

Выбор инвестиционного проекта из нескольких взаимоисключающих альтернатив

© 2009 О.В. Павлов

Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева

Выбор инвестиционного проекта из нескольких взаимоисключающих альтернатив рассматривается как задача оптимального управления дискретной системой. С использованием дискретного принципа максимума Понтрягина найдена структура оптимального управления. На основе полученного решения предложен численный алгоритм выбора инвестиционного проекта. Сформулированы условия для выбора наилучшего проекта.

Ключевые слова: выбор инвестиционного проекта, взаимоисключающие альтернативы, дискретный принцип максимума Понтрягина, условия выбора инвестиционного проекта.

1. Постановка задачи выбора инвестиционного проекта из нескольких взаимоисключающих альтернатив

Рассматривается задача выбора наилучшего по критерию максимального приведенного дохода инвестиционного проекта из m взаимоисключающих альтернатив, имеющих разный горизонт планирования n_i . Для решения задачи выбора инвестиционного проекта применяется теория оптимального управления дискретными процессами¹.

Инвестирование всех проектов начинается в период $t = 0$. Для решения задачи достаточно найти оптимальное управление инвестициями в начальный период $t=0$, так как имеется возможность осуществления только одного проекта. Динамика изменения основных средств FA_{it} i -го проекта описывается системой дискретных уравнений:

$$FA_{it+1} = \begin{cases} FA_{it}(1 - k_{it}) + \frac{\alpha_{it} INV_{it}}{1 + \phi_{it}}, & \text{если } t = 0, n_i \quad i = 1, m, \\ 0, & \text{если } t > n_i \end{cases} \quad (1)$$

где α_{it} - процент от финансового ресурса предприятия INV_{it} , необходимый для капиталовложения в i -й проект.

Если весь финансовый ресурс INV_{it} инвестируется в i -й проект в период t , то $\alpha_{it} = 1$, если не инвестируется, то $\alpha_{it} = 0$.

Заданы начальные условия для каждого инвестиционного проекта:

$$FA_{i0} = 0, \quad i = 1, m. \quad (2)$$

Максимальный горизонт планирования определится:

$$n = \max(n_1, \dots, n_i, \dots, n_m),$$

¹ См.: Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М., 1973; Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике. М., 2003.

где n_i - горизонт планирования i -го проекта, измеряемый количеством периодов.

На управление инвестициями i -го проекта наложено ограничение:

$$0 \leq \alpha_{it} \leq 1, \quad t = 0, n_i. \quad (3)$$

Так как проекты взаимоисключающие, должно выполняться еще одно ограничение:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{it} \leq 1, \quad t = 0, n. \quad (4)$$

Выражение для чистого приведенного дохода предприятия в результате принятия одного из проектов определится:

$$NPV = \sum_{t=0}^n \sum_{i=1}^m \frac{FCF_{it}}{(1 + r_i)^t}, \quad (5)$$

где FCF_{it} - свободный денежный поток i -го инвестиционного проекта (*Free Cash Flow*) в периоде t ; r_i - ставка дисконтирования для i -го проекта, учитывающая различную степень риска инвестиций.

Предполагается, что все инвестиционные проекты осуществляются за счет финансовых ресурсов предприятия. Экономическая эффективность проектов оценивается в целом, и схема финансирования не учитывается. Рассматриваются денежные потоки от операционной (производственной) и инвестиционной деятельности². Количество производимой продукции предприятием равно прогнозируемому объему продаж. Рассматриваются рынки сбыта, на которых

² См.: Брейли Р., Майерс С. Принципы корпоративных финансов. М., 1997; Бирман Г., Шмидт С. Капиталовложения: Экономический анализ инвестиционных проектов. М., 2003; Бригхем Ю., Гасперски Л. Финансовый менеджмент: Полный курс: В 2 т. СПб., 1998; Хелферт Э. Техника финансового анализа. СПб., 2003; Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов: Теория и практика: Учеб. пособие. М., 2004.

объемы продаж не уменьшаются. Считается, что денежный поток, генерируемый инвестиционным проектом, имеет место в конце периода, т.е. является постнумерандо.

