

Разработка моделей оптимизации производственной программы промышленного предприятия на основе формулирования целевых функций

© 2010 С.В. Созонов

заместитель генерального директора

директор Екатеринбургского филиала ОАО “Уралсвязьинформ”

E-mail: velyalin@mail.ru

В статье предложена однокритериальная линейная модель оптимизации показателей хозяйственной деятельности предприятия, в которой в качестве критерия оптимальности используется максимум объема производства. Также в статье рассмотрена однокритериальная модель максимизации рентабельности продукции предприятия, которая является задачей дробно-линейного программирования и была решена методом искусственного базиса.

Ключевые слова: производственная программа предприятия, промышленное предприятие, оптимизация программы предприятия.

Производственные программы предприятия (ППП) определяют перечень изделий и их количество, а также стоимость изготовления и его сроки. Основой формирования ППП является оптимальный план выпуска изделий, разрабатываемый по результатам изучения конъюнктуры рынка и сбыта продукции. Хорошим подспорьем для этого служит разработанная обобщенная математическая модель деятельности предприятия, давшая возможность получить основное уравнение производства, связывающее между собой качество производимого предприятием товара (услуги), затраты и время, идущие на его изготовление. Она позволила представить наиболее используемые стратегии предприятия в виде трех оптимизационных задач, обеспечивающих в зависимости от выбора стратегии либо минимизацию времени производства промышленной продукции при фиксированных качестве и затратах, либо минимизацию затрат на производство товара при фиксированных качестве и времени, либо максимизацию качества произведенной промышленной продукции при фиксированных времени и затратах. При этом представлены 15 композиционных экономико-статистических моделей рынка, перекрывающих практически весь реальный диапазон ситуаций, которые могут иметь место на рынке промышленных товаров, и дающих возможность проводить оценку основных показателей, характеризующих экономическую эффективность деятельности предприятия (средняя прибыль и стандартное отклонение прибыли от своего среднего значения, вероятность превышения прибылью заданного значения, вероятность реализации произведенного промышленного товара, вероятность получения неотрицательной прибыли и т.п.), в зависимости от цен на продукцию.

Наиболее сложным и ответственным этапом считается планирование выпуска изделий и обеспечение необходимых условий для выполнения ППП, которой определяется перечень изделий и их количество, а также стоимость изготовления и его сроки. В процессе планирования прорабатывается ряд вариантов выпуска продукции и выбирается наилучший.

ППП предприятия определяется вектором $\bar{x} = (x_{ij})$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, L_i$, где x_{ij} - количество изделий вида i , производимых по технологии j ; N - количество типов изделий, производство которых вероятно в планируемом промежутке времени (периоде); L_i - число альтернативных технологий изготовления изделий типа i . В общем случае возможен набор альтернативных технологий, различных типов оборудования. Каждая из технологий $j = 1, \dots, L_i$ производства изделия i ($i = 1, \dots, N$) задается набором чисел a_{ijk} по типам оборудования $k = 1, \dots, K$, где a_{ijk} - время, необходимое k типу оборудования для изготовления изделия i по технологии j . Условия обеспеченности процесса выполнения ППП имеют вид

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} a_{ijk} x_{ij} \leq T_k r_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (1)$$

где T_k - число рабочих часов оборудования типа k в планируемом периоде;

r_k - количество единиц оборудования типа k .

Априори учитывалось, что ППП должна быть ниже производственной мощности. Определяя

ограничения, накладываемые на количество выпускаемых изделий, рассчитывали нормативы запасов исходных ресурсов, имеющихся в наличии:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} b_{ijm} x_{ij} \leq s_m, \quad m = 1, \dots, M, \quad (2)$$

где b_{ijm} - расход исходного ресурса типа m для производства изделия i по технологии j ;

s_m - количество исходного ресурса типа m .

Ограничения на максимальный и минимальный объемы выпуска изделий вида i , обусловленные, например, величиной спроса на конечные изделия и необходимостью сохранения минимальной доли на рынке, принимались в виде:

$$Supply_i \leq \sum_{j=1}^{L_i} x_{ij} \leq Demand_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где $Supply_i, Demand_i$ - минимальный и максимальный объемы выпуска изделий вида i .

Ограничения по электрической и тепловой энергии учитывались в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} \sum_{k=1}^K \delta_{ijk}^{(1)} x_{ij} &\leq Q^{(1)}, \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} \sum_{k=1}^K \delta_{ijk}^{(2)} x_{ij} &\leq Q^{(2)} \end{aligned} \quad (4)$$

где $\delta_{ijk}^{(1)}, \delta_{ijk}^{(2)}$ - расход электрической и тепловой энергии, соответственно, необходимый для производства изделия i по технологии j на оборудовании типа k ;

$Q^{(1)}, Q^{(2)}$ - общее количество электроэнергии и тепловой энергии, соответственно.

