Предисловие

Математика – это язык!
Дж.У.Гиббс

В основе современной логики лежит математическая система, которая имеет несколько названий: формальный подход, аксиоматический метод, символическая логика, теория формальных систем. Здесь мы будем использовать последнее название (сокращенно ТФС). Этот подход начал развиваться в начале XX века, когда были открыты парадоксы теории множеств. Большинство расценило эти открытия как кризис в основаниях математики. Тогда многие математики, логики и философы решили, что только ТФС может стать защитой от парадоксов и заодно – основой всей математики и логики.

Активность защитников ТФС, среди которых были многие всемирно известные математики и философы (Б. Рассел, Л. Витгенштейн, Д. Гильберт, Дж. Пеано и др.), оказалась столь сильной, что развивавшийся в то время подход к основаниям логики на основе алгебры множеств, булевой алгебры и теории отношений стал постепенно утрачивать свое влияние. В середине XX века своеобразным каноном для приверженцев ТФС стало многотомное математическое сочинение группы известных математиков, публиковавшихся под коллективным псевдонимом Н. Бурбаки [*Бурбаки*, 1965]. В соответствии с этим каноном из оснований математики должны были исчезнуть такие "неточные", "интуитивные" понятия, как числа, пространства, геометрические фигуры, множества и т.д. По замыслу авторов этих сочинений, в основаниях математики возможны только символы и последовательности символов (предложения), слабо связанные с основными понятиями прикладной математики и предложениями на естественном языке [*Арнольд*, 2002].

Оказалось, что с помощью ТФС можно изложить не только классическую логику (к ней относятся теория доказательств, математическая логика и отчасти силлогистика), но и многочисленные варианты неклассической логики (многозначная, модальная, парапротиворечивая, немонотонная и т.д.). В дальнейшем новые логики посыпались как из рога изобилия, и мало кого смущали следующие обстоятельства:

- многие из новых логик не имеют никакого прикладного значения и противоречат здравому смыслу;
- парадоксы, потрясшие всю математику в первой четверти XX века, так и остались необъяснимой загадкой;
- в качестве аксиом в некоторых логиках можно использовать не только бесспорные суждения, но и суждения, противоречивость которых видна невооруженным глазом (например, парапротиворечивые логики).

Язык математической логики есть частный случай ТФС. В системах искусственного интеллекта основные концепции ТФС отражены в виде ***декларативного подхода***, в котором знания выражаются в форме высказываний (или правил). В рамках этого подхода системы конструируются путем представления знаний на некотором формальном языке, а задачи решаются применением процессов логического вывода к знаниям.

Альтернативой декларативному является ***процедурный подход***, в котором правила или высказывания выражаются как алгоритмы и, в конечном итоге, в виде кода программы. В 1970-1980-х годах между приверженцами этих двух подходов происходили ожесточенные дебаты. Однако в дальнейшем многие исследователи пришли к выводу, что успешно действующие интеллектуальные системы должны сочетать в себе и декларативные, и процедурные элементы.

Развитие декларативного подхода сопровождается рядом трудностей и проблем, обусловленных его спецификой, включая следующие.

1. При использовании декларативного подхода многие задачи логического анализа необходимо сводить к задаче "выполнимость логической формулы", в которой возможны только два варианта ответа ("да" или "нет"). Этот процесс сведения, несмотря на большой объем позитивных результатов в этой области, весьма непрост. К тому же во многих случаях, когда требуется не только ответить на вопрос типа "да или нет?", но и оценить значения параметров системы или состав и число объектов, удовлетворяющих заданным условиям, он оказывается нереализуемым. Как следствие, основанные на декларативном подходе языки искусственного интеллекта стали значительно усложняться из-за необходимости их наполнения различными "недекларативными" процедурами и функциями. Также в настоящее время наблюдается тенденция использования в качестве основных языков для программирования интеллектуальных систем не специфических языков искусственного интеллекта, а процедурно

ориентированных языков. При этом сохраняется разрыв между "декларативной" теорией и "процедурной" практикой.

2. Полноценный логический анализ систем включает в себя не только логический вывод, но и анализ неопределенностей и коллизий, формирование гипотез и абдуктивных заключений. Но если задачи логического вывода хоть и с трудом, но решаются формальными средствами на основе классического подхода, то для решения остальных задач привлекаются в основном неклассические логики. Спрашивается, как можно эти подходы корректно совместить в одной системе?

3. Современные интеллектуальные системы состоят из двух типов разнородных объектов: ***баз данных*** (БД) и ***баз знаний*** (БЗ). Их структуры принципиально различны, так как их построение основано на разных теоретических подходах. Представление и обработка данных (фактов, таблиц, графов, сетей, текстов и т.д.) соответствует алгебраическому подходу и часто используется при анализе данных. Что касается баз знаний, то их основные модели (предикаты, фреймы, семантические сети, правила) строятся на основе декларативного подхода. Это приводит к существенным различиям структур в системах программирования для БД и БЗ и, соответственно, большим затратам времени и средств на разработку методов сопряжения БД и БЗ в одной системе.

Традиционно к основным недостаткам алгебраического подхода в применении к задачам логического анализа относят высокую вычислительную сложность алгоритмов их решения (так называемую проблему "экспоненциальной катастрофы"). Однако полностью решить эту проблему не удается и в рамках теории формальных систем, несмотря на то, что здесь достигнуты значительные результаты в части снижения трудоемкости логических процедур.

В настоящее время попытка изложить методы логического анализа рассуждений на языке, отличающемся от языка ТФС, кажется проблематичной. Возникает вопрос: можно ли вместо символьных конструкций ТФС предложить некую новую универсальную структуру, с помощью которой можно сделать логику более понятной и более практичной?

