность тоже бесконечна. Заметим, впрочем, что любая функция f может быть преобразована в тождественный ноль с помощью непрерывной гомотетии, допускающей между любыми функциями f и g путь, имеющий при любом значении параметров только три значения f , 0 и g . Функция 0 также прилегает ко всем стратам структурно устойчивых форм в функциональном пространстве $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$.

Д. Сложность в пространстве-произведении

Пусть имеются два функциональных пространства $F = L(X, Y)$, $G = L(A, B)$. Пусть $L(X \times A, Y \times B) = H$ – пространство отображений произведения из $X \times A$ на $Y \times B$. Имеется каноническое инъективное отображение $F \times G$ на H , определяемое как

$$j(f, g)(x, a) = (f(x), g(a)).$$

Если f, g – два структурно устойчивых отображения из F и, соответственно, из G , то отображение-образ $j(f, g)$ будет также структурно устойчивым в пространстве H . В функциональном пространстве H существует целый класс открытых множеств, образуемых произведениями множеств, соответствующих структурно устойчивым отображениям сомножителей. Эти формы, называемые *разложимыми*, характеризуются тем, что если фиксировать одну из координат a или x , то возникающие секущие отображения в Y , и, соответственно, в B будут структурно устойчивыми. Если F и G – конфигурационные пространства двух динамических систем, то говорят, что между этими системами имеется *слабое взаимодействие*, если график отображения $h: (x, a) \Rightarrow (y, b)$ из H является разложимым (т.е. остается структурно устойчивым при разложении). *Сильное взаимодействие* между системами имеет место тогда, когда график h не является разложимой формой.

В пространстве H , как и в любом функциональном пространстве дифференцируемых отображений, имеется подмножество бифуркации K . Это подмножество содержит образ (по j) произведения множеств бифуркации F и G . Пусть заданы множества бифуркаций сомножителей F и G . Зададим в H базовую форму как образ по j произведения базовых форм F и G . Нетрудно видеть, что при этих условиях сложность разложимой формы (f, g) в H меньше суммы сложностей форм сомножителей f и g соответственно в F и G . Действительно, обозначим через f_0, g_0 базовые формы F и G соответственно. Любую разложимую форму H вида (f, g) можно соединить с базовой формой (f_0, g_0) дифференцируемым путем, состоящим из

1. пути, преобразующего заданное отображение h в отображение вида (f, g) (которое не содержит никакого изменения формы; это возможно на основании предположении о том, что h разложимо);

2. пути вида f, g , преобразующего f и g к базовым формам f_0, g_0 и трансверсально пересекающего множества бифуркации F и G в конечном числе точек, равном сумме сложностей $q_c(f) + q_c(g)$. Поскольку в H могут существовать и другие пути, которые связывают h с базовой формой,

$$qh(f, g) = qf(f) + qg(g).$$

Таким образом, топологическая сложность ведет себя *субаддитивно* относительно операции топологического произведения двух функциональных пространств. Это свойство — классический аналог негэнтропии или, иначе говоря, информации, связанной с двумя случайными процессами. Впрочем, очевидно, что это свойство будет иметь место и при более общем определении топологической сложности дифференцируемого отображения, чем то, которое было здесь рассмотрено.

7.3. ИНФОРМАЦИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЕ И СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

А. Свободное взаимодействие

Понятие накопления информации или *памяти* с точки зрения общей динамики приводит к курьезному парадоксу. Если M — система хранения информации, то информация, содержащаяся в M , тем или иным способом определяется структурно устойчивыми состояниями, в которых может находиться M . В самом деле, от информации требуется, чтобы она сохранялась в течение времени. Поэтому M должна быть в структурно устойчивом состоянии. Но память полезна, только если она выдает информацию. Поэтому необходимо, чтобы при взаимодействии с воспринимающей системой A система M была способна вызвать большие изменения системы A , не претерпевая возмущений, которые вывели бы ее из структурно устойчивого состояния. Какие ограничения при таком несимметричном поведении должны быть наложены на структуру систем M и A ?

Ясно, что какими бы ни были системы M и A , всегда можно вообразить потенциалы взаимодействия, дающие качественное представление о желаемом поведении. Чтобы минимизировать роль взаимодействия, нужно задавать их сколь возможно слабыми. С этой целью мы вводим понятие *свободного взаимодействия* двух динамических систем. Под этим мы понимаем слабое возмущение в произвольном направлении, начиная с положения, заданного топологическим произведением двух систем (случай нулевого взаимодействия). Если системы M и A — структурно устойчивые статические формы (например, градиентные динамики), нужно также исходить из их топологического произведения. Тогда свободное взаимодействие этих систем не будет иметь никакого качественного эффекта. *Между свободно взаимодействующими статическими формами обмен информацией невозможен.* Однако свободное взаимодействие двух метаболических форм может производить значительный качественный эффект. Как известно, *топологическое произведение двух структурно устойчивых динамических систем в общем случае не является структурно устойчивым.* Так два постоянных поля на окружностях S_1 и S_2 задают на торе $S_1 \times S_2$ параллельное поле, которое не является структурно устойчивым. Если число вращения рационально, то это поле вырождается в структурно устойчивое поле с замкнутыми притягивающими траекториями. Это явление резонанса (когда число вращения иррационально, малое возмущение делает его рациональным). Таким образом, между двумя системами с рекурренцией всегда возникают *резонансы*, устойчивость которых (и качественное общее воздействие на эволюцию системы-произведения) тем больше, чем меньше знаменатель у резонансного отношения (числа вращения). Следовательно между двумя метаболическими формами при свободном взаимодействии всегда происходит *обмен значением*. Случай произведения статической формы на метаболическую еще не изучался с математической точки зрения [2]. Однако кажется, что в этом случае из-за отсутствия резонанса возбуждающее взаимодействие не будет иметь места. Приложим теперь эти рассуждения к нескольким примерам.

Примеры. Для того, чтобы заставить две системы взаимодействовать, в принципе доста-

точно сблизить их в пространстве или же привести их в контакт. Типичный пример статической формы это твердое (кристаллическое) тело (сейчас мы увидим, какие ограничения мы вынуждены будем наложить на это утверждение). Применяя приведенную выше теорему о том, что между статическими формами не возникает свободного взаимодействия, мы замечаем, что между твердыми веществами трудно осуществить химическую реакцию. Как в случае с черным порошком, чтобы начать реакцию необходимо воспользоваться метаболическим посредником, например, огнем.

В другом примере, связанном с твердыми телами, а именно в системе «ключ-замок», столь любимой биохимиками, взаимодействие невозможно, если не предположить, что ключ подвижен (и во всех допустимых положениях является дополнительным к скважине). Если бы ключ нельзя было воткнуть и повернуть, он не был бы для скважины носителем информации. В этом случае мы имеем типичный пример ситуации, в которой (если считать, что ключ и скважина не меняются), вся структура их взаимодействия практически полностью зависит от движущего агента. В данном случае этот тот, кто поворачивает ключ, иначе говоря, потенциал взаимодействия. Чтобы исключить взаимодействие, надо сделать обе системы подвижными.

