Математические аспекты интеграционных методов управления

© 2009 Н.О. Михал нок
кандидат экономических наук, профессор
Самарский государственный университет путей сообщения
E-mail: ecsn@sciex.ru

В статье рассматривается понятие интеграции как объективного явления; прослеживается ее взаимосвязь не только с экономикой, но и с рынком образовательных услуг; характеризуются показатели интеграционного процесса как совокупность неотрицательно определенных непрерывных случайных величин с известными или планируемыми математическими ожиданиями.

Ключевые слова: интеграция, математические ожидания, случайная величина, рисковая стоимость.

Не случайно на рубеже XX - XXI вв. рост интеграционных процессов приобрел стремительный темп. Небывалый технологический прогресс, коренные изменения в связи с появлением рынка образовательных услуг, нарастание все новых и сложных противоречий социально-экономического развития образовательного уровня, нерешенность многих задач, оставшихся в наследие от прошлого, поставили мир перед решением комплекса проблем, касающихся выживания человечества и природы. Интеграционные процессы являются главным направлением формирования рынка образовательных услуг. Ряд стран давно уже прошли первоначальный путь экономической интеграции, хотя многие страны и регионы еще не подошли к нему. Эти процессы постепенно перерастают в суперинтеграцию, которая откроет немало нового и неожиданного как для национального, так и для интернационального развития образования - от простого объединения через компромисс к гармонизации интересов участников интеграции.

Однако, видимо, существуют объективные границы эффективности интеграции. Уже сейчас они вызывают большие и болезненные проблемы: какова дальнейшая судьба этнонациональных структур? насколько прочными будут гарантии региональной и национальной образовательной безопасности? что можно предложить взаймы национальному образованию? будет ли меняться менталитет регионов и населения? реальна ли перспектива превращения различных интеграционных моделей в единый мировой интеграционный конгломерат и куда “исчезнут” при этом национальные образовательные учреждения?

Интеграция - объективное явление, но человечество еще должно научиться использовать его в интересах общего и устойчиво безопасного образования и развития.

Наряду с эффективностью, интеграция - одна из сложнейших философских, политических, экономических, социальных и производственных категорий. Можно обнаружить не только ее взаимосвязь с экономикой, но и с новой категорией - структурой рынка образовательных услуг. Это новое теоретическое положение имеет особо важное значение для дальнейшего исследования на основе системного подхода к выработке практических рекомендаций с целью эффективного управления рынком образовательных услуг в условиях регулируемых рыночных отношений.

Как экономическая категория, интеграция отражает множественность свойств, форм, процессов, явлений, под которой следует в первую очередь понимать совокупность наиболее существенных форм, признаков, особенностей, отличающих одни объединения, процессы от других. Но интеграция - понятие относительное, так как для интегральной (обобщенной) ее характеристики важно изучение взаимосвязей и сравнение ее различных свойств между собой, а также со свойствами других видов объединений. Неотъемлемым свойством интеграции является ее способность удовлетворять определенные потребности и видоизменяться в соответствии с интересами и целями. Поэтому сущность интеграции заключается в эффективности функционирования.

При рассмотрении динамики интеграции крайне важно определить внешние причины и факторы преобразования и развития. Для оценки и всестороннего анализа интеграции как социальной экономико-образовательной категории целесообразно выделить три основных понятия:

1. Простая интеграция, которая характеризуется одним главным натуральным показателем или свойством, отражающим эффективность, при условном абстрагировании от всех остальных свойств или показателей.
2. Сложная интеграция, которая характеризуется всеми остальными показателями или свойствами при условном абстрагировании от всех стоимостных показателей (например, совокупность по некоторой норме обобщающих натуральных показателей).

3. Интегральная (комплексная, обобщающая и т.п.) интеграция, которая характеризуется не только натуральными показателями или свойствами, но и показателями затрат (себестоимости, стоимости); мерой интегральной интеграции является в конечном счете уровень экономической эффективности ее функционирования.