Естественно, выполнялось требование неотрицательности количества выпускаемых изделий, т.е. $x_{ij} \geq 0, j = 1, \dots, L_i, i = 1, \dots, N$.

Одним из основных показателей эффективности работы предприятия является прибыль, получаемая от реализации продукции, поэтому критерием оптимизации ППП выступает функция, определяющая прибыль от реализации произведенных изделий:

$$F_1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} Pr_i x_{ij} \rightarrow \max, \quad (6)$$

где Pr_i - прибыль, получаемая от реализации изделия вида i .

Предприятию важно получить максимальный объем производства, поэтому критерием оптимизации ППП можно выбрать функцию, определяющую объем производства:

$$F_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} x_{ij} \rightarrow \max. \quad (7)$$

Интересным и логичным является случай рассмотрения в качестве критерия оптимизации ППП себестоимости продукции, приходящейся на единицу изделия, которая выражается следующей функцией:

$$F_3 = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} c_{ij} x_{ij} \right) / \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} x_{ij} \right) \rightarrow \min, \quad (8)$$

где c_{ij} - себестоимость изделия вида i , изготовленного по технологии j .

Одним из основных показателей эффективности производства является рентабельность продукции предприятия, определяемая отношением прибыли, получаемой от реализации продукции, к ее себестоимости, т.е.

$$F_4 = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} Pr_i x_{ij} \right) / \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} c_{ij} x_{ij} \right) \rightarrow \max. \quad (9)$$

Формирование ППП и ее распределение во времени производится раз в год. Во время реализации программы возможны различные корректировки, связанные с изменением номенклатуры и количества изделий, а также объема работ. Квартальные и месячные периоды планирования не являются случайными. Они традиционно определяют рубежи, по которым каждое подразделение предприятия отчитывается о выполнении ППП. Во всех разработанных математических моделях оптимизации ППП в качестве планового периода выбирается месяц.

На основании рассуждений, приведенных выше, автором разработано 4 модели оптимизации выпуска изделий в планируемом периоде, в том числе математическая модель максимизации объема выпуска. В качестве целевой функции в данной модели был принят максимум объема выпускаемых предприятием изделий:

$$F_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} x_{ij} \rightarrow \max,$$

$$\text{ограничения: } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} a_{ijk} x_{ij} \leq T_k r_k, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} b_{ijm} x_{ij} \leq s_m, \quad m = 1, \dots, M, \quad (10)$$

$$Supply_i \leq \sum_{j=1}^{L_i} x_{ij} \leq Demand_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} \sum_{k=1}^K \delta_{ijk}^{(1)} x_{ij} \leq Q^{(1)}, \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} \sum_{k=1}^K \delta_{ijk}^{(2)} x_{ij} \leq Q^{(2)}, \quad x_{ij} \geq 0,$$

$$j = 1, \dots, L_j, i = 1, \dots, N.$$

Оптимальное решение этой задачи получено симплекс-методом без учета ограничения (10) на максимальный и минимальный объемы выпуска по каждому виду изделия при прочих равных условиях. Производственная программа, предусматривающая выпуск изделий 8 видов, представлена в табл. 1.

Оптимальная ППП, максимизирующая объем производства, предусматривает выпуск изделий в увеличенном размере (101, 6% по сравнению с оптимальным решением модели максимизации прибыли). При этом величина прибыли составила 91,6%, а себестоимость - 89,8% (уменьшилась на 1,04 руб. по сравнению с тем же оптимальным решением). Рентабельность продукции при ука-

Таблица 1. Оптимальная ППП при условии максимизации объема выпускаемой продукции

Изделие	Количество, шт.	Прибыль, руб.
180505 AC 17	263 825	638 456, 50
180603 AC 9	192 037	424 401, 77
6203	41 938	54 519, 40
60-202 А	477 453	558 620, 01
6204	10 471	16 963, 02
201 АК	238 413	262 710, 43
505 А	52 991	128 238, 22
104 А	81 523	113 316, 97
Итого	1 358 651	2 197 226, 32

Таблица 2. Остатки ресурсов машинного времени по типам оборудования при оптимальной ППП модели максимизации объема выпуска продукции