Рассмотрим теперь в качестве систем кристалл соли NaCl , с одной стороны, и жидкую воду H_2O , с другой. Если привести эти системы в соприкосновение, соль растворится в воде. Если считать воду метаболической формой, имея в виду тепловое движение молекул, то можно допустить взаимодействие с длительным эффектом между водой и предположительно статичным кристаллом. Известно происхождение этого явления. Молекулы NaCl и H_2O ионизируясь превращаются в $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$ и $\text{OH}^- \text{H}^+$ и образуют нечто вроде четырехчленного семейства из обратимых реакций $\text{Cl}^- + \text{H}^+ \leftrightarrow \text{ClH}$ и $\text{OH}^- + \text{Na}^+ \leftrightarrow \text{NaOH}$. Здесь мы имеем типичный пример статической системы с *бесконечно малыми осцилляциями*, собственный период которых входит в резонанс с собственными колебаниями системы. Теперь становится понятно, что первая система, став метаболической, может вытягивать энергию из второй и вызывать в ней значительные изменения. Таким образом, можно сказать, что соль это носитель значения для воды. Но это не будет системой памяти, поскольку соль сама разрушается в ходе взаимодействия, которое обратимо только частично (чтобы восстановить кристалл NaCl , нужно выморозить раствор). Форма, которая внешне выглядит как статическая, но относительно легко подвергается бесконечно малым изменениям, называется *псевдостатической*. Этот пример показывает, что псевдостатическая форма может быть носителем значения для метаболической формы.

Другая иллюстрация: система *книга+читатель*. Книга может передавать информацию, только если она освещена. Необходимо посредничество светового поля, которое является метаболической формой. Таким образом, мы рассматриваем два взаимодействия: $\text{книга} \leftrightarrow \text{свет}$ и $\text{свет} \leftrightarrow \text{читатель}$. Это последнее взаимодействие между двумя метаболическими формами в принципе не представляет сложностей (еще и потому что это взаимодействие включает такой специализированный рецептор как глаз). Первое взаимодействие — это электромагнитное взаимодействие электронов и фотонов, которые отражаются от белых участков листа и, напротив, поглощаются там, где что-то напечатано. Сколь бы тонкой ни была природа этого взаимодействия, его можно интерпретировать как предыдущее: система «книга» испытывает очень малые деформации, которые поглощают энергию другой системы, и обладает очень существенными качественными особенностями (в нашем случае — пространственными). Однако эти деформации приводят только к тепловым переносам поглощенной энергии без изменения общего вида напечатанных букв. Поскольку речь идет о статистической характеристике, которая не меняется при мелких локальных взаимодействиях, глобальная инвариантность

формы букв сохраняется. Здесь мы имеем наиболее совершенный вид взаимодействия типа память \Leftrightarrow воспринимающая система, где память практически не повреждается при взаимодействии. Всю энергетическую нагрузку взаимодействия несет воспринимающая сторона, которая имеет одновременно и метаболический (рекуррентность), и рассеивающий характер (энергия уходит из источника в бесконечность). Было бы интересно узнать, в какой мере этот вид взаимодействия сохраняется в общем случае. В любом случае представляется необходимым, чтобы рецептор был *открытой системой*, через которую проходит очень разнообразный в качественном отношении поток энергии. Если поместить напечатанную страницу в ящик с полностью отражающими стенками (черное тело), то весьма вероятно, что никакой рецептор не сможет ее читать. Существование светового источника, постоянно испускающего частицы, представляется необходимым.

Фундаментальная биологическая система ДНК \Leftrightarrow метаболизм мелких молекул, как кажется, функционирует аналогично. В определенных условиях (требующих регуляции) поток энергии метаболизма запускает некоторый цикл, который посредством резонанса возбуждает геометрико-химическую деформацию некоторой порции хромосом. Запущенный таким образом цикл извлекает энергию, и его конечные продукты оказывают соответствующее регулирующее воздействие. Более того, здесь имеется регулирующее воздействие целевого характера. Несомненно, это связано с тем, что здесь мы имеем дело с естественной памятью, которая, возможно, создана и во всяком случае поддерживается окружающей динамической системой.

Б. Энтропия формы

Если мы хотим уточнить понятие свободного взаимодействия между двумя динамическими системами математически, есть только один способ это сделать. Надо снабдить функциональное пространство динамик систем-произведений V мерой, которая позволила бы придать смысл понятию *слабого случайного возмущения*. Несмотря на труды многочисленных математиков (Н. Винер, И. Сегал) и объединенные усилия некоторых физиков (например, Фейнмана), пока еще нельзя утверждать, что у нас есть ясная теория интегралов на функциональных пространствах. Во всех случаях такая теория в большой степени зависит от функциональной природы (гильбертовость, банаховость) рассматриваемого пространства V . Что касается меня, то я склонен определять эту меру при помощи следующей процедуры. Функциональное пространство V динамической системы часто представимо в виде индуктивного предела вложенных римановых многообразий $X_1 \subset X_2, \dots, \subset X_n, \dots$, который часто называют *спектром* рассматриваемого функционального пространства. Если задана структурно устойчивая форма F , в каждом X_i берется i -размерная мера $m_i(F)$ открытого множества точек из X_i , которые топологически представляют форму F . Сумма вида $m(F) = \sum m_i(F)/i!$ (где знаменатель $i!$ может быть достаточно произвольным) является общей мерой элементов формы F в V . Такую меру можно назвать энтропией структурно устойчивой формы F (не путать с микроканонической энтропией, формально определенной в главе 3).

Вероятно, существует связь между таким образом определенной энтропией и топологической сложностью формы. Чем сложнее форма F топологически, тем меньше ее энтропия. Интуитивно очевидно, что топологически более сложная форма хуже сопротивляется возмущениям заданной амплитуды, чем менее сложная.

Возвращаясь к типичным случаям постоянного поля на торе T^2 , можно заметить, что резонансы с «малым знаменателем», притягивающий цикл которых погружен в T^2 топологически просто (относительно заданной базы), гораздо более устойчивы, чем резонансы с «большим знаменателем», притягивающий цикл которых погружен в T^2 сложным образом. В этом случае особая роль главных кругов тора проявляется в положении спектра в про-

пространстве V векторного поля на T^2 . Этот факт дает основание для того, чтобы определить скалярную меру информации, содержащейся в форме, как ее топологическую сложность, поскольку эта сложность и энтропия изменяются в противоположных направлениях.

Если индекс i спектрального многообразия X_i пропорционален энергии E , то меру $m(F)$ можно выразить при помощи дифференцируемой функции $g(E)$ и записать $m(F) = \int g(E)dE$. Функция $g(E)$ полностью характеризует термодинамику формы F . Говоря нестрого, термодинамика динамической системы определяется положением спектра X_i по отношению к множеству бифуркации H .

