

**ПРИМЕРНАЯ ПРОГРАММА**

**Наименование дисциплины**

**Методы оптимальных решений**

**Рекомендуется для направления (ий) подготовки (специальности (ей))**

**080100.62 «Экономика» подготовки бакалавра**

**Квалификации (степени) выпускника Бакалавр**

### 1. Цели и задачи дисциплины:

Учебная дисциплина «Методы оптимальных решений» позволяет:

- Развить системное мышление слушателей путем детального анализа подходов к математическому моделированию и сравнительного анализа разных типов моделей;
- Ознакомить слушателей с математическими свойствами моделей и методов оптимизации, которые могут использоваться при анализе и решении широкого спектра экономических задач.

### 2. Место дисциплины в структуре ООП:

Учебная дисциплина «Методы оптимальных решений» входит в цикл общих математических и естественнонаучных дисциплин; данная дисциплина опирается на предшествующие ей дисциплины “Математический анализ” и “Линейная алгебра”; данная дисциплина является предшествующей для следующих дисциплин: Макроэкономика, Микроэкономика, Теория отраслевых рынков, Экономика общественного сектора, Институциональная экономика, Теория вероятностей, Эконометрика, Математическая статистика, Методы оптимальных решений.

### 3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих профессиональных компетенций: ПК-1, ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-5, ПК-6, ПК-10, ПК-14, ПК-15.

В результате изучения дисциплины студент должен:

**Знать:** основные принципы и математические методы анализа решений

**Уметь:** выбирать рациональные варианты действий в практических задачах принятия решений с использованием экономико-математических моделей

**Владеть:** иметь представление о проблематике и перспективах развития теории принятия решений как одного из важнейших направлений, связанных с созданием и внедрением новых информационных технологий

### 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов / зачетных единиц	Семестры	
		3	4
Аудиторные занятия (всего)	86		

В том числе:	-	-	-
Лекции	40	x	x
Практические занятия (ПЗ)			
Семинары (С)	46	x	x
Лабораторные работы (ЛР)			
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>	<b>58</b>		
В том числе:	-	-	-
Курсовой проект (работа)			
Расчетно-графические работы			
Реферат			
<i>Другие виды самостоятельной работы</i>			
Самостоятельная работа	40	x	x
Выполнение домашнего задания	18	-	x
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)		-	x
Общая трудоемкость	часы	144	
	зачетные единицы	4	

*(Виды учебной работы указываются в соответствии)*

## 5. Содержание дисциплины

### 5.1. Содержание разделов дисциплины

**Тема I. Введение. Математические модели и оптимизация в экономике. Общее представление о статической задаче оптимизации**

Математические модели в экономике. Примеры: модели поведения потребителя и планирования производства в фирме. Пример использования оптимизации для идентификации параметров математической модели.

Использование математических моделей для описания поведения экономических агентов. Рациональное поведение. Использование оптимизации как способа описания рационального поведения. Принятие экономических решений. Теория оптимизации и методы выбора экономических решений. Применение оптимизации в системах поддержки принятия решений.

Основные представления о статической задаче оптимизации. Инструментальные переменные и параметры математической модели. Допустимое множество. Критерий выбора решения и целевая функция. Линии уровня целевой функции. Формулировка

детерминированной статической задачи оптимизации. Неопределенность в параметрах и ее влияние на решение.

Глобальный максимум и локальные максимумы. Достаточное условие существования глобального максимума (теорема Вейерштрасса). Причины отсутствия оптимального решения. Максимумы во внутренних и граничных точках допустимого множества.

#### Основная литература.

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Изд. Айрис-Пресс, 2002. (гл. 1-2)

#### Дополнительная литература.

1. Иванюков Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. М.: Наука, 1979.
2. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Издательство «Наука», 1984.
3. Хазанова Л.Э. Математические методы в экономике. Учебное пособие. М.: Изд. БЕК, 2002.