Поскольку интеграционный процесс характеризуется множеством показателей X_i (i=1,2,...n), значения которых можно оценивать в стоимостном выражении и на которые действует множество неизвестных взаимозависимых и зачастую взаимообусловленных случайных факторов, постольку естественно рассматривать эту совокупность показателей как совокупность n неотрицательно определенных непрерывных случайных величин с известными или планируемыми математическими ожиданиями $M(x_i) = m_i$, (i = 1,2,...n), с неизвестным в условиях неопределенности законом распределения (рис. 1).

Введем следующие допущения:

1) система непрерывных случайных величин характеризуется законом распределения в виде функции плотности вероятности $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ на множестве $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in [0, \infty)$;

2) функция плотности вероятности удовлетворяет условиям:

• неотрицательности $f(x_1, x_2, \ldots x_n) \geq 0$;

• нормировки

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty f(x_1, x_2, \ldots x_n) dx_1, dx_2 \ldots dx_n = 1; \qquad (1)$$

3) заданы (известны) математические ожидания каждой из случайных величин, входящих в систему

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty x_i f(x_1, x_2, \ldots x_n) dx_1, dx_2 \ldots dx_n = m_i \qquad (2)$$

для $i = 1,2,\ldots n$;

4) в условиях неустранимой неопределенности в качестве критерия определения вида закона распределения, как показывает многолетняя практика, целесообразно выбрать энтропию системы случайных величин

$$H(x_1, x_2, \ldots x_n) =$$

$$= -\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty f(x_1, x_2, \ldots x_n) Lnf(x_1, x_2, \ldots x_n) \to$$

$$\to \max f(x_1, x_2, \ldots x_n), \qquad (3)$$

т.е. определить "наихудший" вид закона распределения, который доставляет максимум энтропии (неопределенности знаний о системе случайных величин).

С учетом сделанных допущений задача определения "наихудшего" закона распределения сведена к вырожденной изопериметрической вариационной задаче[1], которая может быть решена классическим методом с помощью введения функции Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \ldots x_n) = H(x_1, x_2, \ldots x_n) +$$

$$+ \lambda_1 \left\{ \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty f(x_1, x_2, \ldots x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n - 1 \right\} + \qquad (4)$$

$$+ \sum_{i=2}^n \lambda i \left\{ \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty x_i f(x_1, x_2 \ldots x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n - m_i \right\}$$

и множителей Лагранжа $\lambda_i (i = 1,2,\ldots n)$.

Экстремальные уравнения в общем виде имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial f}{\partial x}} = 0 \qquad (5)$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial f} = -Lnf(x_1, x_2, \ldots x_n) - 1 + \lambda_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i x_i = 0, & (6) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty f(x_1, x_2, \ldots x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n - 1 = 0, & (7) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty x_1 f(x_1, x_2, \ldots x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n - m_1 = 0, & (8) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_n} = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty x_n f(x_1, x_2, \ldots x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n - m_n = 0. & (9) \end{cases}$$

Из первого экстремального уравнения следует, что

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) =$$

$$= \exp \left\{ -1 + \lambda_1 + \sum_{i=1}^n x_i \right\} =$$

$$= A \prod_{i=1}^n \exp\{-c_i x_i\} = A \prod_{i=1}^n f_i(x_i), \qquad (10)$$

где $A = \exp(-1 + \lambda_1)$, $f_i(x_i) = \exp(-c_i x_i)$.

