ПРИМЕРНАЯ ПРОГРАММА

Наименование дисциплины

Линейная алгебра

Рекомендуется для направления (ий) подготовки (специальности (ей))

080100.62 «Экономика» подготовки бакалавра

Квалификации (степени) выпускника Бакалавр

1. Цели и задачи дисциплины:

- знакомство с понятиями линейной алгебры;
- освоение основных приемов решения практических задач по темам дисциплины;
- развитие четкого логического мышления.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

Учебная дисциплина «Линейная алгебра» входит в цикл общих математических и естественнонаучных дисциплин; требования к входным знаниям и умениям студента – знание элементарной математики: алгебры, элементарных функций, умение дифференцировать; данная дисциплина является предшествующей для следующий дисциплин: Эконометрика, Математический анализ, Микроэкономика, Макроэкономика, Дифференциальные и разностные уравнения, Дискретные математические модели, Методы оптимальных решений.

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих профессиональных компетенций: ПК-2, ПК-3, ПК-5, ПК-14, ПК-15.

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: основные определения и понятия изучаемых разделов линейной алгебры.

Уметь: формулировать и доказывать основные результаты этих разделов.

Владеть: навыками решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов / зачетных единиц	Семестры	
		1	2
Аудиторные занятия (всего)	116		
В том числе:	-	-	-
Лекции	56	х	-
Практические занятия (ПЗ)			-
Семинары (С)	60	х	-
Лабораторные работы (ЛР)			

Самостоятельная работа (всего)	100		
В том числе:	-	-	-
Курсовой проект (работа)			
Расчетно-графические работы			
Реферат			
Другие виды самостоятельной работы			
Самостоятельная работа	80	х	-
Выполнение домашнего задания	20	х	-
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)		х	-
Общая трудоемкость часы	216		
зачетные единицы	6		

(Виды учебной работы указываются в соответствии)

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

Преобразования матриц и системы линейных уравнений

Матрицы. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений. Элементарные преобразования матриц. Обратимость элементарных преобразований. Приведение матриц к ступенчатому виду элементарными преобразованиями. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений со ступенчатой матрицей системы. Общее решение систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные. Геометрическая интерпретация систем линейных уравнений в случае двух или трех неизвестных. Ненулевые решения однородной системы уравнений.

Литература: [1], глава 1.

Определитель

Определитель и элементарные преобразования. Построение определителя разложением по столбцу. Определитель транспонированной матрицы. Вычисление определителя разложением по строке.

Литература: [1], глава 2.

Линейные пространства

Простейшие следствия аксиом линейного пространства. Подпространство линейного пространства. Простейшие свойства линейно зависимых векторов. Базис и координаты векторов. Существование базиса конечномерного пространства. Размерность линейного пространства.

Литература: [1], глава 3.

Алгебра матриц

Сумма матриц. Умножение матрицы на число. Произведение матриц. Матричная запись системы уравнений. Свойства арифметических операций над матрицами. Обратная матрица и формулы Крамера. Построение обратной матрицы элементарными преобразованиями. Преобразование координат при замене базиса.

Литература: [1], глава 4.

Ранг матрицы

Ранг матрицы. Ранг ступенчатой матрицы. Неизменность ранга при элементарных преобразованиях. Теорема о ранге матрицы. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов). Ранг произведения матриц. Определитель произведения матриц.

Литература: [1], глава 5.

Структура множества решений системы линейных уравнений

Векторная запись системы уравнений. Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы линейных уравнений. Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений. Структура множества решений системы линейных уравнений. Теорема о выборе главных и свободных неизвестных.

Литература: [1], глава 6.

Линейные операторы

Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду. Характеристический многочлен линейного оператора. О корнях характеристического многочлена линейного оператора. Свойства собственных векторов с одинаковыми и различными собственными значениями.

Литература: [1], глава 7.

Линейные, билинейные и квадратичные формы

Формула линейного функционала. Матрица билинейной формы. Матрица симметричной билинейной формы. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса. Единственность симметричной билинейной формы, порождающей квадратичную форму. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. Закон инерции для квадратичных форм.

Литература: [1], глава 8.

Элементы аналитической геометрии

Прямоугольная система координат на плоскости. Расстояние между точками. Деление отрезка в данном отношении. Векторы. Равенство векторов. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора плоскости по двум неколлинеарным векторам. Скалярное произведение векторов. Общее уравнение прямой на плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Параметрическое и каноническое уравнения прямой. Расстояние от точки до прямой. Преобразование координат точки при замене системы координат. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов. Общее уравнение плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Уравнение прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых.