В теории такого рода нельзя требовать, чтобы интеграл имел все те же свойства, что и в случае конечной размерности. Однако это не так уж важно, поскольку на самом деле достаточно ограничиться рассмотрением только открытых областей особого типа.

В. Конкуренция резонансов

Когда две динамические системы с рекурренцией A и B вступают в свободное взаимодействие, система-произведения $A \times B$ оказывается структурно неустойчивой. Вообще, если C и C' — аттракторы, действующие в A и B в момент взаимодействия, то аттрактор-произведение $C \times C'$ претерпевает катаболическую катастрофу и вырождается в аттрактор K меньшей размерности, содержащийся в произведении $C \times C'$. Именно в этом состоит наиболее общая форма явления, известного в динамике под названием *резонанса*. В общем случае возможны резонансы нескольких типов, между которыми система должна сделать выбор. Такая *конкуренция резонансов* никогда не изучалась математиками, хотя это явление представляется исключительно важным. Априори кажется возможным определить энтропию для каждого резонанса K , которая тем больше, чем топологически проще K погружен в $C \times C'$. В случае локальных динамических полей слоев A и B происходит обобщенная катастрофа. Добавим к тому же, что природа возникающих в начале взаимодействия возмущений играет решающую роль для выбора конечного состояния (примечание [3]). В частности, этот выбор может определяться бесконечно малыми колебаниями некоторых квазистатических форм (см. например, петлю, описанную в 5.5). Процесс такого же рода контролируется хромосомной ДНК в ходе развития организма.

7.4. ЭНЕРГИЯ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СЛОЖНОСТЬ

А. Спектр

Рассмотрим классическую непрерывную динамическую систему, заданную на области D евклидова пространства, например, колеблющуюся струну или мембрану. Конфигурационное пространство такой системы — это функциональное пространство L , например, $L(I, R)$ в случае колеблющейся струны. Известно, что это движение разлагается на сумму гармоник. Рассмотрим множество положений X_i , соответствующих сумме p первых гармоник движения (p — целое положительное число).

В пространстве L имеется семейство вложенных многообразий конечной размерности $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_p \subset \dots$, составляющее спектр движения. Хорошо известно, что спектр существует в случае линейных самосопряженных систем. Однако весьма вероятно, что существование спектра не связано, как часто думают, с линейным характером дифференциального оператора и конфигурационного пространства. На самом деле спектр возникает в каждой задаче, связанной с вариационным принципом, типа определения экстремума действия (или лагранжиана),

удовлетворяющего подходящим локальным условиям. На функциональном пространстве L (или на гиперповерхности, заданной условием нормировки вроде $\int |\psi|^2 = 1$) имеется функционал A , который при отсутствии внешнего потенциала сводится к полной кривизне графика отображения. Определим критические точки функционала A . Если они квадратичны с конечным числом отрицательных квадратов во второй вариации (обычный случай функционалов, удовлетворяющих условию Лежандра), то можно построить траектории градиента A , заканчивающиеся в этих критических точках. Как и в классической теории Морса таким образом определяется последовательность вложенных клеток, которая задает спектр нашей динамической системы. В ситуации этого рода критическая точка A никогда не является точкой из множества бифуркации K из L . В действительности в окрестности формы f , принадлежащей к множеству K , существуют формы g , сколь угодно близкие к f и относящиеся к различным топологическим типам. Существуют более и менее сложные типы, у которых полная кривизна различна. Например, для кривой $y=g(x)$ перегиб $y = x^3 + 1$ может быть приближен или с помощью $y = x^3 - a^2x + 1$ (кривая с двумя горбами) или с помощью $x^3 + a^2x + 1$ (кривая без горбов). Видно, что первое приближение имеет большую полную кривизну чем второе (можно даже получить первую ненулевую вариацию A , удовлетворяющую условию нормировки $\int |\psi|^2 dx = 1$). *Ненормированные элементы*, т.е. критические точки A , соответствуют структурно устойчивым формам, топологическая сложность которых возрастает вместе с A .

Б. Теория Штурма-Лиувилля в случае многих размерностей

Эта математическая проблема, заключающаяся в наиболее классическом случае в изучении зависимости топологической сложности собственных функций уравнения $\Delta u = Eu$ от собственного уровня E , почти не исследована, не считая случая размерности один (случая колеблющейся струны). Известно, что в последнем случае (теория Штурма-Лиувилля) собственные уровни E характеризуются числом нулей собственной функции, а также общим числом ее критических точек. Для размерности $n \geq 2$ нельзя ожидать столь же простого результата. Например, для уравнения $\Delta u = Eu$ на квадрате $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ уровню $E = 50$ отвечают две собственные функции: $u_1 = \cos 5x \cos 5y$ и $u_2 = \cos 7x \cos 5y$, у которых общее число критических точек в первом квадранте сильно различается (у одной 25, а у другой 7). Однако совпадения такого рода можно считать случайными поверхностными эффектами, которые асимптотически исчезают при больших объемах. Можно предварительно допустить, что существует положительная возрастающая функция $q=h(E)$, определяемая геометрическими характеристиками системы, которая связывает сложность собственных функций с энергией. Будем считать в дальнейшем, что мы имеем дело со свободной количественной системой на области Ω , волновая функция которой удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$\frac{d\Psi}{dt} = i\Delta\Psi$$

Энергия системы, которая в стационарном состоянии предполагается равной ψ_α , где $\Delta\psi_\alpha = E_\alpha\psi_\alpha$, может быть определена при помощи функции h^{-1} на основании сложности графика ψ_α . В этом смысле можно сказать, что энергия определяется положением точки ψ_α в $L(U, C)$ по отношению к множеству бифуркации K функционального пространства $L(U, C)$. Что в этом случае можно сказать об эволюции системы? В случае стационарного состояния с энергией E_α ψ_α допускает частоту $\nu_\alpha = E_\alpha/h$. Если взять действительную часть ψ_α , то видно, что она топологически меняется ν_α раз за единицу времени. Это наводит на мысль принять в качестве среднего значения энергии за промежуток времени T частное от деления на T числа случаев, когда график $\text{Re}\psi$ (действительная часть ψ) изменяет свой топологический тип в этот промежуток времени. Естественно, такие изменения формы не являются реальными физическими яв-

лениями. Они существуют в каком-то смысле виртуально и могут быть выявлены только после проекции, т.е. после взаимодействия с другой системой. Подобная интерпретация в любом случае совместима со следующими двумя фактами:

1. Вследствие квантового индетерминизма энергию системы невозможно измерить в заданный момент времени. Чтобы получить среднее значение плотности изменения формы с течением времени, следует наблюдать систему в течение достаточно долгого промежутка времени, который в случае стационарного состояния не может быть меньше периода

$$T_{\alpha} = 1/\nu_{\alpha} = h/E_{\alpha} \quad (\text{где } h \text{ — постоянная Планка})$$

Приближение будет тем лучше, чем больше будет время наблюдения и чем ближе будет система к стационарному состоянию.

