Моделирование активных стратегий управления краткосрочным портфелем ценных бумаг

© 2009 В.В. Казарян
Всероссийский НИИ проблем вычислительной техники и информатизации
E-mail: ross@pvti.ru

Предложен подход к сведению задачи выбора оптимальных активных стратегий управления портфелем ценных бумаг к задаче булева программирования.

Ключевые слова: портфель ценных бумаг, булево программирование, финансовый рынок, спекулятивные операции, фондовый рынок, менеджер-аналитик, государственные ценные бумаги.

К настоящему времени стало ясно, что наступил масштабный кризис представлений о фондовом рынке. Рынок потерял привычное обличье, картина мира обновилась, новая непредсказуемость рынка вызвала потребность в ревизии ранее построенных моделей. Все это вызывает большие трудности оценки и прогнозирования значений рыночных показателей и усложняет применение долгосрочных инвестиционных стратегий, вследствие чего наиболее популярна сейчас активная стратегия управления портфелем, которая сводится к частому пересмотру портфеля в поисках финансовых инструментов, неверно оцененных рынком, и торговле ими с целью получить более высокую доходность.

Анализ существующих подходов позволяет утверждать, что в настоящее время отсутствуют эффективные методы определения активных стратегий решения задачи управления портфелем ценных бумаг. В этих условиях менеджер, управляющий портфелем, имеет широкий спектр разнообразных вариантов осуществления сделки, и ему приходится принимать решение о ее целесообразности таким образом, чтобы с учетом рисков обеспечить требуемую доходность портфеля на заданном временном интервале.

Таким образом, объективная реальность развития финансового рынка свидетельствует о том, что на данном этапе требуются новые подходы к формированию портфеля ценных бумаг, новые способы оценки рыночного риска в условиях невозможности долгосрочного и среднесрочного прогнозирования тенденций фондового рынка.

Содержательная постановка задачи. На содержательном уровне сформулирована постановка задачи управления портфелем ценных бумаг на плановом интервале $[t_1, t_2]$, которая основана на следующем сценарии. Рассмотрим плановый интервал $[t_1, t_2]$. Предположим, что имеется юридическое лицо (будем называть менеджером), которое работает на фондовом рынке с ценными бумагами. Кроме того, имеются инвесторы, которые заключают с менеджером договоры по передаче ему денежных средств на определенных условиях. Условия передачи денежных средств могут быть самыми разными. В частности, инвестор может дать менеджеру какую-то сумму денег на определенный срок с условием возврата их в конце срока под заданные проценты или с условием, что менеджер должен возвратить сумму с процентами частями в оговоренные заранее сроки и т.п. Кроме того, предполагается, что у менеджера имеется единственный вид деятельности, помимо заключения договоров с инвесторами, а именно спекулятивные операции по купле-продаже ценных бумаг на фондовом рынке.

В текущий момент времени t менеджер имеет определенное количество заключенных договоров с инвесторами, которое, в частности, может быть равно 0. Предположим, что на плановый период $[t_1, t_2]$ ему предлагается заключить еще один новый договор. В узком смысле, задача, которую мы хотим решить, состоит в том, чтобы ответить на вопрос: выгоден ли менеджеру новый договор? В более широком смысле, рассматриваемая нами задача состоит в том, чтобы составить оптимальный по прибыли план купли и продажи ценных бумаг на период $[t_1, t_2]$. При этом период может рассматриваться как скользящий.

При решении названных задач мы будем использовать принцип гарантированного результата, суть которого в том, чтобы с учетом случайных колебаний объемов продаж и цен получить максимально возможный приток капитала.

Формальная постановка задачи. Для удобства изложения мы начнем наше рассмотрение с самого простого вида ценных бумаг, а именно с государственных ценных бумаг (ГЦБ). Удобство ГЦБ состоит в том, что для них не предусмотрены дивиденды и нет налогов на покупку и продажу. Предположим, кроме того, что отсутствуют ограничения на объемы покупок и продаж ГЦБ. При этих условиях единственным источником неопределенности является цена ГЦБ в моменты покупки и продажи, т.е. в моменты, принадлежащие плановому периоду $[t_1, t_2]$. Отметим вместе с тем, что рассматриваемая далее модель относится как к ГЦБ, так и к другим ценным бумагам (ЦБ).

