ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БИБЛИОТЕКИ SEDUMI ДЛЯ РОБАСТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

А.Г. Исавнин,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических методов в экономике Казанского (Приволжского) федерального университета, филиал в г. Набережные Челны

Д.Р. Галиев,
студент кафедры математических методы в экономике» Казанского (Приволжского) федерального университета, филиал в г. Набережные Челны

Адрес: г. Набережные Челны, бульвар Строителей, д. 1 (5/10), каб. 209
E-mail: isavnin@mail.ru, damir.galiev@mail.ru

В статье раскрываются принципы робастной оптимизации инвестиционного портфеля. Описано использование библиотеки SEDUMI для решения задач робастной оптимизации. Представлены модернизированные версии некоторых моделей выбора оптимального портфеля: модели Марковица, модели Телсера и модели Блэка-Литтермана. Приводятся результаты сравнительного анализа эффективности моделей: до робастной оптимизации и после. Эксперименты проведены при растущем, боковом и понижающемся трендах с некоторыми высоколиквидными акциями, торгующимися на ММВБ. Оценены сильные и слабые стороны разных подходов.

Ключевые слова: инвестиционный портфель, робастная оптимизация, модель Марковица, модель Телсера, модель Блэка-Литтермана, SEDUMI.

1. Введение

Одной из основных проблем в задаче выбора оптимального инвестиционного портфеля является правильная оценка величин ожидаемой доходности μ и матрицы ковариации доходностей Σ. Эти параметры используются практически во всех современных моделях портфельного инвестирования, включая классическую mean-variance модель Марковица [1], модель Блэка-Литтермана [2], «интеллектуальные» модели [3]. На практике их тяжело оценить правильно, так как значения параметров меняются каждый день. Именно от этих параметров зависит качество инвестиционного портфеля. Под качеством инвестиционного портфеля понимается совокупность параметров риска и доходности.

Существует несколько методов для снижения уровня неопределенности этих параметров. Основная идея этих методов заключается в том, чтобы снизить чувствительность итоговых оптимальных портфелей к неопределенным входным параметрам. Другими словами, если значения параметров μ и Σ изменятся незначительно, итоговый портфель не должен кардинально менять свою структуру. Фрост и Саварино [4] предлагают ограничивать веса для каждого актива в портфеле. Чопра [5] предлагает использовать оценку Джеймса-Стейна для ожидаемых средних значений, в то время как Блэк и Литтерман используют Байесовскую оценку μ и Σ (с учетом мнений экспертов). Также существуют методы выборов и сценариев, которые подробно описаны, например, в работе [6].

Принципы робастной оптимизации позволяют снизить влияние описанных проблем. Сначала необходимо определить интервал возможных значений параметров μ и Σ. Интервал значений называется неопределенным множеством этих параметров. Конечная задача будет решена для «наихудшего» случая. В итоге инвестор сможет увидеть уровень дохода портфеля при «наихудшем» развитии событий. Довольно часто в качестве критерия «наихудшего» случая используется показатель *VaR* (Value-at-Risk) [7]. Подобные подходы предложены в работах [8; 9; 10].

2. Математическая постановка задачи и краткое описание библиотеки SEDUMI

Для решения задачи построения оптимальных портфелей применяется метод Лагранжа или теорема Куна-Таккера (при наличии ограничений). При решении робастной оптимизационной задачи для «наихудшего» случая из неопределенного множества использование этих методов неэффективно. Вместо этого задачу можно свести к классу задач SOCP (Second Order Cone Problem):

$$\min_x \left\{ f^T x \mid \|A_i x + b_i\| \le c_i^T x + d_i,\ i = 1,\dots,N \right\}, \quad (1)$$

где $\|\cdot\|$ – Евклидова норма. Так, для вектора u, $\|u\| = \sqrt{u^T u}$, f, x и c – n-мерные векторы. Всего N ограничений. SOCP – класс задач, который находится между линейным программированием (LP – Linear Programming) и полуопределенным программированием (SDP – SemiDefinite Programming) [8].

Для проведения экспериментов была использована библиотека SEDUMI. Эта библиотека является дополнением к комплексу MATLAB для решения оптимизационных задач с линейными, квадратичными и полуопределенными ограничениями. Библиотека SEDUMI разработана Йосефом Штурмом из Тильбургского университета в Нидерландах. С конца 2004 года её развитием и продвижением занимается лаборатория оптимизации канадского университета Макмастер. Библиотека позволяет использовать комплекснозначные переменные. С применением SEDUMI оптимизационные задачи большой размерности можно решать эффективнее, чем при использовании аналогов (CSDP, SDPLIB). Под эффективность решения понимается скорость нахождения и точность решения.