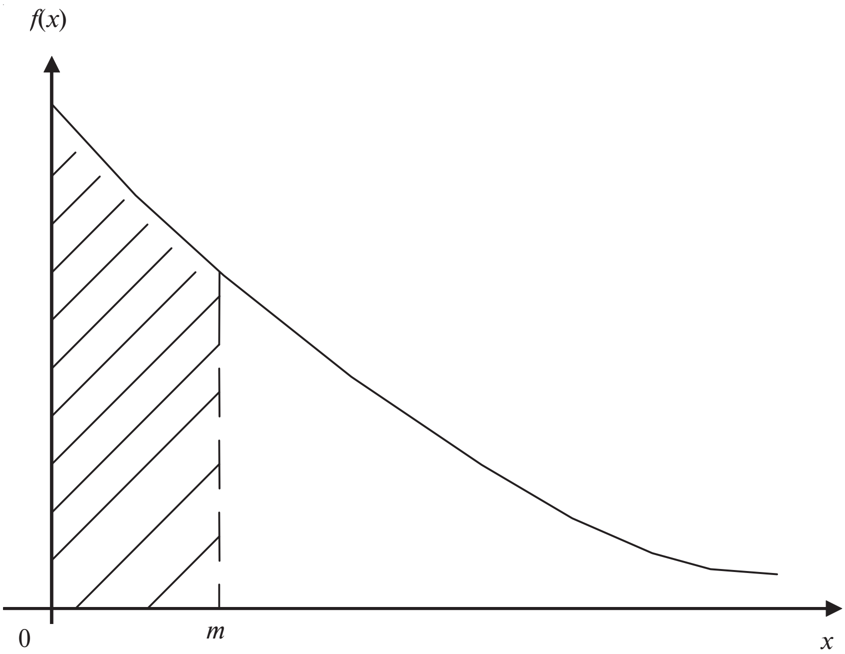

Рис. 1. **Функция плотности вероятности случайной величины, распределенной по показательному закону**

Отсюда следует, что в случае “неустранимой” неопределенности:

• совокупность случайных величин является системой независимых и, следовательно, некоррелированных случайных величин;

• “наихудшим” законом распределения является показательный закон распределения.

Разрешая оставшиеся n экстремальных уравнений, после преобразований получим

$$f_i(x_i) = \begin{cases} a_i e^{-a_i x_i}, x_i \ge 0, \\ 0, x_i < 0, \end{cases} \qquad (11)$$

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} a_i e^{-a_i x_i}, x_i \ge 0, (i = 1,2,\ldots n), \\ 0, x_i < 0, (i = 1,2,\ldots n), \end{cases} \qquad (12)$$

где $a_i = \dfrac{1}{m_i}, (i = 1,2,\ldots n)$.

В качестве простой рисковой стоимости (simple risking cost) интеграции представляется целесообразным принять разницу между мерой рассеивания (среднеквадратическим отклонением) и пренебрежимой рисковой стоимостью[2] (как правило, пороговое значение принимают на уровне 5 - 7%, т.е. p = 0,05-0,07):

$$RC = \sigma - \varepsilon. \qquad (13)$$

Учитывая, что

$$\sigma(x) = sqrt\left\{\int_0^{\infty} (x-m)^2 f(x)dx\right\} = m, \qquad (14)$$

$$nrc = arg\left\{\int_0^{nrc} f(x)dx - 0{,}05 = 0\right\} = 0{,}051293m, \qquad (15)$$

получим

$$RC = m - nrc = 0{,}948707m. \qquad (16)$$

Доход от интеграции можно представить в виде суммы

$$Z = S_1 + S_2, \qquad (17)$$

$$M(S_1) = m_1, \quad M(S_2) = m_2, \qquad (18)$$

где $M(S_1)$, $M(S_2)$ - математические ожидания случайно-постоянной S_1 (субсидии, трансферты, бюджетные выделения и т.п.) и случайно-переменной S_2;

M - знак математического ожидания.

Причем соответствие данных частей зависит от жизненного цикла интеграции. На первом этапе жизненного цикла очевидно преобладание S_1 за счет неполного использования мощности и загрузки инфраструктуры и низкой оценки стоимости человеческого капитала (ресурсного, функционально-организационного, интеллектуального, инновационного). На следующих этапах жизненного цикла удельный вес этой части уменьшается.

Поскольку статистика определения данных составляющих крайне “бедна” хотя бы из-за уникальности каждой интеграции, постольку определить закон распределения этих составляющих на основании статистики не представляется возможным.

Как показал предыдущий анализ, “наихудшим” законом распределения по энтропийному критерию является функция плотности вероятности вида