Литература: [1], глава 9.

Евклидовы пространства

Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Длина вектора и угол между векторами. Ортогональность векторов. Независимость попарно ортогональных векторов. Ортогональная проекция вектора на подпространство. Построение ортонормированного базиса ортогонализацией произвольного базиса. Матрица скалярного произведения в ортонормированном базисе. Ортогональные матрицы. Геометрическая интерпретация ортогональных матриц.

Литература: [1], глава 10.

Самосопряженные операторы

Сопряженность операторов в евклидовом пространстве. Матрицы сопряженных операторов. Собственные векторы и собственные значения самосопряженных операторов. Ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Литература: [1], глава 11.

Аффинные пространства

Преобразование координат точки при замене системы координат. Линейные отображения. Линейные операторы, связанные с линейными отображениями. Геометрические свойства линейных отображений. Аффинные и изометрические отображения.

Литература: [1], глава 12.

5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.	Эконометрика	+	+		+					+			
2.	Математический анализ	+	+		+	+			+		+	+	
3.	Макроэкономика		+	+	+		+	+	+	+	+		
4.	Микроэкономика			+	+		+	+	+	+	+		
5.	Дифференциальные и разностные уравнения											+	
6.	Дискретные математические модели	+	+		+	+							
7.	Методы оптимальных решений		+				+	+		+			

5.3. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	Семин.	СРС	Все-го
1.	Преобразования матриц и системы линейных уравнений.	6	-	-	6	10	22
2.	Определитель.	6	-	-	6	10	22
3.	Линейные пространства.	6	-	-	8	10	24
4.	Алгебра матриц.	4	-	-	4	8	16
5.	Ранг матрицы.	4	-	-	4	8	16
6.	Структура множества решений системы линейных уравнений.	4	-	-	4	8	16
7.	Линейные операторы.	6	-	-	6	10	22
8.	Линейные, билинейные и квадратичные формы.	4	-	-	4	8	16

9.	Элементы аналитической геометрии.	6	-	-	8	10	24
10.	Евклидовы пространства.	4	-	-	4	8	16
11.	Самосопряженные операторы.	2	-	-	2	4	8
12.	Аффинные пространства	4	-	-	4	6	14
Итого:		56	-	-	60	100	216

6. Лабораторный практикум

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование лабораторных работ	Трудоемкость (часы/зачетные единицы)
1.			
2.			
3.			
…			

7. Примерная тематика курсовых проектов (работ)______________________________

____

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература

1. Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г. *Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии*. – М.: Изд-тво ВШЭ, 2007 г.

2. Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры* – М.: Наука, любое издание.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия*. – М.: Наука, любое издание.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* – М.: Наука, любое издание.
5. *Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа (под редакцией А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича)* – М.: Наука, любое издание после1981.
6. Шевцов Г.С. *Линейная алгебра.* Учебное пособие. – М.: Гардарики, 1999.

б) дополнительная литература

1. Александров П.С. *Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры.* – М.: Наука, 1968.
2. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
3. Погорелов А.В. *Геометрия.* – М.: Наука, 1983.
4. Скорняков Л.А. *Элементы линейной алгебры. Учебное пособие.* – М.: Наука, 1980.

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специально оборудованные кабинеты и аудитории: компьютерные классы, аудитории, оборудованные мультимедийными средствами обучения.

10. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется в виде контрольной работы и домашнего задания. Контрольная работа проводится в конце первого модуля, домашнее задание должно быть сдано до контрольной работы. Продолжительность контрольной работы и экзаменационной работы — 180 минут. Итоговый контроль осуществляется в виде письменного экзамена. Полный ответ на каждый из десяти вопросов экзамена приносит одно очко. В случае неполного решения оценка ответа на вопрос может принимать значения между нулем и единицей. Например, арифметическая ошибка, не изменившая верного плана решения задачи, приводит к штрафу 0,1. Отсутствие примеров при ответе на вопрос теории приводит к штрафу 0,2. Приступая к проверке, преподаватели согласовывают оценки и для многих других типичных погрешностей.

В зависимости от набранной суммы очков определяется оценка за экзамен.