Тип оборудования	Количество оборудования, шт.	Остатки машинного времени, ч
Галтовочный наклонный барабан "Вичуга"	25	4843
Желобошлифовальный станок Siag E50	79	709
Желобошлифовальный станок БДЛЗ 80	79	1551
Круглошлифовальный станок SaSl 200 x 500	79	3247
Полировальный станок ЛЗ 194	10	2053
Правильно-калибровочный ПК-290	4	879
Станок для резки металла М-1	22	4524
Суперфинишный станок ЛЗ 261	10	2043
Термическая печь СБЗА для шариков	22	149
Термическая печь СКЗА для колец	4	866
Токарный станок 1А240-6	18	1440
Токарный станок 1Б240-6	14	263
Токарный станок 1Б240-6К	10	70
Токарный станок 1Б265-6К	10	860
Токарный станок 1Б265-6Н	9	68
Токарный станок 1Б265Н-6К	5	7
Токарный станок ЖА0250-0062	17	84
Торцешлифовальный станок 3344АЕО	79	1556
Холодно-высадочный автомат А3720	2	7
Холодно-высадочный автомат АА3720А	4	63
Холодно-высадочный автомат 835.032.00.000	5	10
Холодно-высадочный пресс МПО-12	7	433
Шарикоходочный станок ВШ-314Д	25	387
Шарикоходочный станок МА-10С	25	1538
Шарикообкаточный станок МРВ-800НМ	25	1575
Шарикошлифовальный станок MRB-800НМ	50	3281
Штамповочный пресс Н21	15	103
Штамповочный пресс 03746	15	212
Штамповочный пресс FT-S2-60	15	678
Штамповочный пресс А6126В	15	18
Штамповочный пресс АА6124А	15	107
Штамповочный пресс КД 2324	15	607

занной оптимальной производственной программе равна 17, 03%. Анализ базы данных показал, что виды изделий, вошедшие в оптимальную производственную программу, имеют небольшие затраты по времени изготовления.

Остатки ресурсов машинного времени по типам оборудования при оптимальной ППП модели максимизации объема выпуска продукции представлены в табл. 2.

Из данных табл. 2, в которой приведены остатки ресурсов машинного времени по типам оборудования, следует, что из 39 принятых в расчете типов оборудования и при существующей технологии определяется отсутствие резервов по одному типу оборудования - сборочным линиям. Следовательно, этот ресурс является дефицитным и его двойственная оценка положительна. Значения двойственных оценок, соответствующих данной производственной программе, приведены на рис. 1.

Данная модель относится к задачам дробно-линейного программирования. В области допустимых решений знаменатель целевой функции в нуль не обращается и, следовательно, сохраняет знак. Для всех x_{ij} , $j = 1, \dots, L_i$, выполняется усло-

вие $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} c_{ij} x_{ij} > 0$. Задача решена с помощью

введения новых переменных $y_0 = 1 / \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} c_{ij} x_{ij}$,

$$y_{ij} = x_{ij} \cdot y_0, \quad j = 1, \dots, L_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Модель максимизации рентабельности продукции приняла вид

$$\tilde{F} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} Pr_i y_{ij} \rightarrow \max$$

Рис. 1. Двойственные оценки при оптимальной производственной программе модели максимизации объема выпуска продукции

Наиболее ценным ресурсом в данном случае является проволока 0,8, и ее количество необходимо увеличивать в первую очередь.

Автором также разработана не менее важная модель максимизации рентабельности продукции:

$$F_4 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} Pr_i x_{ij} / \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max,$$

$$\text{ограничения: } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} a_{ijk} x_{ij} \leq T_k r_k, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} b_{ijm} x_{ij} \leq s_m, \quad m = 1, \dots, M,$$

$$\text{Supply}_i \leq \sum_{j=1}^{L_i} x_{ij} \leq \text{Demand}_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} \sum_{k=1}^K \delta_{ijk}^{(1)} x_{ij} \leq Q^{(1)}, \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} \sum_{k=1}^K \delta_{ijk}^{(2)} x_{ij} \leq Q^{(2)},$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, L_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

$$\text{при ограничениях } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} a_{ijk} y_{ij} - T_k r_k y_0 \leq 0,$$

$$k = 1, \dots, K,$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} b_{ijm} y_{ij} - s_m y_0 \leq 0, \quad m = 1, \dots, M,$$

$$\text{Supply}_i y_0 \leq \sum_{j=1}^{L_i} y_{ij} \leq \text{Demand}_i y_0, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} \sum_{k=1}^K \delta_{ijk}^{(2)} y_{ij} - Q^{(2)} y_0 \leq 0, \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} c_{ij} y_{ij} = 1,$$

$$j = 1, \dots, L_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad , \quad j = 1, \dots, L_i, \\ i = 1, \dots, N$$

и решена с помощью метода искусственного базиса.