### **Тема II. Задача нелинейного программирования**

Общая задача нелинейного программирования (НЛП). Задача НЛП и классическая задача условной оптимизации. Условия Куна-Таккера в геометрической форме как необходимые условия локальной оптимальности. Условие дополняющей нежесткости. Условия Куна-Таккера в алгебраической форме. Функция Лагранжа для задачи НЛП. Седловая точка функции Лагранжа. Достаточное условие оптимальности в общей задаче НЛП.

Выпуклые задачи оптимизации. Основные понятия геометрии многомерного линейного пространства. Выпуклые множества. Примеры выпуклых множеств. Опорная гиперплоскость. Разделяющая гиперплоскость. Теорема об отделимости выпуклых множеств. Выпуклые и вогнутые функции. Строгая выпуклость. Надграфик выпуклой функции. Условия выпуклости и вогнутости функций. Свойства выпуклых функций. Теоремы о локальном максимуме в выпуклом случае.

Формулировка выпуклой задачи НЛП. Теорема Куна-Таккера. Условия Куна-Таккера как необходимые и достаточные условия оптимальности. Экономическая интерпретация множителей Лагранжа. Зависимость решения от параметров.

#### Основная литература.

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Изд. Айрис-Пресс, 2002. (гл. 4)

#### Дополнительная литература.

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Издательство «Факториал», 2001.

2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: Изд. БГУ, 1975.
3. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.Н. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.
1. Токарев В.В., Соколов А.В. Методы оптимальных решений (ридер).

### Тема III. Задача линейного программирования

Формулировка задачи линейного программирования (ЛП). Примеры задач ЛП. Стандартная (нормальная) и каноническая формы представления задачи ЛП и сведение к ним.

Свойства допустимого множества и оптимального решения в задаче ЛП. Основные представления о методах решения задач ЛП, основанных на направленном переборе вершин (симплекс-метод и др.).

Функция Лагранжа и условия Куна-Таккера в задаче ЛП. Двойственные задачи линейного программирования. Теоремы двойственности. Интерпретация двойственных переменных. Анализ чувствительности оптимального решения к параметрам задачи линейного программирования.

Некоторые специальные задачи линейного программирования (транспортная, производственно-транспортная и т.д.).

#### Основная литература.

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Изд. Айрис-Пресс, 2002. (гл. 5)
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Высшая школа, 2001. (гл. 3)

#### Дополнительная литература.

4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: Изд. БГУ, 1975.
4. Хазанова Л.Э. Математические методы в экономике. Учебное пособие. М.: Изд. БЕК, 2002.
5. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: Изд. ДЕЛО, 2003.

#### *Компьютерные методы оптимизации*

Градиентные методы в задаче безусловной оптимизации. Метод Ньютона. Методы штрафных функций в задачах линейного и нелинейного программирования. Линейное программирование в среде MS Excel.

Основные представления о методах оптимизации в невыпуклом случае.  
Целочисленные задачи линейного программирования.

Основная литература.

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Изд. Айрис-Пресс, 2002. (гл. 4, 5)
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Высшая школа, 2001. (гл. 3).

Дополнительная литература.

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Издательство «Факториал», 2001.
2. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.Н. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.
3. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
4. Fletcher R. (2000) Practical methods of Optimization. Wiley.
3. Rardin R.L. (1997) Optimization in Operations Research. Prentice Hall.
4. Walsey L.A. (1998) Integer Programming. Wiley.

**Тема IV. Оптимизация в условиях неопределенности**

Задача выбора решений в условиях неопределенности. Критерии выбора решений в условиях неопределенности (принцип гарантированного результата, критерий Гурвица, критерий Байеса-Лапласа, критерий Сэвиджа). Применение принципа гарантированного результата в задачах экономического планирования. Множество допустимых гарантирующих программ. Наилучшая гарантирующая программа.