Пороговые значения следующие

Сумма	0	1.5	3	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9	9.5
Оценка по 10-балльной системе	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Тематика контрольной и домашней работ

Контрольная работа предназначена для проверки качества освоения студентами следующих компонентов курса:

1. Определения основных понятий

1.1. Преобразования матриц и системы линейных уравнений

1.1.1. Матрицы. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений.

1.1.2. Элементарные преобразования матриц.

1.1.3. Общее решение систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные.

1.2. Определитель

1.3. Линейное пространство.

1.3.1. Подпространство линейного пространства.

1.3.2. Линейная оболочка системы векторов.

1.3.3. Линейно зависимые и независимые системы векторов.

1.3.4. Базис и координаты векторов.

1.3.5. Размерность линейного пространства.

1.4. Арифметические операции над матрицами

1.4.1. Сумма матриц.

1.4.2. Умножение матрицы на число.

1.4.3. Произведение матриц.

1.4.4. Обратная матрица

1.5. Матрица перехода.

1.6. Ранг матрицы

1.7. Фундаментальная система решений.

2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры

2.1. Приведение матриц к ступенчатому виду элементарными преобразованиями.

2.2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

2.3. Определитель и элементарные преобразования.

2.4. Вычисление определителя разложением по строке или по столбцу

2.5. Построение обратной матрицы при помощи алгебраических дополнений.

2.6. Построение обратной матрицы элементарными преобразованиями.

2.7. Вычисление координат векторов.

2.8. Построение базиса линейного пространства.

2.9. Вычисление размерности пространства.

2.10. Преобразование координат при замене базиса.

2.11. Вычисление ранга при помощи элементарных преобразованиях. Ранг ступенчатой матрицы.

2.12. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов).

2.13. Исследование совместности системы линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли).

2.14. Построение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.

2.15. Построение множества решений системы линейных уравнений.

2.16. Выбор главных и свободных неизвестных.

Домашнее задание предназначено для освоения студентами следующих компонентов курса:

1. Определения основных понятий
   1.1. Преобразования матриц и системы линейных уравнений
      1.1.1. Матрицы. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений.
      1.1.2. Элементарные преобразования матриц. .
      1.1.3. Общее решение систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные.
   1.2. Определитель
   1.3. Линейное пространство.
      1.3.1. Подпространство линейного пространства.
      1.3.2. Линейная оболочка системы векторов.
      1.3.3. Линейно зависимые и независимые системы векторов.
      1.3.4. Базис и координаты векторов.
      1.3.5. Размерность линейного пространства.
   1.4. Арифметические операции над матрицами
      1.4.1. Сумма матриц.
      1.4.2. Умножение матрицы на число.
      1.4.3. Произведение матриц.
      1.4.4. Обратная матрица
   1.5. Матрица перехода.
   1.6. Ранг матрицы
   1.7. Фундаментальная система решений.
2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры
   2.1. Приведение матриц к ступенчатому виду элементарными преобразованиями.
   2.2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
   2.3. Определитель и элементарные преобразования.
   2.4. Вычисление определителя разложением по строке или по столбцу

2.5. Построение обратной матрицы при помощи алгебраических дополнений.

2.6. Построение обратной матрицы элементарными преобразованиями.

2.7. Вычисление координат векторов.

2.8. Построение базиса линейного пространства.

2.9. Преобразование координат при замене базиса.

2.10. Вычисление ранга при помощи элементарных преобразованиях. Ранг ступенчатой матрицы.

2.11. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов).

2.12. Построение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.

2.13. Построение множества решений системы линейных уравнений.

2.14. Выбор главных и свободных неизвестных.

Для оценки качества освоения дисциплины можно использовать задачи (более 170 задач по всем разделам курса), приведенные в разделе «Некоторые экзаменационные задачи» пособия Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г. *Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии*. – М.: Изд-тво ВШЭ, 2007 г.

Контрольная работа № 1. Вариант № **1**

1. Найдите координаты вектора x относительно базиса e'_1, e'_2, e'_3, если известны его координаты $\{-7, -3, -5\}$ относительно базиса e_1, e_2, e_3, причем $e'_1 = e_1 + e_2 + 2e_3, e'_2 = 6e_1 - 2e_2 - 4e_3, e'_3 = 3e_1 - e_2 - e_3$.

2. Представить общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 = 9 \\ 3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +4x_4 = 5 \end{cases}$ как выражение главных неизвестных через свободные.

3. Вычислить $\det \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -4 & 7 \\ 6 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ как функцию от числа λ.