2. При слабом взаимодействии двух квантовых систем S_1 и S_2 средняя временная сложность произведения (средняя плотность изменения формы по времени) равна сумме средних сложностей систем-составляющих. В этом случае энергия объединенной системы равна сумме энергий ее составляющих. Если же взаимодействие между S_1 и S_2 становится сильным, то, вообще говоря, происходит уменьшение пространственной сложности графика произведения и соответствующее уменьшение его средней сложности по времени. Видимая энергия уменьшается, что можно интерпретировать как накопление энергии связи, отвечающей за установление между S_1 и S_2 *связанного состояния*. Если в конце концов (в конце взаимодействия) объединенная система снова развивается в сторону разложимости, эта энергия связи может быть восстановлена.

В. Старение динамической системы и развитие системы к равновесию

Пусть на некоторой области W пространства задано поле локальных динамик, динамика-слой которого имеет аттрактор K , обладающий гамильтоновыми свойствами (как в случае систем Аносова). С этим аттрактором можно связать меру Лиувилля m и, следовательно, энтропию S — функцию энергии E . Свяжем с данным полем два приведенных поля: одно будет задавать локальную энергию $E(x)$, $x \in W$, а другое — локальную энтропию $S(x)$. Локальная энергия $E(x)$ в результате рассеивания будет стремиться выравниваться во всей области; если поле взаимодействует с самим собой термодинамически, то с энтропией $S(x)$ будет происходить то же самое.

Однако равновесие может быть восстановлено, только если функция $S(E)$ такова, что конечное значение полной энтропии $\int S(E_0) dx$ больше начального. Если это условие не выполняется, поле локально изменяет аттрактор — или очень малозаметно за счет почти непрерывных переходов, или, напротив, путем резкого скачка к изолированному аттрактору. Тогда в результате обобщенной катастрофы возникает новая фаза. Парадоксальным образом эволюция системы к пространственной однородности может привести к совершенно неоднородной ситуации, а именно к смеси двух фаз.

В случае почти непрерывного скольжения аттрактора, который более детально будет описан в 12-2, можно ожидать, что если система открытая, то кривая $S(E)$ будет иметь максимум среднего значения E_0 . Действительно, в этом случае значительные локальные переносы энергии могут происходить без приближения к равновесию. В случае живых тканей, которые пронизываются непрерывным потоком энергии, это условие, очевидно, выполняется. Эволюция кривой $S(E)$ к кривой с выраженным максимумом в E_0 — это характерная черта *старения* и потери специфичности в эмбриологии.

7.5. ФОРМАЛЬНЫЕ ДИНАМИКИ

Поскольку конфигурационное пространство динамической системы, как и пространство $L(X, Y)$ отображений из многообразия X в многообразии Y , является функциональным пространством, можно задать естественно связанные с данным пространством динамики. Действительно, в L существует подпространство H , которое с ним канонически связано, а именно подмножество бифуркации. На L может существовать динамика, заданная потенциалом V , который является постоянным на дополнении $L-H$ и имеет разрывы (или по крайней мере очень сильные скачки) вдоль слоев коразмерности один из H . Такую динамику, потенциал которой задан топологической формой графика отображения $f: X \Rightarrow Y$, мы будем называть *формальной*. В большинстве известных случаев функция V это монотонно возрастающая функция топологической сложности графика, для которой топологически простейшие формы являются аттракторами. (Это как раз случай линейных динамических систем, таких как колеблющиеся струны и мембраны). Появление формальных динамик представляется специфическим для биологических явлений. Однако существуют по крайней мере намечки формальных динамик и в явлениях неживой природы. Модели, которые мы намерены описать, может быть, позволяют представить, как на основе индифферентных динамик классического типа могут возникать формальные динамики, нагруженные информацией. Таким образом будет частично преодолен тот разрыв между энергией и значением, который с термодинамической точки зрения отделяет мир живого от мира неживого.

А. Происхождение формальных динамик

Вернемся к классической осциллирующей системе такой как, например, колеблющаяся мембрана, или к свободному уравнению Шредингера на области W . Известно, что собственные функции, или собственные формы возникают при рассмотрении на гиперповерхности $\int |\psi|^2 = 1$ экстремумов функционала $I = \int |\text{grad} \psi|^2 = 1$

Как мы видели в главе 3, геометрически легко установить, что обычная точка множества бифуркации H не может быть экстремумом функционала I . Действительно, начиная с некоторой точки некоторой страты коразмерности один из H , можно двигаться как от одного конца этой страты, так и от другого, или в направлении возрастания топологической сложности, или наоборот, что приведет к первым ненулевым вариациям I . Поэтому собственные формы, образующие спектр рассматриваемой динамической системы, структурно устойчивы. Хотя такая динамика не является формальной в указанном выше смысле, эволюция системы тем не менее стремится избежать множества бифуркации H , и в этом факте можно усмотреть элементарный источник формализации.

Несомненно, наиболее вероятный источник формализации будет найден в определенных типах взаимодействия, типичной моделью которых является процесс *фильтрации*. В исходной схеме задается сеть точек с целыми координатами в \mathbf{R}^3 , заключенными между двумя плоскостями $z = t$. Далее на этом графике наугад строится некоторое количество N ребер длины один. Определим вероятное значение N_0 , такое что при $N > N_0$ соединения ребер лежат между двумя плоскостями. Если допустить, что между двумя плоскостями имеется разность потенциалов и что ребра обладают проводимостью, то как только установится такое соединение, между плоскостями $t = z$ потечет ток, который вызовет в системе скачок энергии. Мы имеем здесь прототип ситуации, при которой энергетическое состояние системы зависит, по сути, от топологических свойств среды (а именно, от контакта электродов). Весьма вероятно существование аналогичных ситуаций, в которых фактором, включающим поток энергии, может быть не контакт, а отличие от нуля гомологической группы при размерности большей едини-

цы, или любое другое топологическое свойство. Так или иначе, этот тип ситуаций можно схематизировать следующим образом. Пусть на открытой области W имеются две взаимодействующие динамики. Первая из этих динамик градиентная. На краю $S = \partial W$ задается потенциал. Этот потенциал локально постоянен на S и порождает внутри W ток, задаваемый векторным полем X . Общий поток этого тока определяет в W долю энергии F , обеспечиваемую этой динамикой, которая является движущей. Вторая динамика по отношению к первой играет роль фильтра. Можно предположить, что она определяется полем гамильтоновых динамик на W , для которого характерна конкуренция между аттракторами c_i . Если аттрактор c управляет областью A из W , c приписывают коэффициент проводимости κ . Таким образом, поле X движущей динамики определяется градиентом U , где U — решение на W задачи типа Дирихле, которое определяется экстремумом

$$\delta \int \kappa \operatorname{grad} U = 0 \text{ и } U=V \text{ на краю } S \text{ на } W$$