Введем следующие обозначения: N - количество видов ЦБ, обращающихся на первичном и вторичном фондовом рынке; i - номер ЦБ; $i = 1, ..., N$. $Сн_i(t)$ - прогноз нижней, а $Св_i(t)$ - прогноз верхней границы цены ЦБ, номер i на момент t. Очевидно, что $Сн_i(t) \le Св_i(t)$ для всех i и t. $M(t)$ - количество свободных денежных средств на расчетном счете у менеджера на момент t; $S_i(t)$ - количество ЦБ вида i, которым располагает менеджер в момент t; $x_i(t)$ - количество ЦБ вида i, которое менеджер предполагает приобрести в момент t; $y_i(t)$ - количество ЦБ вида i, которое менеджер предполагает продать в момент t.

Минимальный капитал, которым будет располагать менеджер на момент t_2 и который следует максимизировать, составит:

$$K(t) = M(t_1) + \sum_{i=1}^{N} C_{H_i}(t_1) \cdot S_i(t_1) +$$

$$+ \sum_{t=t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{N} y_i(t) \cdot C_{H_i}(t) - \sum_{i=1}^{N} X_i(t) \cdot C_{B_i}(t) \right) \to \max . \qquad (1)$$

Должны соблюдаться балансовые ограничения, а именно: в каждый момент времени должен соблюдаться баланс денежных средств (этот баланс не должен быть отрицательным):

$$K(t) > 0 \text{ для всех } t \le t_2. \qquad (2)$$

Кроме того, должен соблюдаться баланс каждой ценной бумаги:

$$S_i(t_1) - \sum_{t=t_1}^{t} y_i(t) + \sum_{t=t_1}^{t} x_i(t) \ge 0 \qquad (3)$$

для всех $t_1 \le t \le t_2$ и всех i.

В совокупности система уравнений (1) - (3) представляет собой условно-экстремальную задачу. Ее решением являются графики оптимальных покупок и продаж ценных бумаг, иными словами, набор функций: $x_i(t)$ и $y_i(t)$, $i = 1, ..., N$, определенных на интервале $[t_1, t_2]$.

Условия (1) и (2) эквивалентны условиям (4) и (5), соответственно:

$$\sum_{t=t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{N} y_i(t) \cdot C_{B_i}(t) - \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \cdot C_{H_i}(t) \right) \to \max . \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \text{Если} \sum_{t=t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{N} y_i(t) \cdot C_{B_i}(t) - \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \cdot C_{H_i}(t) \right) < 0, \\ \text{то} \left| \sum_{t=t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{N} y_i(t) \cdot C_{B_i}(t) - \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \cdot C_{H_i}(t) \right) \right| \le V, \end{cases} \qquad (5)$$

где $V = M(t_1) + \sum_{i=1}^{N} C_{H_i}(t_1) \cdot S_i(t_1)$.

В формулировке (3) - (5) рассматриваемая задача трудноразрешима. Рассмотрим способ приближенного представления этой задачи в виде задачи булевого программирования.

Предположим, что в непрерывном интервале $[t_1, t_2]$ выделено конечное множество точек t_e, $e = 1,...,E$. В частности, e может обозначать номер дня по порядку от начала планового периода $[t_1, t_2]$. В каждый момент времени t_e объемы покупок и продаж любой ценной бумаги могут быть различными. Определим для каждой ЦБ номер i и каждого момента времени t_e некоторые возможные объемы покупок и продаж, т.е. установим значения величин:

$$x_{i,e}^{r}, i = \overline{1,N}, r = \overline{1,R}, e = \overline{1,E}$$

$$\text{и } y_{i,e}^{r}, i = \overline{1,N}, r = \overline{1,R}, e = \overline{1,E} . \qquad (6)$$

Надо отметить, что определение значений величин $x_{i,e}^{r}$ и $y_{i,e}^{r}$ не является технически сложной задачей. В частности, можно установить минимальное значение покупок и продаж, а также чувствительный размер приращения этой величины Ä$_i$ для каждой ГЦП, номер i и положить:

$$x_{i,e}^{r} = y_{i,e}^{r} = x_{i,e}^{1} + \Delta_i r, i = \overline{1,N}, r = \overline{1,R}, e = \overline{1,E} .$$

Как показывает опыт, обычно $R \le 7$.