Принятие решение при случайных параметрах. Вероятностная информация о параметрах. Принятие решений на основе математического ожидания. Случайность и риск. Учет склонности к риску.

Основная литература.

1. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. СПб.: Лань, 2000. (гл. 8, 9)

Дополнительная литература.

1. Райфа Г. Анализ решений. М.: Наука, 1977.
2. Clemen, R.T. (1996) *Making Hard Decisions*. Belmont: Duxbury Press.

**Тема V. Основные понятия многокритериальной оптимизации**

Происхождение и постановка задачи многокритериальной оптимизации. Пример: задача поиска разумных экономических решений с учетом экологических факторов. Множество достижимых критериальных векторов. Доминирование и оптимальность по Парето.

Эффективные решения и паретова граница. Теорема Куна-Таккера в выпуклых задачах многокритериальной оптимизации.

Понятие лица, принимающего решение. Основные типы методов решения задач многокритериальной оптимизации. Методы аппроксимации паретовой границы.

#### Основная литература.

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Высшая школа, 2001. (гл. 2, § 6)

#### Дополнительная литература.

1. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2000.
2. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Издательство «Наука», 1984.
3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
2. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992.
3. Lotov A.V., Bushenkov V.A., and Kamenev G.K. (2004) Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Kluwer Academic Publishers.
4. Miettinen K. (1999) Nonlinear multi-objective optimization. Kluwer Academic Publishers.

#### **Тема VI. Оптимизация динамических систем**

Динамические задачи оптимизации. Примеры: простейшая динамическая модель производства и задача поиска оптимальной производственной программы. Многошаговые и непрерывные модели. Управление и переменная состояния в динамических моделях. Задание критерия в динамических задачах оптимизации. Принципы построения динамического управления: построение программной траектории и использование обратной связи. Задача построения программной траектории как задача математического программирования (в конечномерном или бесконечномерном пространстве).

Динамическое программирование в многошаговых задачах оптимизации. Принцип оптимальности. Функция Беллмана. Уравнение Беллмана в многошаговых задачах оптимизации. Решение задач динамического программирования.

#### Основная литература

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Изд. Айрис-Пресс, 2002. (гл. 11-13)

2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Высшая школа, 2001. (гл. 4)

Дополнительная литература

1. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. М.: Наука, 1969.
6. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: Изд. БГУ, 1975.
3. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
4. Хазанова Л.Э. Математические методы в экономике. Учебное пособие. М.: Изд. БЕК, 2002.
5. Kamien, M.I., Schwarz, N.L. (1981) Dynamic optimization. The calculus of variations and optimal control in economics and management. New York: Elsevier.
6. Bryson A.E. (2002) Applied linear optimal control: examples and algorithms. Cambridge Univ. Press.
7. Denardo E.V. (2003) Dynamic Programming: Models and Applications. Dover Publ.

**5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами**

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин					
		1	2	3	4	5	6
1.	Макроэкономика	+	+	+	+	+	+
2.	Микроэкономика	+	+	+	+	+	+
3.	Теория отраслевых рынков			+			+
4.	Экономика общественного сектора			+			+
5.	Институциональная экономика			+			+
6.	Теория вероятностей	+					
7.	Эконометрика						
8.	Математическая статистика	+					



9.	Методы оптимальных решений		+				+
----	----------------------------	--	---	--	--	--	---

### 5.3. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	Семина	СРС	Всего
1.	Введение. Математические модели и оптимизация в экономике	4	-	-	4	6	14
2.	Задача нелинейного программирования	10	-	-	12	14	36
3.	Задача линейного программирования	6	-	-	8	10	24
4.	Оптимизация в условиях неопределенности	6	-	-	6	10	22
5.	Основные понятия многокритериальной оптимизации	6	-	-	8	8	22
6.	Оптимизация динамических систем	8	-	-	8	10	26
Итого:		40	-	-	46	58	144

### 6. Лабораторный практикум

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование лабораторных работ	Трудоемкость (часы/зачетные единицы)
1.			
2.			
3.			
...			