Свободный денежный поток i -го инвестиционного проекта FCF_{it} в конце периода t определяется как разница денежных потоков от операционной деятельности (*Operating Cash Flow*) OCF_{it} и инвестиционной (*Investment Cash Flow*) ICF_{it} :

$$FCF_{it} = OCF_{it} - ICF_{it}, \quad t = 0, n_i. \quad (6)$$

Денежный поток от операционной деятельности рассчитывается (здесь и далее предполагается $t=0, n_i; i=1, m$):

$$OCF_{it} = REV_{it} - NOC_{it} - PT_{it}, \quad (7)$$

где REV_{it} - выручка (*Revenue*) от реализации произведенной продукции;

NOC_{it} - чистые операционные издержки (*Net Operating Costs*);

PT_{it} - налог на прибыль (*Profit Tax*).

Выручка i -го проекта определяется:

$$REV_{it} = P_{it}Q_{it}, \quad (8)$$

где P_{it} - цена продукции;

Q_{it} - прогноз объема продаж продукции.

Чистые операционные издержки включают: материальные затраты (*Material Costs*) MC_{it} , заработную плату (*Wages and Salary*) WS_{it} , начисления на заработную плату (*Wages Charges*) WC_{it} :

$$NOC_{it} = MC_{it} + WS_{it} + WC_{it}. \quad (9)$$

Материальные затраты i -го инвестиционного проекта рассчитываются:

$$MC_{it} = Cm_{it}Q_{it}, \quad (10)$$

где Cm_{it} - материальные затраты на единицу продукции.

Фонд заработной платы определяется:

$$WS_{it} = w_{it}L_{it}, \quad (11)$$

где w_{it} - средняя ставка заработной платы персонала;

L_{it} - численность производственного персонала.

Численность персонала рассчитывается по формуле

$$L_{it} = \frac{Q_{it}}{I_{it}}, \quad (12)$$

где I_{it} - норматив выпуска продукции средним работником за период t .

Начисления на заработную плату определяются:

$$WC_{it} = \tau_w WS_{it}, \quad (13)$$

где δ_w - ставка единого социального налога.

Подставим (12) в (11), а (10), (11), (13) в (9), получим формулу для чистых операционных издержек в следующем виде:

$$NOC_{it} = Q_{it}C_{it}, \quad (14)$$

где C_{it} - себестоимость продукции (затраты на единицу продукции), рассчитывается по формуле

$$C_{it} = Cm_{it} + (1 + \tau_w) \frac{w_{it}}{I_{it}}. \quad (15)$$

Налог на прибыль вычисляется:

$$PT_{it} = \tau_c (REV_{it} - NOC_{it} - DEP_{it}), \quad (16)$$

где δ_c - ставка налога на прибыль;

DEP_{it} - амортизационные начисления (*Depreciation*).

Для расчета износа основных средств (внеоборотных активов) предприятия (*Fixed Assets*) FA_i используется метод равномерного начисления амортизации:

$$DEP_{it} = \mu FA_{it}, \quad (17)$$

где μ - норма амортизации;

FA_{it} - стоимость основных средств предприятия в начале периода t до новых капиталовложений.

Процесс производственной деятельности i -го проекта описывается производственной функцией Леонтьева

$$P_{it}Q_{it} = f_i FA_{it}, \quad (18)$$

где $P_{it}Q_{it}$ - стоимость прогнозируемого объема продаж продукции (выручка) i -го проекта;

f_i - фондоотдача основных средств, характеризующая производственный процесс i -го проекта.

Подставим формулы (8) - (14) и (16) - (18) в выражение для денежного потока от операционной деятельности (7) i -го инвестиционного проекта:

$$OCF_{it} = \left[(1 - \tau_c) f_i \frac{P_{it} - C_{it}}{P_{it}} + \tau_c \mu \right] FA_{it}.$$

Выражение в скобках является рентабельностью основных средств (внеоборотных активов) i -го инвестиционного проекта в форме денежного потока (*cash flow Return On Fixed Assets*) $ROFA_{it}$ или $CFROFA_{it}$, введенное³:

$$ROFA_{it} = (1 - \tau_c) f_i \frac{P_{it} - C_{it}}{P_{it}} + \tau_c \mu. \quad (19)$$

С учетом (19) операционный денежный поток запишется:

$$OCF_{it} = ROFA_{it} FA_{it}. \quad (20)$$

Инвестиционный денежный поток ICF_{it} расходуется на капиталовложения в основные средства INV_{it} и изменение оборотного капитала ΔNWC_{it} ⁴:

³ Павлов О.В. Аналитическое решение задачи оптимального управления инвестициями предприятия в дискретной постановке // Экон. науки. 2009. № 8(57).