Введем в рассмотрение булевы переменные:

$$\alpha_{i,e}^{r}, \beta_{i,e}^{r}, \forall r, \forall i, \forall e . \qquad (7)$$

С учетом введенных переменных и обозначений систему неравенств (3) можно приближенно представить в виде совокупности систем неравенств (8) и (9):

$$S_i(t_1) - \sum_{e=1}^{k} \sum_{r=1}^{R} y_{i,e}^{r} \cdot \alpha_{i,e}^{r} + \sum_{e=1}^{k} \sum_{r=1}^{R} x_{i,e}^{r} \, \beta_{i,e}^{r} \ge 0,$$

$$k = \overline{2,E}, i = \overline{1,N} , \qquad (8)$$

$$\sum_{r=1}^{R} \alpha_{i,e}^{r} \le 1, e = \overline{1,E}, i = \overline{1,N} ;$$

$$\sum_{r=1}^{R} \beta_{i,e}^{r} \le 1, e = \overline{1,E}, i = \overline{1,N}\,. \qquad (9)$$

Условие (4) приближенно представляется совокупностью систем неравенств (9) и (10):

$$\sum_{e=1}^{E} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{r=1}^{R} y_{i,e}^{r} \cdot \alpha_{i,e}^{r} \cdot C_{H_i}(t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{N} \sum_{r=1}^{R} x_{i,e}^{r} \cdot \beta_{i,e}^{r}\; C_{B_i}(t) \right) \to \max\,, \qquad (10)$$

а система неравенств (5) в виде совокупности систем неравенств (9) и (11):

$$M(t_i) + \sum_{e=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{r=1}^{R} y_{i,e}^{r} \cdot \alpha_{i,e}^{r} \cdot C_{H_i}(t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{N} \sum_{r=1}^{R} x_{i,e}^{r} \cdot \beta_{i,e}^{r}\; C_{B_i}(t) \right) \ge 0, k = \overline{2,E}\,. \quad (11)$$

В задаче (6) - (11) в уравнениях присутствуют разности, или, что то же самое, отрицательные величины, что делает ее неразрешимой. Вместе с тем при любых заранее заданных $\alpha_{i,e}^{r}, \forall r, \forall i, \forall e$ задача (6) - (11) превращается в задачу булевого программирования в канонической форме относительно переменных $\beta_{i,e}^{r}, \forall r, \forall i, \forall e$, а при любых заранее заданных $\beta_{i,e}^{r}, \forall r, \forall i, \forall e$ задача (6) - (11) является задачей булевого программирования в канонической форме относительно переменных $\alpha_{i,e}^{r}, \forall r, \forall i, \forall e$. Содержательный смысл этих задач состоит в том, что если менеджер составит любой план покупок, то, решив задачу, можно получить оптимальный план продаж и, наоборот, для любого плана продаж можно составить оптимальный план покупок. С помощью итерационного решения задач, а также с применением скольжения временного интервала можно исследовать сценарии на различные плановые периоды.

Преобразование исходной формулировки задачи (1) - (3) в задачу булевого программирования (6) - (11) приводит, как уже отмечалось, к некоторой потере точности. Это связано с тем, что непрерывные функции $x_i(t)$ и $x_i(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, $i = 1,...,N$ заменены наборами дискретных значений $x_{i,e}^{r}, i = \overline{1,N}, r = \overline{1,R}, e = \overline{1,E}$ и $y_{i,e}^{r}, i = \overline{1,N}, r = \overline{1,R}, e = \overline{1,E}$. Чем большую точность мы хотим получить, тем на большее количество точек следует разбивать плановый период и интервалы возможных значений объемов покупок и продаж ценных бумаг. Это означает увеличение размерности задачи с увеличением ее точности. Вместе с тем при решении булевых задач объем вычислений существенно зависит от размерности задачи, а также от ее структуры.