### 7. Примерная тематика курсовых проектов (работ) \_\_\_\_\_

### 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Изд. Айрис-Пресс, 2002. (гл. 1-2)

2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Высшая школа, 2001. (гл. 3)
3. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. СПб.: Лань, 2000. (гл. 8, 9)

б) дополнительная литература

1. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. М.: Наука, 1979.
2. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Издательство «Наука», 1984.
3. Хазанова Л.Э. Математические методы в экономике. Учебное пособие. М.: Изд. БЕК, 2002.
4. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Издательство «Факториал», 2001.
5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: Изд. БГУ, 1975.
7. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.Н. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.
8. Токарев В.В., Соколов А.В. Методы оптимальных решений (ридер).
9. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: Изд. ДЕЛЮ, 2003.
10. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
11. Fletcher R. (2000) *Practical methods of Optimization*. Wiley.
12. Rardin R.L. (1997) *Optimization in Operations Research*. Prentice Hall.
13. Walsey L.A. (1998) *Integer Programming*. Wiley.
14. Райфа Г. Анализ решений. М.: Наука, 1977.
15. Clemen, R.T. (1996) *Making Hard Decisions*. Belmont: Duxbury Press.
16. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2000.
17. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
18. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992.
19. Lotov A.V., Bushenkov V.A., and Kamenev G.K. (2004) *Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier*. Kluwer Academic Publishers.
20. Miettinen K. (1999) *Nonlinear multi-objective optimization*. Kluwer Academic Publishers.
21. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. М.: Наука, 1969.
22. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001.
23. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: Изд. БГУ, 1975.

24. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
25. Kamien, M.I., Schwarz, N.L. (1981) Dynamic optimization. The calculus of variations and optimal control in economics and management. New York: Elsevier.
26. Bryson A.E. (2002) Applied linear optimal control: examples and algorithms. Cambridge Univ. Press.
27. Denardo E.V. (2003) Dynamic Programming: Models and Applications. Dover Publ.

### 9. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специально оборудованные кабинеты и аудитории: компьютерные классы, аудитории, оборудованные мультимедийными средствами обучения.

### 10. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется в виде контрольной работы (60 мин.) и домашнего задания, выполненного с использованием вычислительной техники. Итоговый контроль осуществляется в виде письменного экзамена (120 мин.). Итоговая оценка  $O_{\text{итог}}$  по 10-балльной шкале формируется как взвешенная сумма  $O_{\text{итог}} = 0,3 * O_{\text{к.р.}} + 0,2 * O_{\text{д.з.}} + 0,5 * O_{\text{экза.}}$ , округленная до целого числа баллов.  $O_{\text{к.р.}}$ ,  $O_{\text{д.з.}}$  и  $O_{\text{экза.}}$  обозначают оценки по 10-балльной шкале за контрольную работу, домашнее задание и экзамен соответственно.

### Таблица соответствия оценок по десятибалльной и пятибалльной системе.

По десятибалльной шкале	По пятибалльной системе
1 – неудовлетворительно 2 – очень плохо 3 – плохо	неудовлетворительно – 2
4 – удовлетворительно 5 – весьма удовлетворительно	удовлетворительно – 3
6 – хорошо 7 – очень хорошо	хорошо – 4
8 – почти отлично 9 – отлично 10 - блестяще	отлично - 5

**Вопросы для оценки качества освоения дисциплины****Теоретические вопросы****Тема I**

1. Что такое инструментальные переменные и параметры математической модели? В чем состоит их отличие?
2. Что такое допустимое множество?
3. Что такое критерий оптимизации и целевая функция?
4. Что такое линии уровня целевой функции?
5. Дайте формулировку детерминированной статической задачи оптимизации.
6. Назовите причины неопределенности в параметрах математической модели и объясните ее влияние на решение.
7. Приведите примеры использования математических моделей для описания поведения экономических агентов.
8. Что такое рациональное поведение с точки зрения теории оптимизации?
9. Как методы оптимизации используются при принятии экономических решений?
10. Расскажите об использовании оптимизации в задачах идентификации параметров математических моделей.
11. Что такое глобальный максимум критерия и оптимальное решение?
12. Достаточное условие существования глобального максимума (теорема Вейерштрасса).
13. Назовите причины отсутствия оптимального решения.
14. Что такое локальный максимум?