6. Укажите какой-нибудь вектор, не принадлежащий линейной оболочке векторов $a_1\{1, 2, 3\}$, $a_2\{4, 5, 6\}$.

7. Найдите какой-нибудь базис в пространстве всех симметричных матриц второго порядка (с обычными операциями) и вычислите координаты матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ относительно этого базиса.

Экзаменационный билет № **1**

1. Формула Крамера решения систем линейных уравнений с невырожденной матрицей системы.

2. Нарисуйте параллелепипед и укажите те его диагонали, которые соответствуют векторам $a+b-c$ и $a-b+c$, если векторы a, b, c соответствуют ребрам этого параллелепипеда.

3. Отрезок с концами в точках $A(3, 5)$ и $B(-12, -4)$ разделен на три равные части. Найдите координаты точек деления.

4. Найдите ранг матриц AB и BA, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

5. С помощью правила Крамера решить систему уравнений
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases}$.

6. Компланарны ли векторы $a = (4, 3, 2), b = (1, 2, 3), c = (1, 0, -1)$?

7. Найдите какой-нибудь базис в пространстве всех векторов из $\mathbb{R}^3$, перпендикулярных вектору $\{1, 2, 3\}$.

8. Могут ли матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ быть матрицами одного оператора в различных базисах?

9. В некотором базисе e_1, e_2 матрица скалярного произведения имеет вид $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите угол (в градусах) между векторами e_1 и e_2.

10. Вычислите площадь параллелограмма, стороны которого — векторы $a = \mathbf{k} - 2\mathbf{i}$ и $b = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Домашняя работа № 1. Вариант № 110.1

1. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -2x_3=6 \\ 4x_1 & +3x_2 & -x_3=7 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3=5 \end{cases}$

   (a) методом Гаусса

   (b) в матричной форме $X = A^{-1}B$, где A^{-1} вычислить через алгебраические дополнения

   (c) в матричной форме $X = A^{-1}B$, где A^{-1} вычислить при помощи элементарных преобразований.

2. Представить общее решение системы линейных уравнений
$\begin{cases} 7x_1 & +5x_2 & +7x_3 & +4x_4=35 \\ x_1 & +7x_2 & +8x_3 & +2x_4=33 \end{cases}$

   (a) как выражение главных неизвестных через свободные

   (b) в векторной форме с использованием базиса в пространстве решений соответствующей однородной системы.

3. Вычислить $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -2 \\ 6 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти произведение матриц AB, AB^*, A^*B, A^*B^*, BA, B^*A, BA^*, B^*A^* в тех случаях, когда умножение определено.

5. Найти координаты вектора x относительно базиса e_1', e_2', если известны его координаты $\{50, 48\}$ относительно базиса e_1, e_2, причем $e_1' = 7e_1 + 8e_2, e_2' = 9e_1 + 8e_2$.

6. Найти ранг матрицы A как функцию параметра λ

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & 9 \\ \lambda & -5 & 1 & -11 \\ -9 & 1 & -4 & 6 \\ -5 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

7. Выделите среди векторов $a_1(3, -12, -1, 2)$, $a_2(-1, 7, 1, 1)$, $a_3(1, 2, 1, 4)$, $a_4(1, 1, 4, 1)$ какой-нибудь базис порожденной ими линейной оболочки, а затем найдите координаты остальных векторов относительно этого базиса.

8. Векторы $e_1(-4, -1, 1)$, $e_2(-2, 1, 1)$, $e_3(3, -2, -2)$ и $e_1'(14, 6, -2)$, $e_2'(0, 8, 4)$, $e_3'(-3, -2, 0)$ заданы координатами относительно некоторого базиса. Докажите, что системы векторов e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3' являются базисами ("старым" и "новым") и найдите матрицу перехода от "старого" базиса к "новому".

Разработчики:

___ГУ ВШЭ_______	__д. ф.-м. н., проф.	__С.Г. Лобанов_______
(место работы)	(занимаемая должность)	(инициалы, фамилия)
___________________	_________________	_____________________
(место работы)	(занимаемая должность)	(инициалы, фамилия)

Эксперты:

_____МГУ___ _____	_ ___ профессор ___ _	___А.А. Васин___ __
(место работы)	(занимаемая должность)	(инициалы, фамилия)
_____ВЦ РАН___ __	_ ___ профессор ___ _	___А.В. Лотов___ __