В данной связи возникает вопрос и вычислительной реализуемости задачи. Размерность задачи (6) - (11) определяется следующими параметрами:

- во-первых, количеством значений переменных $x_{i,e}^{r}$ или $y_{i,e}^{r}$, которое равно произведению $N \cdot R \cdot E$;
- во-вторых, количеством ресурсных ограничений, которое равно количеству уравнений (8) и (11), т.е. величине: $(E\ 1) \cdot N + E - 1 = (E\ 1) \cdot (N + 1)$;
- в-третьих, количеством логических условий (9), равным N;
- в-четвертых, количеством элементов, входящих в уравнение типа (9), оно равно N.
- в-пятых, типом логических условий, т.е. условий (9).

Несильно ограничивая практические возможности применения модели, можно сказать, что количество периодов, обычно измеряемых в днях, составляет, как правило, не более 3, но часто равно 1 дню. Так что $E \le 3$. Количество вариантов возможных значений покупки или продажи ценной бумаги, рассматривать которые имеет реальный смысл, также не более 3. Например, речь может идти о приобретении пакета ЦБ в 1000, либо в 5000, либо в 15000. Нет необходимости рассматривать варианты в 1000, 1001, 1002, ..., 15000. Следовательно $R \le 3$. Количество ценных бумаг, с которыми оперативно работает менеджер также невелико - от 7 до 10, иными словами, $R \le 10$.

Количество значений переменных $N \cdot R \cdot E \le 3 \cdot 3 \cdot 10 = 90$. Эта величина вполне приемлема. Что касается других условий, то они тем более не являются существенными.

Формулировка (6) - (11) позволяет снять все упрощающие предположения, которые были приняты при получении формулировки (1) - (3). В частности, не изменяя структуры модели, можно учесть налоги на покупку и продажу ценных бумаг, необходимость выплаты дивидендов, а также ограничения на объемы покупок и продаж. Все эти условия могут быть учтены при установлении значений величин $x_{i,e}^{r}$ и $y_{i,e}^{r}$, входящих в соотношения (6) - (9). Это означает, что рассмотренная постановка распространяется на случай не только ГЦБ, но и ЦБ других видов.

Представление задачи в виде модели булевого программирования открывает возможность и для других ее обобщений. В частности, формулировка, которая нами проанализирована, является пессимистической в том смысле, что в ней предполагается: покупки будут сделаны по высоким ценам *Св*, а продажи - по низким ценам *Сн*. Вместо этого допущения можно рассматривать наиболее вероятные цены, учитывая при необходимости соответствующие доверительные интервалы. Расчет наиболее вероятных значений может быть сделан с помощью вспомогательных сервисных программ или средствами Excel.

Таким же образом могут быть учтены различные варианты поступления и выплат средств. Нет никакой необходимости предполагать, что менеджер получает от инвестора средства в момент t_1 и возвращает их с процентами в момент t_2. Возможен любой договорный режим получения и выплаты средств.

Целью деятельности менеджера не всегда может быть максимум прибыли, а это может быть, например, максимальное увеличение свободных денежных средств к определенному моменту времени, либо получение периодического дохода на как можно большем интервале времени, либо получение нескольких фиксированных выплат в заранее определенные моменты времени и т.п. Модель может быть модифицирована для учета данных целей.

Модель (6) - (11) распадется на две взаимодополнительные, а именно на модель оптимизации плана продаж при заданном плане покупок и модель оптимизации плана покупок при заданном плане продаж. Рассмотрим эти модели в единичном интервале времени. Вначале обратимся к модели оптимизации плана продаж в единичном временном интервале при заданном плане покупок.

То, что план покупок задан, означает, что переменным $\beta^r_{i,e}$ приданы определенные значения. Единичность интервала, в свою очередь, означат, что $e = k = 1$. В этом случае соотношения (8) - (11) приобретают вид (12) - (15), соответственно:

$$\sum_{r=1}^{R} y_i^r \cdot \alpha_i^r \le C_i, i = \overline{1, N} \ , \qquad (12)$$

где $C_i = \sum\limits_{r=1}^{R} x_i^r \cdot \beta_i^r + S_i(t_1), i = \overline{1, N}$,

$$\sum_{r=1}^{R} \alpha_i^r \le 1, i = \overline{1, N} \ , \qquad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{R} y_i^r \cdot \alpha_i^r \cdot C_{H_i}(t) \to \max \ , \qquad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{R} y_i^r \cdot \alpha_i^r \cdot C_{H_i}(t) \ge S \ , \qquad (15)$$

где $S = \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{r=1}^{R} x_i^r \cdot \beta_i^r \cdot C_{B_i}(t) - M(t_1)$.