**Тема II**

15. Сформулируйте общую задачу нелинейного программирования.
16. Сформулируйте необходимое условие локального максимума в общей задаче нелинейного программирования.
17. Что такое функция Лагранжа?
18. Дайте определение седловой точки функции Лагранжа.
19. Сформулируйте и докажите достаточное условие оптимальности с помощью функции Лагранжа.
20. Сформулируйте условие дополняющей нежесткости и дайте его экономическую интерпретацию.
21. Дайте определение выпуклого множества.
22. Какие свойства имеют выпуклые множества?
23. Дайте определение опорной гиперплоскости.
24. Дайте определение разделяющей гиперплоскости.

25. Сформулируйте и проиллюстрируйте теорему об отделимости выпуклых множеств.
26. Сформулируйте понятие выпуклой и вогнутой функций.
27. Что такое строгая выпуклость функции?
28. Что такое надграфик функции? Какими свойствами обладает надграфик выпуклой функции?
29. Сформулируйте достаточное условие выпуклости функции.
30. Какие свойства имеют выпуклые функции?
31. Сформулируйте выпуклую задачу нелинейного программирования.
32. Сформулируйте теорему о глобальном максимуме в выпуклом случае.
33. Приведите содержательный пример выпуклой задачи нелинейного программирования.
34. Сформулируйте теорему Куна-Таккера.
35. Дайте экономическую интерпретацию множителей Лагранжа.
36. Как решения выпуклой задачи оптимизации зависят от параметров?

### **Тема III**

37. Сформулируйте задачу линейного программирования.
38. Приведите содержательные примеры задачи линейного программирования.
39. Что такое нормальная (стандартная) и каноническая формы задачи линейного программирования?
40. Какие свойства имеет допустимое множество задачи линейного программирования?
41. Какие свойства имеет оптимальное решение в задаче линейного программирования?
42. Как выглядят функция Лагранжа и условия Куна-Таккера в задаче линейного программирования?
43. Сформулируйте двойственную задачу линейного программирования.
44. Сформулируйте теоремы двойственности в задаче линейного программирования.
45. Дайте интерпретацию двойственных переменных в задаче линейного программирования.
46. Расскажите об анализе чувствительности в задаче линейного программирования.
47. Примените графический метод для решения конкретной задачи линейного программирования.
48. В чем состоят методы решения задач линейного программирования, основанные на направленном переборе вершин (симплекс-метод и др.)?
49. Какие возможности предоставляет среда MS Excel для решения задач линейного программирования?
50. В чем состоят градиентные методы решения задачи безусловной оптимизации?

51. Как штрафные функции используются при поиске решения выпуклой задачи нелинейного программирования?
52. Расскажите о методах решения задач линейного программирования, основанных на применении штрафных функций.

#### **Тема IV**

53. Сформулируйте задачу выбора решений в условиях неопределенности.
54. Назовите и сформулируйте критерии выбора решений в условиях неопределенности (принцип гарантированного результата, критерий Гурвица, критерий Байеса-Лапласа, критерий Сэвиджа).
55. Как определяется множество допустимых гарантирующих программ?
56. Что такое наилучшая гарантирующая программа?
57. Как используется вероятностная информация о параметрах в задачах принятия решений при случайных параметрах.
58. В чем состоит принятие решений на основе математического ожидания?
59. Как учитывается склонность к риску?