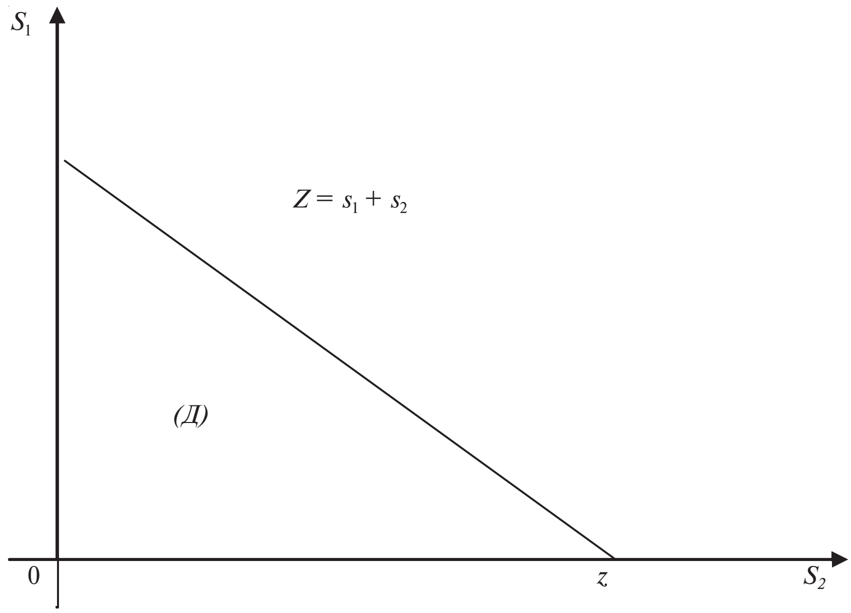

Рис. 2. **Область определения функции плотности вероятности дохода**

$$f(s_1,s_2) = \begin{cases} a\dfrac{1}{m_1 m_2}\exp(-\dfrac{s_1}{m_1})\exp(-\dfrac{s_2}{m_2}) \\ 0 \end{cases} \quad (19)$$

для $\{s_1, s_2 \in [0,\infty)\}$, для $\{s_1, s_2 \in (-\infty,0)\}$.

Таким образом, доход от интеграции представляет собой сумму независимых случайных величин, каждая из которых распределена по показательному закону распределения.

$$M(Z)=m_1+m_2\,. \quad (20)$$

Функция плотности вероятности случайной величины Z можно определить как

$$F(z) = \iint\limits_{(Д)} f(s_1,s_2)ds_1 ds_2, \quad (21)$$

где (*Д*) - область определения функции *F*(*z*) (см. рис. 2).

Таким образом, получим

$$f(z) = \frac{dF(z)}{dz} = \int_0^z \frac{1}{m_1 m_2}\exp\left\{-\frac{s_1}{m_1} - \frac{(z-s_1)}{m_2}\right\}ds_1. \quad (22)$$

После взятия интеграла окончательно получим

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{m_2 - m_1}\left\{\exp(-\dfrac{z}{m_2}) - \exp(-\dfrac{z}{m_1})\right\} \\ 0 \end{cases} \quad (23)$$

для $z \in [0,\infty)$, для $z \in (-\infty,0)$.

График функции плотности вероятности дохода кривой представлен на рис. 3. Наиболее целесообразно в качестве оценки дохода выбрать не сумму математических ожиданий, составляющих доход $M = m_1 + m_2$, а наиболее вероятное значение дохода, т.е. моду M_0, определяемую из выражения $\arg_z\left\{\dfrac{df(z)}{dz} = 0\right\}$, из которого после некоторых преобразований получим

$$M_0 = \frac{\ln\dfrac{m_2}{m_1}}{\dfrac{1}{m_1} - \dfrac{1}{m_2}}. \quad (24)$$

С учетом последнего выражения имеем

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{1}{m_2 - m_1}\left\{-\frac{1}{m_2}\exp(-\frac{z}{m_2}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{m_1}\exp(-\frac{z}{m_1})\right\} = 0.$$

Из последнего равенства получим, что мода M_0 распределения равна

$$M_0 = \frac{\ln\dfrac{m_2}{m_1}}{\dfrac{1}{m_1} - \dfrac{1}{m_2}}.$$

Несколько преобразуя (24), получим

$$\frac{M_0}{m_2} = \frac{r\ln r}{r-1}, \quad (25)$$

где $r = \dfrac{m_1}{m_2}$.