Условия (15) отличаются от канонической формулировки направлением знака неравенства. Условия (12) и условия (15) в совокупности определяют допустимый интервал возможных значений для целевого показателя (14).

В отсутствие условия (15) решение задачи (12) - (15) может быть получено путем выбора максимально возможных, т.е. удовлетворяющих условиям (12) объемов продаж. Наличие условия (15) делает необходимым исследовать все возможные варианты продаж, включая варианты с частичной продажей. Для выполнения такого исследования следует ввести в рассмотрение условный ограниченный ресурс - общее количество продаваемых ЦБ, которое формально должно быть ограничено. Таким образом, мы вводим дополнительное условие:

$$\sum_{r=1}^{R}\sum_{i=1}^{N} y_i^r \cdot \alpha_i^r \le \overline{C} \ . \qquad (16)$$

При этом $\overline{C}$ должно быть больше или равно сумме имеющихся в наличии ЦБ и планируемых покупок.

Обратимся теперь к задаче оптимизации плана покупок в единичном временном интервале при заданном плане продаж. То, что план продаж задан, означает, что переменным $\alpha^r_{i,e}$ приданы определенные значения. Единичность интервала, как уже отмечалось, означат $e = k = 1$. В этом случае соотношения (8) - (11) приобретают вид (17) - (20), соответственно:

$$\sum_{r=1}^{R} x_i^r \cdot \beta_i^r \ge V_i, i = \overline{1, N} \ , \qquad (17)$$

где $V_i = \sum\limits_{r=1}^{R} y_i^r \cdot \alpha_i^r - S_i(t_1), i = \overline{1, N}$,

$$\sum_{r=1}^{R} \beta_i^r \le 1, i = \overline{1, N}, \qquad (18)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{r=1}^{R} x_i^r \cdot \beta_i^r \cdot C_{B_i}(t) \to \min, \qquad (19)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{r=1}^{R} x_i^r \cdot \beta_i^r \cdot C_{B_i}(t) \le W, \qquad (20)$$

$$W = \sum_{i=1}^{N} \sum_{r=1}^{R} y_i^r \cdot \alpha_i^r \cdot C_{H_i}(t) + M(t_1).$$

Условия (17) отличаются иной, нежели принято в канонической формулировке, направленностью знака неравенства. Условия (17) и условия (20) в совокупности определяют допустимый интервал возможных значений для целевого показателя (19).

В отсутствие условия (20) решение задачи (17) - (20) может быть получено путем выбора минимально возможных, т.е., удовлетворяющих условиям (17) объемов покупок. Наличие условия (20) делает необходимым исследовать все возможные варианты покупок, включая варианты с большими, чем минимальные, покупками. Для выполнения такого исследования необходимо ввести в рассмотрение условный ограниченный ресурс - общее количество покупаемых ЦБ, которое формально должно быть ограничено. Таким образом, мы вводим дополнительное условие:

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{N} x_i^r \cdot \beta_i^r \ge \overline{V}. \qquad (21)$$

При этом $\overline{V}$ выражает количество ЦБ, которое необходимо непременно закупить.

Вывод. Представление задачи в виде булевого программирования открывает возможности и для других обобщений модели. В частности, формулировка, которая нами проанализирована, является пессимистической в том смысле, что в ней предполагается - покупки будут сделаны по высоким ценам *Св*, а продажи по низким ценам *Сн*. Вместо этого допущения можно рассматривать наиболее вероятные цены, учитывая при необходимости соответствующие доверительные интервалы. Расчет наиболее вероятных значений может быть сделан с помощью вспомогательных сервисных программ или средствами Excel. Таким же образом могут быть учтены различные варианты поступления и выплат средств. Нет никакой необходимости предполагать, что менеджер получает от инвестора средства в момент t_1 и возвращает их с процентами в момент t_2. Возможен любой договорный режим получения и выплаты средств.

Поступила в редакцию 08.11.2009 г.