#### **Тема V**

60. Сформулируйте постановку задачи многокритериальной оптимизации.
61. Что такое множество достижимых критериальных векторов?
62. Дайте определение доминирования и оптимальности по Парето.
63. Что такое эффективные решения и паретова граница.
64. Назовите основные подходы к построению методов поиска решений в задачах многокритериальной оптимизации.

#### **Тема VI**

65. Приведите примеры многошаговых систем в экономике.
66. В чем состоят особенности динамических задач оптимизации?
67. Приведите примеры динамической задачи оптимизации.
68. Что такое многошаговые динамические модели?
69. Что такое непрерывные динамические модели?
70. Что такое управление и переменная состояния в динамических моделях?
71. Приведите примеры задания критерия в динамических задачах оптимизации.
72. В чем состоит метод динамического программирования в многошаговых задачах оптимизации?

73. Сформулируйте принцип оптимальности и запишите уравнение Беллмана.
74. Как задача оптимизации многошаговой системы сводится к задаче математического программирования?

### Типичные задачи

1. Найти и изобразить в декартовой системе координат области выпуклости и вогнутости функции  $f(x, y) = (x-1)^3 - 6xy + y^3$ . Выпуклы ли построенные области?

2. Задачу нелинейного программирования

$$-(x_1 - 4)^2 - x_2^2 \Rightarrow \max \text{ при } \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

привести к стандартному виду. Изобразить допустимое множество и линии уровня целевой функции; решить задачу графически. Проверить, выполняются ли условия теоремы Вейерштрасса о существовании решения. На рисунке проверить выполнение условий Куна-Таккера в угловых точках допустимого множества (т.е. в точках, в которых число активных ограничений не меньше числа переменных) и в точках касания линии уровня целевой функции с границами допустимой области. Найти точки, в которых условия Куна-Таккера выполняются, и определить, какие из ограничений являются активными в таких точках. Выписать условия Куна-Таккера в найденных точках и рассчитать значения двойственных переменных. Сделать обоснованный вывод о наличии или отсутствии локального (глобального) максимума во всех рассмотренных точках.

3. Фабрика по производству мороженого может выпускать пять сортов мороженого. При производстве мороженого используется два вида сырья: молоко и наполнители, запасы которых известны. Известны также удельные затраты сырья, а также цены продукции. Требуется построить план производства, который обеспечивает максимум дохода.

4. Подготовлено несколько вариантов  $U = \{u^i, i \in I\}$  стратегий  $u^i$  управления фирмой. По каждой стратегии оценен объем  $\pi_j$  прибыли для различных прогнозов  $\xi^j, j = 1, 2, 3$ , будущей ситуации, причем не известно какой из прогнозов  $\xi^j$  реализуется. Вероятность реализации прогноза также не известна. Величины прибыли при реализации каждого из прогнозов приведены в таблице. Найти наилучшие стратегии по критериям максимакса, Байеса-Лапласа, Гурвича, Сэвиджа, а также наилучшую гарантирующую стратегию и максимальную гарантированную оценку прибыли.

5. Рассмотреть задачу целевого программирования, в которой множество допустимых решений задается неравенствами  $x_1 + 2x_2 \leq 4$ ,  $4x_1 + x_2 \leq 4$  и  $x_{1,2} \geq 0$ , критерии заданы соотношениями  $z_1 = 2x_1 + x_2$ ,  $z_2 = 2x_2$ , а целевая точка совпадает с идеальной точкой  $z^*$ , отклонение от которой задается функцией  $\rho(z, z^*) = \max \{(z_1^* - z_1), (z_2^* - z_2)\}$ . Найти и изобразить множество достижимых критериальных векторов  $Z$ , его паретову границу  $P(Z)$  и идеальную точку  $z^*$ . Изобразить линии уровня функции  $\rho(z, z^*)$ . Графически решить задачу нахождения достижимой точки  $(z'_1, z'_2)$ , дающей минимум отклонения от идеальной точки; аналитически записать задачу минимизации отклонения от идеальной точки в виде задачи линейного программирования.