Более того, имеет смысл постулировать, что движущая динамика взаимодействует с фильтрующей динамикой. В отсутствие более точных гипотез можно допустить, что это взаимодействие приводит к таким состояниям фильтрующей динамики, для которых производство энтропии минимально (согласно принципу Ле Шателье). Имеет также смысл считать, что производство энтропии пропорционально общей кривизне поля X , а выделенными состояниями — те, которые ведут к более прямой циркуляции тока движущей динамики. Это обратное действие движущей динамики на фильтр может привести к его периодической эволюции. Простую модель этого явления демонстрирует винт, который, будучи помещен в жидкий поток, начинает вращаться с угловой скоростью, пропорциональной скорости потока. В биологии можно допустить, что живая материя содержит в основном два типа молекул: крупные (нуклеиновые кислоты, белки) и мелкие или средние (вода, аминокислоты, нуклеотиды). В первом приближении можно допустить, что локальные конфигурации больших молекул играют роль фильтрующей динамики по отношению к кинетической биохимии, в которой участвуют мелкие молекулы и которая играет роль движущей динамики. Действительно, белки обладают ферментативной активностью, которая может заметным образом (в 10 раз) изменять скорость реакции мелких молекул. С этой точки зрения деление живой клетки может рассматриваться как периодический процесс, затрагивающий большие молекулы и вызываемый реакцией движущей динамики, т.е. метаболизмом мелких молекул.

Наконец, реакция на фильтрующей динамике может привести к настоящей пространственной циркуляции участков, управляемых каждым из аттракторов c . Используя антропоморфную терминологию, мы бы сказали, что циркуляция энергии в движущей динамике накладывается на циркуляцию информации, которая ею управляет. Впрочем, ничто не мешает произвести итерацию этой конструкции и подчинить циркуляцию информации новой фильтрующей динамике. В таком случае мы будем иметь информацию второго порядка. Этот механизм мы обсудим более детально в связи с биологической целесообразностью и отношениями между генетической и термодинамической регуляцией. Однако прежде мы покажем возможность некоторых явлений на качественном уровне.

Б. Явления памяти и содействия

Предположим, что фильтрующая динамика гамильтонова типа имеет на интервале энергии $a < E < b$ следующую топологическую конфигурацию: при $E=a$ имеется два изолированных аттрактора, один из которых (c_0) соответствует большой неупорядоченной (газообразной) фазе, а другой (c_1) имеет малую меру Лиувилля и соответствует упорядоченному (кристаллическому) состоянию. Когда энергия E достигает значения b , аттрактор c_1 поглощается аттракто-

ром c_0 , что соответствует плавлению кристаллической фазы.

Предположим, что движущая динамика имеет в подобласти U особенность s , характеризующую очень большим локальным изменением потенциала V , и что фаза c_1 производит в U ферментативный эффект, уменьшающий производство энтропии в окрестности s . Появление в U фазы c_1 весьма вероятно, поскольку вследствие реакции движущей динамики фаза c_1 будет аттрактором в строгом смысле (рис. 7-1). Сначала в U появится небольшой участок фазы c_1 , возбуждаемый энергией E в окрестности b . Затем внешние условия метаболизма среды будут меняться, особенность s движущей динамики исчезнет, c_1 перестанет быть притягивающим, а локальная энергия E уменьшится. Возможно, что локальный участок c_1 устоит, будучи изолированным от большой фазы c_0 . Присутствие этого фрагмента фазы c_1 , ставшего метаболически инертным, предстанет как *воспоминание* о метаболической особенности s . Если позднее в метаболизме (движущей динамике) появятся условия близкие к особенности s , фрагмент фазы c_1 , может сыграть роль ростка и благодаря своему локальному каталитическому действию способствовать возвращению в U особенности s . Если такое возвращение действительно происходит, фаза c_1 вновь становится аттрактором и может расти пространственно. Таким образом, становится понятно, как некоторые метаболические режимы могут быть, так сказать, злокачественными. Если они возникают однажды, в дальнейшем они возникают вновь все чаще и все легче. Фаза c_1 выступает как система *порождающих частиц* этой злокачественной трансформации.

В. Канализация равновесий

В живых динамиках часто встречается еще одно явление. Геометрически его можно описать так: точка устойчивого равновесия системы (характеризуемая, например, квадратичным минимумом потенциала) с течением времени замещается зоной P безразличного равновесия (с постоянным потенциалом V), ограниченной крутым потенциальным барьером. Такой отражающий барьер соответствует включению механизмов регуляции генетического происхождения. С точки зрения структурной устойчивости несомненно, что в таком состоянии устойчивость обеспечена гораздо лучше, чем в случае обычного термодинамического равновесия. Действительно, дифференциальная система может быть структурно устойчивой только по отношению к C^1 -малым возмущениям (и их малым первым производным). Если от системы требуется быть устойчивой просто по отношению к малым непрерывным возмущениям, система обязательно должна иметь разрывы (такие системы, известны в литературе как *обрушивающиеся* (deferlants)). Формирование в ходе эволюции ограниченных участков безразличного равновесия ограниченных потенциальным барьером, представляется результатом взаимодействия между фильтрующей динамикой генетического характера и движущей динамикой (обычным метаболизмом). Предположим, что метаболизм имеет притягивающий цикл z , устойчивость которого обеспечивается механизмами биохимической кинетики. При неизбежных возмущениях случайного характера с относительно слабой амплитудой вся трубчатая окрестность T цикла z будет также описываться этой системой. Внутри T будут возникать деформации фильтрующей динамики, обладающие «усиливающим эффектом», однако этот эффект не будет действовать вне T , что приведет к образованию вокруг T отражающих стенок. Так, если поставить тяжелый шар на песочную поверхность и потрясти систему случайным образом, то вокруг шара образуется сравнительно ровная площадка, ограниченная крутыми стенками (рис. 7-2). Аналогичный механизм (не в смысле физиологической регуляции, а в смысле пространственной локализации) может правдоподобно описывать органогенез в ходе эволюции.

Этот механизм показывает, что с многих точек зрения появление катастроф (разрывов) это цена, которую приходится платить за обеспечение большей устойчивости процесса.