Оказывается, такая универсальная структура уже давно имеется на вооружении математиков и специалистов по информационным технологиям. Она используется при моделировании и анализе информационных и управляющих систем, она же присутствует в качестве интерпретации во всех структурах математической логики и к тому же позволяет найти более тесную связь логики высказываний и предикатов с основными структурами, использующимися в современной информатике. Этой универсальной структурой является ***отношение***. Примеры отношений – такие понятия, как "больше", "часть целого", "причина-следствие", "уважает (кто?, кого?)", "дети-родители" и т.д. В математической логике отношения выражаются с помощью предикатов и логических формул.

В современной информатике отношения широко используются. Математические инструменты для отображения отношений известны: это ***теория бинарных отношений*** и ***реляционная алгебра***. Первая применяется для отображения графов, семантических сетей, систем логического анализа на решетках и т.д. Вторая тесным образом связана с системами управления базами данных (СУБД). Однако с помощью бинарных отношений далеко не всегда можно выразить отношения и предикаты с размерностью более двух, а реляционная алгебра не предназначена для решения многих задач логического анализа. Кроме того, в рамках этих теорий для совокупности отношений, не являющихся подмножествами одного декартова произведения, не сохраняется соответствие с алгеброй множеств: операции алгебры множеств для такого случая не определены.

Поэтому возникает необходимость в использовании более общего математического аппарата для теории отношений, расширяющего аналитические средства и области применения такой теории. С этой целью авторами разработана математическая система, названная алгеброй кортежей (АК), которая может служить интерпретацией исчисления предикатов первого порядка. Однако, предполагаемая область применения этой теории не ограничивается только такой возможностью, она позволяет с единых позиций взглянуть на обработку структур знаний, представимых в виде предикатов, бинарных отношений (графы, семантические сети и т.д.), и структур данных, например, реляционных таблиц.

Аналитический аппарат АК основан на свойствах декартовых произведений множеств – эти свойства позволяют компактно представлять отношения, содержащие большое число элементарных кортежей. В рамках АК предложен новый подход к проверке корректности логического вывода и к методам порождения следствий. Исследованиями установлено, что, помимо новых подходов к решению задач логического вывода, с помощью АК решаются следующие задачи:

1) моделирование и анализ модифицируемых рассуждений (гипотезы, абдукция и т.д.) и рассуждений с неопределенностями;

2) логико-семантический анализ моделируемых систем;

3) вероятностный анализ логических систем;

4) унифицированное представление данных и знаний;

5) при машинной реализации – сокращение трудоемкости алгоритмов решения сложных задач логического анализа за счет специфических свойств АК, а также за счет возможности эффективного распараллеливания алгоритмов.

Об этих и других возможностях АК подробно рассказано в настоящей книге.

Структура монографии. Книга содержит введение, пять глав и заключение. В монографии 235 страниц текста, 26 таблиц, 19 рисунков, 2 приложения и список литературы на 94 наименования.

Во **Введении** определяется позиция алгебры кортежей в семействе алгебраических систем. С математической точки зрения АК относится к алгебраическим системам, поэтому целесообразно рассмотреть основные понятия и свойства таких систем. Описаны наиболее общие классы алгебраических систем, в том числе, класс булевых алгебр, играющий важную роль в современной математической логике и вычислительной технике. Устанавливается, что АК относится к классу булевых алгебр.

В **первой главе** дается краткое введение в теоретические основы часто используемых в информационных технологиях математических структур, которые лежат в основе АК или имеют тесную смысловую связь с нею. К ним относятся алгебра множеств, алгебра логики, системы логического вывода, многоместные отношения. Данную главу можно рассматривать также как краткое введение в основы дискретной математики в объеме, необходимом для понимания последующих глав.

Во **второй главе** рассматриваются теоретические основы АК. Приводятся определения основных понятий и выводится в виде теорем ряд соотношений, с помощью которых реализуются алгоритмы выполнения основных операций на структурах АК. Минимальное сочетание основных операций АК (операции алгебры множеств и пять простых операций с атрибутами) дает возможность при определенной их комбинации выполнять многие сложные процедуры (соединение, композиция, транзитивное замыкание, квантификация и т.д.) с многоместными отношениями и предикатами.

В **третьей главе** описываются методы уменьшения трудоемкости вычислительных операций для задач, часто встречающихся в системах логического вывода и в системах искусственного интеллекта. Эти методы основаны на специфических свойствах структур АК, в частности, их матричной (точнее, матрицеподобной) структуре.

В **четвертой главе** представлен основанный на АК принципиально новый подход к решению задач логического анализа систем и рассуждений. Свойства АК позволяют не только решать задачи логического вывода, но и задачи, выходящие за пределы дедукции, в частности задачи порождения и анализа гипотез и абдуктивных заключений, которые входят в состав так называемых модифицируемых рассуждений. Отличительная особенность предлагаемых методов решения подобных задач состоит в том, что они основаны на классических основаниях логики, то есть не используют немонотонные логики, логики умолчаний и т.д., в которых допускаются нарушения некоторых законов булевой алгебры и алгебры множеств.

В **пятой главе** приводятся примеры приложений АК, относящиеся к самым различным задачам и использующие широкий спектр методов: методы погружения структур АК в измеримое пространство, логико-вероятностный анализ, реляционная алгебра, теория бинарных отношений (в том числе, неоднородные семантические сети, формальный анализ понятий) и др.

Учитывая многообразие задач и приложений на основных объектах дискретной математики, в которых главную роль играют отношения, можно предположить, что АК может рассматриваться как математическая основа общей теории отношений.

В **заключении** изложены основные результаты работы и возможные направления дальнейших разработок по исследованной проблеме.

Авторы признательны О.В.Фридман за большую помощь в оформлении книги.