6. Рассмотреть задачу двухкритериальной максимизации

$$z_1 = F_1(x) = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max, \quad z_2 = F_2(x) = -5x_1 + x_2 - 4x_3 \rightarrow \max$$

на множестве допустимых решений  $X \subset E^3$

$$2x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Найти Парето-эффективное решение, максимизирующее линейную свертку критериев

$$\phi(z_1, z_2) = 0,6z_1 + 0,4z_2.$$

Проверить, выполняется ли для возникающей задачи нелинейного программирования условия теоремы Вейерштрасса и является ли эта задача задачей выпуклого программирования. Проверить возможность использования условий Куна-Таккера в данной задаче. Выписать и проверить выполнение условий Куна-Таккера в градиентной форме для различных наборов активных ограничений. Найти решение рассматриваемой задачи нелинейного программирования. Выписать функцию Лагранжа и условия Куна-Таккера через функцию Лагранжа; проверить выполнение условий Куна-Таккера в найденном решении.

7. Фирма принимает решение о стратегии замены оборудования. Считается, что замена может осуществляться в начале любого года (практически моментально), причем частичная замена оборудования невозможна. Стоимость приобретения нового оборудования и замены старого оборудования на новое составляет 6 миллионов рублей. После замены старое оборудование, эксплуатировавшееся до этого  $t$  лет,  $t \in [0; 10]$ , реализуется по цене, которая определяется формулой  $R(t) = 0.2(10 - t)$  миллионов рублей. Известно, что прибыль от реализации продукции, произведенной за год, определяется формулой  $F(t) = 5 - t$  миллионов рублей. Планирование производится на 7 лет. Определить оптимальную стратегию замены оборудования при условии, что в начальный момент времени имеется оборудование, прослужившее 1 год.

8. Динамика фирмы описывается моделью

$$K_{t+1} = K_t + (1 - u_t) \delta K_t, \quad K_0 = 1, \quad C_{t+1} = C_t + u_t \delta K_t, \quad C_0 = 0,$$

где  $t = 0, 1, 2, \dots, T-1$  – номер года;

$K_t$  – стоимость основных фондов к началу периода  $[t, t+1]$ ;

$C_t$  – суммарные дивиденды с момента 0 до начала периода  $[t, t+1]$ ;

$u_t$  – доля дивидендов в период  $[t, t+1]$  в прибыли фирмы, которая считается равной  $\delta K_t$ , причем  $\delta$  – заданный постоянный параметр.

Величина  $u_t$  является управлением в модели, причем  $0 \leq u_t \leq 1$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots, T-1$ .

Пользуясь методом динамического программирования, построить оптимальное управление, максимизирующее суммарные дивиденды за весь период времени  $[0, T]$ , то есть величину  $C_T$ . Считать, что  $\delta = 0.6$ ,  $T = 4$ .

*Рекомендации по использованию информационных технологий:*

При выполнении домашнего задания, посвященного решению задачи линейного программирования, требуется использовать компьютерную программу, которая позволяет проводить анализ чувствительности. В частности, рекомендуется использовать оптимизатор MS Excel.



**Разработчики:**

ВЦ РАН  
(место работы)

д. ф.-м. н., профессор  
(занимаемая должность)

А.В. Лотов  
(инициалы, фамилия)

ГУ ВШЭ  
(место работы)

д. т. н., профессор  
(занимаемая должность)

В.В. Подиновский  
(инициалы, фамилия)

ГУ ВШЭ  
(место работы)

к. ф.-м. наук, доцент  
(занимаемая должность)

А.В. Соколов  
(инициалы, фамилия)

**Эксперты:**

МГУ  
(место работы)

профессор  
(занимаемая должность)

А.А. Васин  
(инициалы, фамилия)

ВЦ РАН

профессор

А.В. Лотов