**Таблица 3. Оптимальная ППП при условии максимизации рентабельности
продукции предприятия**

Изделие	Количество, шт.	Прибыль, руб.
6-180603 АС 9	42 524	103 333,32
6 305 Р6	104 685	172 730, 25
8-20803 АК2	263	520, 74
6-202 А	29 590	34 620, 30
6201 ZZ	477 452	563 393, 36
6201 ZP 6	133 727	157 797, 86
6304	57 141	57 129, 32
104 А	81 523	114 132, 20
6 206 ZZP6	130 584	403 504, 56
8-80206 АС 17	147 786	514 295, 28
Итого	1 205 275	2 121 457, 19

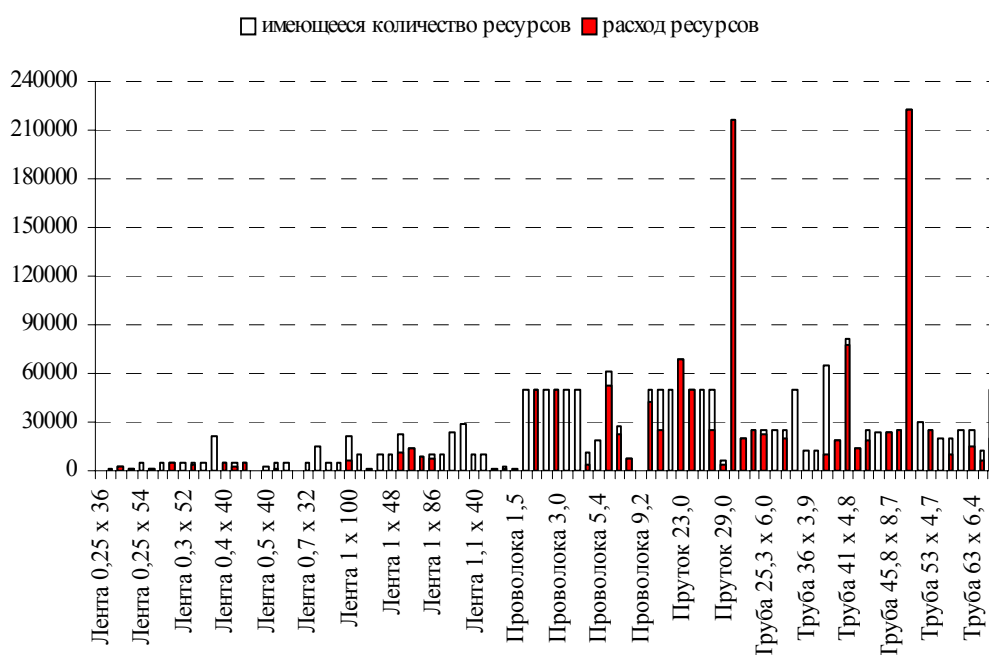


Рис. 2. Остатки ресурсов после выполнения ППП при условии максимизации рентабельности

В модели максимизации рентабельности продукции в качестве целевой функции была принята рентабельность продукции. Оптимальное решение задачи показало, что оптимальная производственная программа при заданных условиях должна состоять из изделий 10 видов (см. табл. 3). Объем производства равен 1 205 275 шт., это на 153 375 изделий меньше оптимального значения модели максимизации объема выпуска продукции.

Прибыль при этом решении составляет 2 121 457,19 руб., что на 697 556,73 руб. меньше оптимального значения модели максимизации прибыли. Себестоимость составляет 10,26 руб., а рентабельность продукции 17,14%. Остатки ресурсов после выполнения оптимальной ППП приведены на рис. 2.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

- определено, что оптимизация ППП должна осуществляться применительно к определенной номенклатуре выпуска изделий с учетом технологии изготовления каждого вида изделия;
- предложена однокритериальная линейная модель оптимизации показателей хозяйственной деятельности предприятия, в которой в качестве критерия оптимальности используется максимум объема производства; для нахождения оптимальных решений однокритериальных линейных моделей использован симплекс-метод; при этом для задач большой размерности (250 переменных и 136 условий) объем вычислений оказался сравнительно небольшой;
- построена однокритериальная модель максимизации рентабельности продукции предприятия, которая является задачей мелко-линейного программирования и была решена методом искусственного базиса.