Г. Стабилизация порогов

Одним из наиболее типичных аспектов биологического морфогенеза является *стабилизация порогов*: особенности, которые никогда не должны были бы проявляться структурно устойчивым образом из-за слишком высокой коразмерности, тем не менее проявляются устойчивым образом. Вот приемлемый формальный механизм, объясняющий это явление. Динамика (M, X) проходит через бифуркацию (в смысле Хопфа), результатом которой оказывается рост размерности аттрактора (это то, что называют *выигрышем* или *скрытой катастрофой* в смысле главы 11). Пусть (P, Y) новая динамика-слой, возникающая таким образом на аттракторе s из (M, X) , где P это, к примеру, тор конечной размерности k . На произведении $M \times P$ можно структурно устойчивым образом получить особенности коразмерности $4+k$. Если такая особенность проектируется на точку p из P , то, очевидно, система почти всегда отображается в окрестность точки p . Если, к примеру, координаты P имеют биохимический смысл, это говорит о наличии гомеостатических механизмов, возвращающих систему к p . Можно предположить, что такой механизм устанавливается благодаря

среднему полю взаимодействия между медленной динамикой (P, Y) и быстрой динамикой (M, X) . Таким образом, следует учитывать не только появление новых циклов реакции (P, Y) , но и их резонансы с исходной динамикой (M, X) .

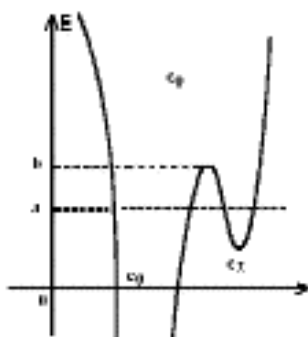


Рис. 7-1

Д. Стабилизация порогов и теория игр

Явление стабилизации порогов напоминает одну классическую теорему в теории игр, а именно *теорему фон Неймана о минимаксе*. Если в области U конкурируют два устойчивых режима a, b , разделенные порогом s , то стабилизация порогов проявляется в том, что почти вся область U эволюционирует к s , и только малая часть области сохраняет необходимую подвижность для колебаний между a и b . Все происходит так, как если бы в любой точке из U два игрока a и b играли друг против друга, причем каждый следовал бы стратегии минимизации потерь. Говоря антропоморфно, *любой конфликт развивается так, чтобы минимизировать причиняемые им страдания*. Нельзя ли с динамической точки зрения рассматривать страдания как *суммарную плотность локальных катастроф*? Тогда можно будет сказать, что развитие направлено в сторону простейших форм наименее богатых катастрофами и поэтому более устойчивых.

Весьма вероятно, что такое развитие случается как в неживой, так и в живой природе. В первом случае [4] оно чаще всего влечет исчезновение порождающего конфликта (как это происходит в случае ударной волны, которая гасится трением). В биологии, напротив, конфликт обусловлен глобальной регуляцией живого существа и периодическим характером его размножения. Конфликт не исчезает, и организм с помощью генетических механизмов наследственности развивается по направлению к более устойчивой ситуации, совместимой с поддержанием конфликта, т.е. с регулирующей функцией.

Е. Другие формальные аспекты взаимодействия. Кодировка

Рассмотрим две гамильтоновы системы, конфигурационные пространства которых это функциональные пространства L_1, L_2 (как в случае колеблющейся струны). Свяжем эти две си-

стемы потенциалом взаимодействия V_{12} . Если этот потенциал имеет разрывы или по крайней мере очень сильно меняется вдоль определенных страт произведения H гиперповерхностей бифуркации H_1 и H_2 из L_1 и L_2 соответственно, то мы имеем дело с формальной связью. Если, к примеру, V_{12} имеет минимум на некоторых связных составляющих дополнения $(L_1 \cup L_2) - H$ вида g_1, g_2 , где

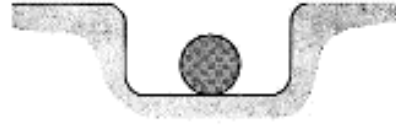


Рис. 7-2.

g_1, g_2 — собственные формы, то если L_1 находится в состоянии g_1 , система L_2 с большой вероятностью может оказаться в состоянии g_2 . В этом случае система-произведение играет роль кода, который связывает состояния первой системы с состояниями второй. Для возникновения этого эффекта кодирования отнюдь не обязательно, чтобы потенциал взаимодействия был строго формальным; в общем случае нередко имеются другие выделенные связи. И кодирование всегда происходит с помехами и с большей или меньшей вероятностью ошибки. Приведем простой пример. Пусть L_1 и L_2 это одинаковые осцилляторы, а потенциал взаимодействия является притягивающим и имеет вид $V=k(x_1 - x_2)^2$ (или аналогичный). Тогда V будет минимальным на диагонали $L_1 \cup L_2$. Это значит, что когда L_1 находится в собственном состоянии g_1 , L_2 притягивается тем же собственным состоянием. Будет иметь место резонанс и пространственное расширение формы g_1 .

Явление резонанса также объясняет, почему изменение фазы среды сопровождается резкими изменениями свойств этой среды. Действительно, когда мы имеем дело с конденсированной фазой кристаллического типа, корреляции и периодичности этой фазы посредством резонанса действуют на все динамическое поле, связанное с этим пространством. При переходе к хаотическому газообразному состоянию (через плавление) эти эффекты исчезают.

7.6. ФОРМА И ИНФОРМАЦИЯ

Мы привыкли воспринимать любую информацию в виде сообщений, т.е. конечных последовательностей букв некоторого алфавита. Но это только один возможный вид информации. Информация может содержаться в любой геометрической форме. Скалярной мерой количественной информации является топологическая сложность формы носителя информации. Я думаю, что мы привыкли кодировать информацию в виде последовательностей букв только из-за технического удобства передачи такой информации. Самый простой (и возможно, в конечном счете, единственный) способ размножения форм в пространстве основывается на механическом явлении *резонанса*. Если источник S и приемник R — два одинаковых осциллятора, симметрично взаимодействующих друг с другом, то возбуждение в S собственного состояния a приводит R в то же самое состояние a . Можно ожидать, что собственные колебания a в R будут самортизированы для передачи другого собственного состояния b и так далее. Одномерный и ориентированный характер сообщения является отражением одномерности и необратимости времени. Можно однако придумать другой тип распространения информации, который происходил бы при помощи контакта или диффузии. Если привести в контакт поле локальных поляризованных динамик и поле безразличных конкурентных динамик, то поляризация распространится на вторую область и вызовет пространственное расширение собственной формы первой динамики. Однако эта процедура, как представляется, позволяет осуществить только очень ограниченное пространственное расширение. Действительно, когда динамический режим расширяется пространственно, это оказывает воздействие на собственную форму режима, которое изменяет его топологические характеристики (это справедли-

во по крайней мере для динамик, основанных на химической кинетике, как у живых существ). Пространственная диффузия нарушает геометрическую точность собственной формы, что ставит передачу информации под угрозу. Нуклеиновые кислоты со своей линейной структурой являются единственными носителями *генотипа*, по-видимому, потому, что эта статическая форма необходима для пространственного переноса на (относительно) большие расстояния информации, обычно представленной в форме метаболических структур (аттракторов биохимической кинетики), топологическая сложность которых допускает только очень ограниченное пространственное распространение. Так же как при колебаниях маятника энергия переходит из кинетической формы (в самой нижней точке) в потенциальную (в верхних точках) и обратно, так и в периодическом процессе деления клетки сложность колеблется между метаболической формой (в интерфазе) и статической (в метафазе). Однако в последнем случае переход происходит с разрывом, катастрофически. В заключение скажу: не стоит считать, что линейная структура необходима для передачи или хранения информации (точнее, значения). Хотя эта мысль кажется непривычной, вполне возможно, что язык, то есть *семантическая модель*, элементами которой являются топологические формы, не дает серьезных доводов в пользу линейного характера нашей языковой практики. Действительно, топологическое произведение, композиция и т.п. дают гораздо больше комбинаций чем простое соединение двух линейных последовательностей. Мы вернемся к этому вопросу в главе 13.