⁴ См.: Брейли Р., Майерс С. Указ. соч.; Бирман Г., Шмидт С. Указ. соч.; Бриггем Ю., Гасперски Л. Указ. соч.; Хелферт Э. Указ. соч.; Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. Указ. соч.

$$ICF_{it} = \alpha_{it} INV_{it} + \Delta NWC_{it}, \quad (21)$$

Согласно рекомендациям⁵, чистый оборотный капитал (*Net Working Capital*) может быть рассчитан как процент от выручки:

$$NWC_{it} = \gamma_{it} REV_{it}.$$

Процент γ_{it} характеризует эффективность управления оборотным капиталом i -го проекта в периоде t . Изменение потребности в финансировании оборотного капитала возникает при изменении объемов продаж:

$$\Delta NWC_{it} = \gamma_{it} (REV_{it+1} - REV_{it}).$$

С учетом (8) и (18) изменение оборотного капитала определится:

$$\Delta NWC_{it} = \gamma_{it} f_i (FA_{it+1} - FA_{it}) = \varphi_{it} \Delta FA_{it}. \quad (22)$$

Экономическим смыслом коэффициента φ_{it} является количество денежных средств, инвестируемое в оборотный капитал i -го проекта в период t при увеличении стоимости основных средств i -го проекта на одну денежную единицу. Изменение основных средств определится из системы (1):

$$\Delta FA_{it} = \alpha_{it} INV_{it} - k_{it} FA_{it}, \quad t = 0, n_i. \quad (23)$$

Подставим (23) в формулу (22):

$$\Delta NWC_{it} = \varphi_{it} (\alpha_{it} INV_{it} - k_{it} FA_{it}). \quad (24)$$

С учетом (24) инвестиционный денежный поток (21) запишется:

$$ICF_{it} = \alpha_{it} INV_{it} (1 + \varphi_{it}) - \varphi_{it} k_{it} FA_{it}. \quad (25)$$

Выражение для чистого приведенного дохода инвестиционного проекта (5) с учетом (6), (20) и (25) примет вид:

$$NPV = \sum_{t=0}^n \sum_{i=1}^m \frac{(ROFA_{it} + \varphi_{it} k_{it}) FA_{it} - \alpha_{it} INV_{it} (1 + \varphi_{it})}{(1 + r_i)^t}. \quad (26)$$

Сформулируем задачу оптимального управления: зная начальное состояние основных средств для каждого инвестиционного проекта (2), необходимо выбрать такое допустимое управление инвестициями (3)-(4) в начальный период $t = 0$ для дискретной системы (1), чтобы чистый приведенный доход (26) принял максимальное значение.

2. Решение задачи выбора инвестиционного проекта из нескольких взаимоисключающих альтернатив

Применим для решения задачи дискретный принцип максимума Понтрягина⁶. Запишем гамильтониан:

⁵ Брейли Р., Майерс С. Указ. соч.

⁶ См.: Болтянский В.Г. Указ. соч.; Лагоша Б.А. Указ. соч.

$$H_t = \sum_{i=1}^m \left[\left\{ \Psi_{it+1} - \frac{1 + \varphi_{it}}{(1 + r_i)^t} \right\} \alpha_{it} INV_{it} + \Psi_{it+1} FA_{it} (1 - k_{it}) + \frac{(ROFA_{it} + \varphi_{it} k_{it}) FA_{it}}{(1 + r_i)^t} \right],$$

$$t = 0, n.$$

Гамильтониан линейно зависит от управления α_t .

В соответствии с принципом максимума в каждой точке оптимальной траектории функция Гамильтона H_t достигает максимума относительно управления. Из условия максимума гамильтониана найдем оптимальное управление в начальный период $t = 0$, определяющее выбор наилучшего i -го проекта:

$$\alpha_{i0}^{opt} = \begin{cases} 1, & \text{если } R_{j0} = \max_i R_{i0} \\ 0, & \text{если } R_{j0} \neq \max_i R_{i0} \end{cases} \quad i = 1, m, \quad (27)$$

где значение R_{i0} определяется:

$$R_{i0} = [\Psi_{i1} - (1 + \varphi_{i0})] INV_{i0}. \quad (28)$$

Таким образом, наилучшим проектом будет проект, у которого максимальное значение R_{i0} .