В настоящей работе для придания моделям свойства робастности был использован метод оптимизации наихудшего случая, а также введен контроль риска потери капитала посредством определения *VaR*-ограничений и ограничений на структуру инвестиционного портфеля. Схема формирования неопределенных множеств S_m и S_v для доходностей и ковариаций следующая:

$$\begin{gathered}
\mu_i^L \le \mu_i \le \mu_i^U, \quad \forall i \\
\sigma_{ij}^L \le \sigma_{ij} \le \sigma_{ij}^U, \quad \forall i,j \\
\mu_i^0 = \left(\mu_i^L + \mu_i^U\right)/2,\ \beta_i = \left(\mu_i^U - \mu_i^L\right)/2, \\
\sigma_{ij}^0 = \left(\sigma_{ij}^L + \sigma_{ij}^U\right)/2,\ \delta_{ij} = \left(\sigma_{ij}^U - \sigma_{ij}^L\right)/2, \\
\mu_i^0 - \beta_i \le \mu_i \le \mu_i^0 + \beta_i, \quad \forall i \\
\sigma_{ij}^0 - \delta_{ij} \le \sigma_{ij} \le \sigma_{ij}^0 + \delta_{ij}, \quad \forall i,j \\
S_m = \left\{\mu : \mu^0 - \beta \le \mu \le \mu^0 + \beta, \beta \ge 0\right\}, \\
S_v = \left\{\Sigma : \Sigma^0 - \Delta \le \Sigma \le \Sigma^0 + \Delta, \Delta \ge 0\right\}.
\end{gathered} \quad (2)$$

Здесь $\mu_i \subset S_m$; $\sigma_{ij} \subset S_v$; μ_i^L, μ_i^U – нижние и верхние границы значения параметров μ_i; σ_{ij}^L, σ_{ij}^U – нижние и верхние границы значения параметров σ_{ij}. Значения из полученных неопределенных множеств будут использоваться при определении наихудших и наилучших значений риска и доходности. Для получения робастной постановки задачи, необходимо сформированную задачу оптимизации наихудшего случая привести к SOCP-виду.

3. Робастная модель Марковица

До недавнего времени современная портфельная теория, сформированная Г. Марковицем в 1952 году, оставалась чуть ли не единственным количественным методом решения задачи портфельного анализа. Основная идея этой теории состоит в следующем. Пусть имеются n активов, из которых инвестор может сформировать портфель. Капитал распределяется между активами долями x_i, $0 \le x_i \le 1$. Активы характеризуются эффективностями R_i, которые являются случайными величинами с известными математическими ожиданиями $MR_i = \mu_i$ и матрицей ковариаций Σ. λ – коэффициент неприятия риска [11]. I – вектор-строка, состоящая из единиц. Модель Марковица формулируется следующим образом:

$$\max_x \left\{ \left(\mu^T x - \frac{\lambda}{2} x^T \Sigma x \right) \middle| I^T x = 1 \right\} \tag{3}$$

Хотя модель Гарри Марковица может показаться привлекательной и вполне обоснованной с теоретической точки зрения, при её практическом использовании возникает ряд проблем. Некоторые проблемы, с примерами на российском рынке, описаны в [1; 11]. Составим робастную модель, предварительно выполнив ряд преобразований:

$$\max_x \left\{ \min_{\mu,\Sigma} \left[\mu^T x - \frac{\lambda}{2} x^T \Sigma x \right] \middle| I^T x = 1 \right\}$$

$$\max_x \left\{ \min_{\mu} \left[\mu^T x \right] - \frac{\lambda}{2} \max_{\Sigma} \left[x^T \Sigma x \right] \middle| I^T x = 1 \right\}$$

$$\begin{aligned}
\min_{\mu} \left[\mu^T x \right] &= \min_{\mu} \sum_i \mu_i x_i = \sum_{i::x_i<0} \left(\mu_i^0 + \beta_i \right) x_i + \\
&+ \sum_{i::x_i \ge 0} \left(\mu_i^0 - \beta_i \right) x_i = \sum_i \mu_i^0 x_i + \sum_{i::x_i<0} \beta_i x_i - \sum_{i:x_i \ge 0} \beta_i x_i = \\
&= \sum_i \left(\mu_i^0 x_i - \beta_i |x_i| \right) = \left(\mu^0 \right)^T x - \beta^T |x|
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\max_{\Sigma} \left[x^T \Sigma x \right] &= \max \sum_{i,j} \sigma_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j:x_i x_j<0} \left(\sigma_{ij}^0 - \delta_{ij} \right) x_i x_j + \\
&+ \sum_{i,j:x_i x_j \ge 0} \left(\delta^0 + \delta_{ij} \right) x_i x_j = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^0 x_i x_j + \sum_{i,j} \delta_{ij} |x_i x_j| = \\
&= \sum_{i,j} \sigma_{ij}^0 x_i x_j + \sum_{i,j} \delta \ |x_i| |x_j| = x^T \Sigma^0 x + |x|^T \Delta |x|
\end{aligned}$$

$$\max_x \left\{ \left(\mu^0 \right)^T x - \beta^T |x| - \frac{\lambda}{2} x^T \Sigma x - \frac{\lambda}{2} |x|^T \Delta |x| \middle| I^T x = 1 \right\}$$