ДОПОЛНЕНИЕ 1

Инвариантность энергии и первое начало термодинамики. Пусть E — изолированная (не взаимодействующая с внешним миром) динамическая система, динамика которой инвариантна по отношению преобразованиям $t \Rightarrow t_0+t$ и $t \Rightarrow t_0-t$. Средняя (по времени) сложность и пространственная сложность графика системы остаются постоянными. Таким образом, если бы не существовало способа сравнивать между собой сложности не связанных между собой систем, первое начало термодинамики не представляло бы интереса. Заметим, что если две системы не связаны или слабо связаны, сложность объединенной системы равна сумма сложностей ее составляющих. Существуют эмпирически очень важные динамические системы (например, твердые тела), единственная рассматриваемая энергия которых это кинетическая энергия. Для таких систем сложность можно определить как функцию $q = h(E_c)$ кинетической энергии E_c . Пусть теперь S будет динамической системой, и предположим, что в результате взаимодействия с твердым телом B система S переходит из состояния a в состояние b . В момент t_0 мы имеем систему $S+B$ в состоянии слабого (внутреннего) взаимодействия, общая сложность которой равна $q(a) + h(E_c(B), t_0)$. После взаимодействия (которое способно разрушить сильную связь), объединенная система находится в момент $t_1 > t_0$ в состоянии слабого взаимодействия и ее сложность равна $q(b) + h(E_c(B), t_1)$. Приравнивая эти два значения, мы получаем:

$$q(b) - q(a) = h(E_c(B), t_1) - h(E_c(B), t_0).$$

Если теперь допустить, что функция h линейна и не зависит от B , то разность $E(B)(t_1) - E(B)(t_0)$ будет зависеть только от a и b , то есть только от состояний системы S . Для определения разности энергий используют действительные числа. Таким образом, кинетическая энергия служит универсальным эталоном изменений внутренней энергии системы. Чтобы использовать первое начало термодинамики, необходимо, чтобы почти каждое взаимодействие между динамической системой и материальным телом оказывалось в конечном счете разложимой (или слабо связанной) формой. Так в классической системе (газ + поршень), столь популярной в термодинамике, следует предполагать, что система не перестает быть разложимой (как

это происходит, например, когда газ химически воздействует на поршень). Эту необыкновенную устойчивость материальных тел необходимо принять как эмпирический факт. Без нее первое начало термодинамики фактически потеряло бы смысл, и скалярная мера энергии стала бы невозможной.

Возвращение двух взаимодействующих систем после сильного взаимодействия к слабому априори кажется совершенно невероятным. В функциональном пространстве типа $L(X, A, Y, B)$ разложимые отображения образуют подпространство бесконечной коразмерности, и вероятность того, что система будет развиваться к такому состоянию, должна априори рассматриваться как нулевая. Однако, как кажется, в квантовой механике допускается, что многие столкновения между частицами (соответствующие данному открытому множеству начальных условий) в конечном счете развиваются к разложенным состояниям. Этот удивительный факт, с моей точки зрения, можно объяснить с помощью обратимого во времени гамильтониана только если предположить, что этот гамильтониан гораздо более жесток и менее чувствителен к внешним возмущениям, чем это обычно допускается. Возможно, что представление сложного состояния с помощью тензорного произведения является избыточным, содержит ненужные параметры. Иначе говоря, инвариантная псевдогруппа гамильтониана может быть намного шире классической группы перестановок, соответствующей принципу неразличимости частиц.

ДОПОЛНЕНИЕ 2

Топологическая сложность динамики. Мы видели, что существуют определенные трудности в определении топологической сложности функции или отображения. Эти трудности становятся еще более значительными, когда пытаются определить топологическую сложность динамической системы на конфигурационном пространстве M . Хорошее определение можно надеяться получить только в двух случаях:

а) Динамика X на M является полем градиентов $X = \text{grad } V$, где V является действительным потенциалом $V: M \Rightarrow \mathbf{R}$. В этом случае естественно определить сложность динамики X как сложность действительной функции V .

б) M – симплектическое многообразие, а X – гамильтонова динамика на M : $X = i\text{grad } H$, где H – действительный гамильтониан, $H: M \Rightarrow \mathbf{R}$. В этом случае каждому значению E первого интеграла H приписывают дискретное множество $J(E)$, точки которого соответствуют *множествам эргодичности* динамики X на гиперповерхности $H=E$. Таким образом, получается пространство \hat{E} на \mathbf{R} , которое можно снабдить топологией (вообще говоря, не сепарабельной), которая по мере исчезновения множеств эргодичности будет показывать, какие множества занимают их место (говоря более строго, эта топология наследуется от пространства-частного M/X при отождествлении траекторий, имеющих одни и те же множества и пределы). Именно сложностью пространства \hat{E} (представляющего собой что-то вроде неотделимого графика) может измерять сложность гамильтоновой динамики H . Во многих случаях на гиперповерхности $H=E$ имеется большая эргодическая составляющая, которая содержит почти все многообразие (что соответствует газообразной фазе) и небольшое число инвариантных множеств малой меры (Лиувилля), сопутствующих замкнутым траекториям типа центра (или более общо, инвариантным многообразиям типа центра). Эти множества в общем случае соответствуют конденсированным фазам (твердой или кристаллической). График \hat{E} и функции $S(E)$ (энтропии, связанные с каждой точкой \hat{E} при заданном значении E) полностью характеризуют термодинамические свойства рассматриваемой динамики (а также свойства соответствующих инвариантных псевдогрупп G_t).