Сопряженная система запишется:

$$\Psi_{it} = \frac{\partial H_t}{\partial FA_{it}} = \begin{cases} (1 - k_{it}) \Psi_{it+1} + \frac{ROFA_{it} + \varphi_{it} k_{it}}{(1 + r_i)^t}, & \text{если } t = n_i, 0 \\ 0, & \text{если } t > n_i \end{cases}$$

$$i = 1, m. \quad (29)$$

Для сопряженных переменных на правом конце должно выполняться условие трансверсальности:

$$\Psi_{in_i+1} = 0, \quad i = 1, m. \quad (30)$$

Сформулируем численный алгоритм выбора наилучшего инвестиционного проекта из m взаимоисключающих альтернатив в начальный период:

1) подготавливаются исходные данные для m проектов: прогнозируемые цены и объем продаж продукции, удельные материальные затраты, количество и средняя зарплата сотрудников для периодов $t = 0, n_i$;

2) рассчитывается по формуле (10) себестоимость продукции C_{it} каждого i -го проекта для периодов $t = 0, n_i$;

3) рассчитывается по формуле (19) рентабельность основных средств $ROFA_{it}$ каждого i -го проекта, $t = 0, n_i$;

4) рассчитываются по формуле (29) сопряженные переменные Ψ_{it+1} для каждого i -го проекта, для периодов $t = n_i - 1$;

5) вычисляются по формуле (28) значения R_{i0} для каждого i -го проекта;

6) выбирается по формуле (27) наилучший проект с максимальным значением R_{i0} .

В частном случае, когда для i -го инвестиционного проекта рентабельность основных средств, коэффициент выбытия основных средств, коэффициент изменения оборотного капитала являются постоянными: $ROFA_{it} = ROFA_i = const$, $k_{it} = k_i = const$, $\varphi_{it} = \varphi_i = const$, возможно аналитическое решение дискретной задачи. В нашей работе⁷ получено аналитическое выражение для сопряженной переменной:

$$\Psi_{it+1} = \frac{ROFA_i + \varphi_i k_i}{r_i + k_i} \left[\frac{(1+r_i)^{n_i-t} - (1-k_i)^{n_i-t}}{(1+r_i)^{n_i}} \right]. \quad (31)$$

С учетом формулы (31) значение R_{i0} определяется:

$$R_{i0} = \left\{ \frac{ROFA_i + \varphi_i k_i}{r_i + k_i} \left[1 - \left[\frac{1-k_i}{1+r_i} \right]^{n_i} \right] - (1+\varphi_i) \right\} INV_{i0}.$$

В случае, если все проекты требуют одинакового количества финансовых ресурсов:

$$INV_{10} = INV_{20} = INV_{i0} = INV_0,$$

не учитывается выбытие основных средств $k_i = 0$, изменение оборотного капитала $\ddot{o}_i = 0$, переменные R_{i0} вычисляются:

$$R_{i0} = \left[ROFA_i \left\{ \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i (1+r_i)^{n_i}} \right\} - 1 \right] INV_0 = \\ = [ROFA_i B(n_i, r_i) - 1] INV_0, \quad (32)$$

где $B(n_i, r_i)$ - коэффициент аннуитета.

В данном случае максимум R_{i0} достигается при максимизации произведения рентабельности основных средств $ROFA_i$ и коэффициента аннуитета $B(n_i, r_i)$.

У наилучшего проекта произведение рентабельности основных средств на коэффициент аннуитета будет максимальное. При рассмотрении проектов с бесконечным горизонтом планирования у наилучшего проекта произведение рентабельности основных средств и ставки дисконтирования будет максимальное. Из формулы (32) следует, что в случае равенства горизонтов планирования $n_i = n$ и рисков проектов $r_i = r$ наилучшим будет проект с максимальной рентабельностью основных средств $ROFA_i$.

Поступила в редакцию 06.08.2009 г.

⁷ Павлов О.В. Указ. соч.