В итоге робастная задача примет вид:

$$\max_{x,\rho,\tau} \left\{ \left(\mu^0 \right)^T x - \beta^T |x| - \frac{\lambda}{2} (\rho + \tau) \middle| \begin{array}{l} I^T x = 1 \\ \rho \ge x^T \Sigma^0 x \\ \tau \ge |x|^T \Delta |x| \end{array} \right\} \tag{5}$$

4. Робастная модель Телсера

Главное отличие и преимущество модели Телсера [8], в отличие от классической постановки задачи выбора оптимального портфеля, заключается в контроле риска потери капитала с использованием показателя VaR:

$$\max_x \left\{ \mu_p \middle| \begin{array}{l} VaR_\alpha = -\mu_p - z_\alpha \sigma_p \\ \mu_p = \mu^T x \\ \sigma_p^2 = x^T \Sigma x \\ I^T x = 1 \\ x \in R_+^n \end{array} \right\} \tag{6}$$

Рассмотрим вывод формулы VaR, предложенный автором модели. Так, значение VaR уровня 1-α (VaR_α) определяется как:

$$P\left(R_{p\alpha} \le -VaR \right) = \alpha \tag{7}$$

Совершив ряд преобразований, получим:

$$\begin{gathered}
P\left(R_p \le -VaR_\alpha \right) = \alpha \Leftrightarrow P\left(\frac{R_p - \mu_p}{\sigma_p} \le \frac{-VaR_\alpha - \mu_p}{\sigma_p} \right) = \alpha \Leftrightarrow \\
\frac{-VaR_\alpha - \mu_p}{\sigma_p} = z_\alpha \Leftrightarrow VaR_\alpha = -\mu_p - z_\alpha \sigma_p
\end{gathered} \tag{8}$$

где R_p – доходность портфеля, μ_p – средняя доходность портфеля, σ_p – риск портфеля (среднеквадратическое отклонение), z_α – квантиль стандартного нормального распределения порядка α. При этом полагается, что доходность портфеля имеет распределение, близкое к «нормальному». Так, VaR уровня 95% (т.е. при $\alpha = 0.05$) будет определяться как $VaR_{0.05} = -\mu_p + 1.6449\ \sigma_p$.

Эта модель наследует главный недостаток классического подхода – сильную неустойчивость к входным параметрам. Составим робастную модель согласно представленным выше определениям и предпосылкам:

$$\max_x \left\{ \min_{\mu} \left[\mu^T x \right] \middle| \begin{array}{l} I^T x = 1 \\ \max_{\mu,\Sigma} [P\left(R_{p\alpha} \le -VaR \right)] \le \alpha \\ x \in R_+^n \end{array} \right\} \tag{9}$$

$$\min_{\mu} \left[\mu^T x \right] = \left(\mu^0 \right)^T x - \beta^T |x|$$

$$\begin{gathered}
\max_{\mu,\Sigma} [P\left(R_p \le -VaR_\alpha \right)] \le \alpha \Leftrightarrow \max_{\mu,\Sigma} \frac{-VaR_\alpha - \mu^T x}{\sqrt{x^T \Sigma x}} \le z_\alpha \Leftrightarrow \\
\frac{-VaR_\alpha - \min_{\mu} \mu^T x}{\max_{\Sigma} \sqrt{x^T \Sigma x}} \le z_\alpha \Leftrightarrow -\min_{\mu} \mu^T x - z_\alpha \max_{\Sigma} \sqrt{x^T \Sigma x} \le VaR_\alpha \Leftrightarrow \\
-\left(\mu^0 \right)^T x + \beta^T |x| - z_\alpha \sqrt{x^T \Sigma^0 x + |x|^T \Delta |x|} \le VaR_\alpha \Leftrightarrow \\
-z_\alpha \left\| \begin{pmatrix} \left\| \left(\Sigma^0 \right)^{0,5} x \right\| \\ \left\| \Delta^{0,5} |x| \right\| \end{pmatrix} \right\| \le \left(\mu^0 \right)^T x + \beta^T |x| + VaR_\alpha
\end{gathered}$$