ДОПОЛНЕНИЕ 2

Бесконечная сложность геометрических форм. Понятию сложности присуща странная двойственность. С наивной точки зрения, постоянная функция, несомненно, кажется простейшей (среди действительных функций). Тем не менее, с нашей точки зрения, она имеет бесконечную сложность, поскольку ее можно сколь угодно точно приблизить функциями, графики которых имеют произвольную топологическую сложность. (Это напоминает знаменитый парадокс квантовой теории поля, согласно которому *плотность энергии вакуума бесконечна*). Причина этого явления такова: из всех форм отображений из X в Y идентифицируемы только структурно устойчивые или почти устойчивые формы. Сюда включаются также геометрические формы, для которых возможно прямое определение, как, например, отображение, задаваемое суперпозицией $X \rightarrow Z \rightarrow Y$, где $\dim Z < \dim Y$ и где составляющие отображения являются базовыми для $L(X, Z)$ и $L(Z, Y)$ соответственно. Эти отображения, хотя и вполне корректно определены, имеют бесконечную топологическую сложность и принадлежат стратам множества бифуркации $H \subset L(X, Y)$ бесконечной коразмерности. Они близки к бесформенным формам, описанным в главе 1. В том, что в ходе термодинамического развития в сторону равновесия графики вырожденных полей (в смысле главы 3) в общем случае стремятся к геометрическим, а не к бесформенным формам, проявляется однородность пространства. В общем случае динамика допускает важную группу (или псевдогруппу) симметрии элементарных взаимодействий, которая всегда транзитивна и допускает галилееву или релятивистскую (по выбору) инвариантность. Таким образом мы приходим к следующему очевидному результату:

Принцип симметрии. Если динамическая система S взаимодействует с неизменной окружающей системой T (термостат), и если все взаимодействия и начальные условия инвариантны относительно псевдогруппы G , то конечное состояние равновесия, *если оно единственно*, также инвариантно относительно G .

Поскольку элементарные взаимодействия в общем случае удовлетворяют галилеевой или релятивистской инвариантности, определяющей транзитивную псевдогруппу, состояние равновесия, если оно единственно, обычно постоянно или по крайней мере постоянно на орбитах группы автоморфизмов системы. Это и делает график состояния равновесия в геометрически бесконечно сложным.

Однако в такой ситуации нет никаких причин для того, чтобы термодинамический предел оставался единственным. Например, если охладить сферический баллон наполненный водяным паром ниже температуры насыщения, то при отсутствии какого-либо внешнего градиента (связанного с температурой или с силой притяжения) появление жидкой фазы начнется с конденсации на стенках, однако конечное распределение жидкой и газообразной фаз будет очень неопределенным и заведомо не будет обладать сферической симметрией. В процессах такого рода происходит нарушение симметрии начальных условий. Мы имеем здесь дело с одной из обобщенных катастроф, описанных в главе 7. Может случиться, что когда система S стремится к своему состоянию равновесия, определяемому инвариантным относительно G графиком, режим локальных взаимодействий псевдогруппы G перестает быть устойчивым и уступает место новому режиму псевдогруппы G' . Новая фаза псевдогруппы G' с самого начала создает исключительно топологически сложную ситуацию. Здесь мы также имеем обобщенную катастрофу. Такие колебания между возможными предельными режимами часто наблюдаются в изолированных системах S (называемых в термодинамике открытыми) и в особенности у живых существ.

Пространство форм функционального пространства. В функциональном пространстве $L(X, Y)$ двум структурно устойчивым формам f и g , ставится в соответствие их относительная

топологическая сложность $d(f,g)$, которую можно рассматривать расстояние на дискретном множестве структурно устойчивых форм. Следовательно, существует метрическое многообразие W , которое содержит это дискретное множество изометрически. Такое многообразие называется пространством форм $L(X, Y)$ и оно играет роль двойственного пространства в теории преобразований Фурье. Если в $L(X, Y)$ протекает случайный динамический процесс, то каждой структурно устойчивой форме f можно поставить в соответствие ее вероятность появления в единицу времени. Таким образом будет задана функция $g: W \rightarrow \mathbf{R}^+$, такая что $\int_{\log} g = +1$. Энтропия данной системы это количественная величина сложности функции g . Если абстрагироваться от явлений резонанса, описанных выше, все происходит так, как если бы g подобно жидкости стремилось выравниваться на W посредством диффузии. Однако осциллятор собственной формы f стремится с помощью резонансов предпочтительным образом обмениваться энергией с формами, кратными f . Эти кратные формы, вообще говоря удалены от f в W . Поскольку с помощью резонанса можно получить *мгновенный перенос* сложности g из точки f в достаточно удаленную точку f' , поведение g не похоже на непрерывное течение жидкости. Чтобы объяснить это явление, можно попытаться модифицировать топологию W . Но скорее всего построить отделенное пространство таким образом не удастся, тем более что отношение f' кратно f не является симметричным. Я бы не стал заходить так далеко в этих весьма предположительных рассуждениях, если бы со многих точек зрения они не давали бы хорошую модель поведения нервной системы. Возбуждение нервных центров (физиологический стимул), остается узконаправленным вплоть до возникновения вполне определенного двигательного рефлекса. Диффузия оказывается при этом если и не устраненной, то, по крайней мере, строго контролируемой. Известно, что если подавить первоначальный рефлекс, искусственно блокируя движение, то возникнет рефлекс №2; снова блокируя снова этот рефлекс, можно получить рефлекс №3, и так далее. Это позволяет предположить, что имеется эффективная диффузия возбуждения, но как только возбуждение находит выход в рефлексе, оно полностью поглощается при выполнении этого рефлекса. Тут имеется забавная аналогия с таким таинственным явлением как *редукция волнового пакета* в волновой механике.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Это явление проявляется уже у функций с четырьмя критическими точками на произведениях двух сфер $S_1 \times S_2$. Этим замечанием я обязан Д.Эпштейну.

[2] С. Смейл в своей статье «Дифференцируемые динамические системы» (S. Smale, *Differentiable Dynamical Systems*, Bul. Amer. Math. Soc. 73, 6, Nov. 1967, pp. 747-817) приводит пример структурно неустойчивого произведения $A \times B$ двух структурно устойчивых динамических систем, из которых одна является градиентом. Однако представляется, что это явление влияет только на относительное топологическое расположение бассейнов, а не самих аттракторов.

[3] Модели воспроизводства по частям, предложенные Л.С. Пенроузом (L.S. Penrose, *Annals of Human Genetics*, 23, 1, pp. 59-726, 1968) дают иллюстрацию этого явления. Способ вложения двух частей A, B в один комплекс (AB) интерпретируется как вырождение фазового пространства $D(A) \times D(B) \Rightarrow D(AB)$ (где D – евклидова группа), т.е. как катаболическая катастрофа, *резонанс*. Конечное состояние системы кратной изолированным частям A, B зависит в основном от начальных условий, т.е. от первого вложенного комплекса, помещенного в систему.

[4]. Явление стабилизации порогов также наблюдается в геологии. Так, свод юрской антиклинали оседает под воздействием эрозии, порождая изрезанные овраги в более мягком нижележащем материале. Формально это явление очень напоминает удвоение ударного фронта волны при образовании переходного устойчивого режима, описанное в главе 10. Также очень часто пороги и выступы

Глава 7

проламываются подземными водоносными горизонтами, образующимися там постоянно. Обратите также внимание на пруд Шебр к северо-востоку от Лозанны, который стекает и на север к Аару и Рейну, и на юг к озеру Леман и Роне. (рис. 7.3).



Рис. 7-3.