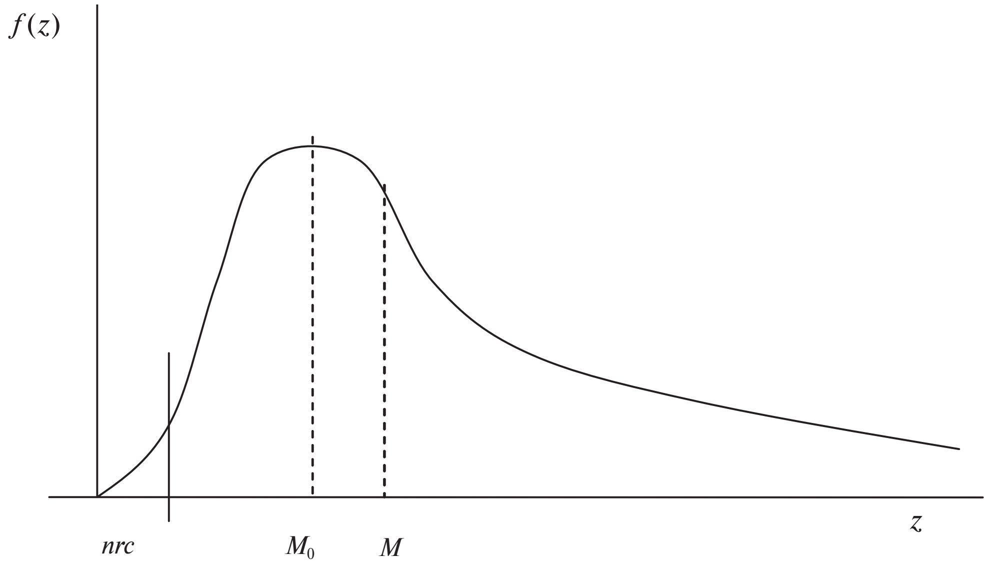

Рис. 3. **Функция плотности вероятности дохода интеграции**

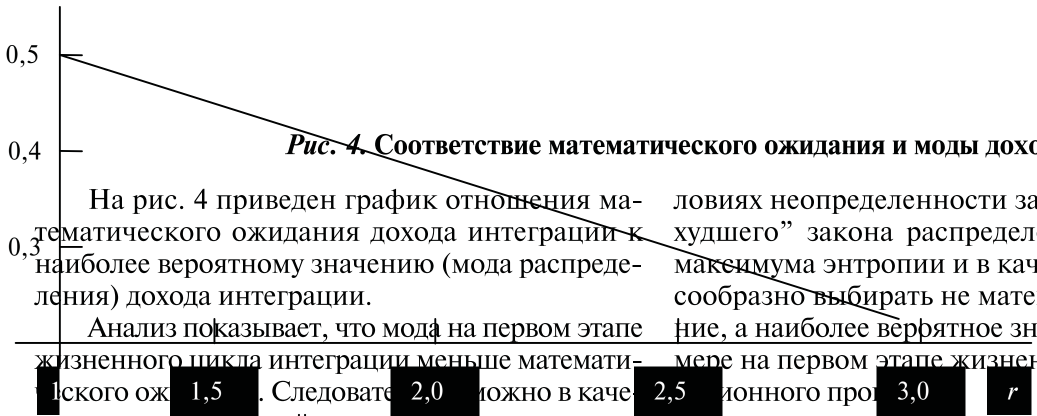

Рис. 4. **Соответствие математического ожидания и моды дохода**

На рис. 4 приведен график отношения математического ожидания дохода интеграции к наиболее вероятному значению (мода распределения) дохода интеграции.

Анализ показывает, что мода на первом этапе жизненного цикла интеграции меньше математического ож[illegible]. Следовате[illegible]можно в качестве просто[illegible]овой стоим[illegible]хода принять

$$src = \delta_0 - nrc(p = \alpha) . \qquad (26)$$

Таким образом, предложена модель оценки рисковой стоимости процесса интеграции в условиях неопределенности за счет выбора "наихудшего" закона распределения по критерию максимума энтропии и в качестве оценки целесообразно выбирать не математическое ожидание, а наиболее вероятное значение, по крайней мере на первом этапе жизненного цикла, интег[illegible]ионного про[illegible]

[1] *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М., 1964.

[2] Рынок ценных бумаг: учебник / под ред. В.А. Галанова, А.И. Басова. М., 1996.

Поступила в редакцию 06.01.2010 г.