В итоге робастная задача примет вид:

$$\max_x \left\{ \left(\mu^0 \right)^T x - \beta^T |x| \middle| \begin{array}{l} I^T x = 1 \\ -z_\alpha \left\| \begin{pmatrix} \left\| \left(\Sigma^0 \right)^{0,5} x \right\| \\ \left\| \Delta^{0,5} |x| \right\| \end{pmatrix} \right\| \le \left(\mu^0 \right)^T x + \beta^T |x| + VaR_\alpha \\ x \in R_+^n \end{array} \right\} \tag{10}$$

5. Робастная модель Блэка-Литтермана

Модель Блэка-Литтермана была впервые опубликована Фишером Блэком и Робертом Литтерманом из Голдман Сакс [2]. Основой теории является «равновесный подход». Равновесные доходности вычисляются по формуле:

$$\Pi = \lambda \Sigma w_{mkt}, \qquad (11)$$

где Π — вектор равновесной доходности; λ — коэффициент неприятия риска; Σ — матрица ковариации исторических доходностей; w_{mkt} — вектор рыночной капитализации каждого из активов относительно суммы капитализации активов в портфеле. Коэффициент λ характеризует готовность инвестора жертвовать величиной ожидаемой доходности портфеля ради снижения его риска:

$$\lambda = \frac{E(r) - r_f}{\sigma^2} \qquad (12)$$

где $E(r)$ — ожидаемая доходность рынка, r_f — безрисковая ставка процента, $\sigma^2 = w_{mkt}^T \Sigma w_{mkt}$ — дисперсия рыночного портфеля. Рассмотрим формулу Блэка-Литтермана для апостериорного вектора доходности. Она является ключевым моментом перед расчетом итогового портфеля. Пусть K — количество субъективных мнений, N — количество активов.

$$\mu = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q\right] \qquad (13)$$

Здесь μ — новый (апостериорный) смешанный вектор доходности ($N \times 1$); τ — масштабирующий фактор; Σ — матрица ковариации доходности с размерностью ($N \times N$); P — матрица размерности ($K \times N$), которая идентифицирует активы, насчет которых у инвестора есть субъективное мнение; Ω — диагональная матрица ковариации с уровнями доверия для каждого субъективного мнения, ($K \times K$); Π — вектор равновесной доходности, ($N \times 1$); Q — вектор субъективных взглядов, ($K \times 1$).

Неопределенность субъективных взглядов отражается в векторе ошибок ε, элементы которого нормально распределены со средней 0 и матрицей Ω. Таким образом, итоговые значения субъективных мнений имеет вид $Q+\varepsilon$.

$$Q + \varepsilon = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ E_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Вариации ω элементов вектора ошибок ε формируют диагональную матрицу ковариаций Ω и демонстрируют меру неопределенности субъективных взглядов. Матрица является диагональной, так как по предпосылкам модели субъективные мнения независимы друг от друга:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_k \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Существует несколько методик определения элементов матрицы Ω [2; 10]. Значения доходностей по субъективным взглядам, находящиеся в вектореcтолбце Q, вводятся в модель посредством матрицы P. Влияние каждого субъективного мнения отражается в векторе-строке размерностью $1 \times N$. Так, для K взглядов получаем матрицу P размерностью $K \times N$:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k,1} & \cdots & E \end{bmatrix} \qquad (16)$$

Итоговая формула выглядит следующим образом:

$$w = \mu(\lambda\Sigma)^{-1} \qquad (17)$$

Составим робастную модель. В данном случае, изза особенностей формирования вектора оценки будущих доходностей, использование предыдущих схем неприемлемо. Для придания робастности введем ограничения на структуру портфеля, а также ограничения по VaR для контроля риска потери капитала:

$$\max_x \left\{ \mu^T x \left| \begin{array}{l} I^T x = 1 \\ AX \le b \\ x^T \Sigma x \le s \\ P(Y \le VaR_\alpha(Y)) > \alpha \\ Y \in R \\ x \in R_+^n \end{array} \right. \right\} \qquad (18)$$

Здесь s — приемлемый уровень риска, задаваемый пользователем модели. Y — доходность портфеля. Матрица A и вектор b необходимы для наложения ограничений на структуру портфеля. Предварительно проведем ряд преобразований для показателя VaR, согласно методу, предложенному в [12]:

$$P(Y \le VaR_\alpha(Y)) > \alpha \Leftrightarrow P(\xi^T x \ge -\chi) \ge \alpha$$

$$P(\xi^T x \ge -\chi) = P\left(\frac{\xi^T x - \mu^T x}{x^T \Sigma x} \ge \frac{-\chi - \mu^T x}{\sqrt{x^T \Sigma x}}\right) =$$

$$= 1 - F_X\left(\frac{-\chi - \mu^T x}{\sqrt{x^T \Sigma x}}\right) \qquad (19)$$

$$1-F_X\left(\frac{-\chi-\mu^T x}{\sqrt{x^T\Sigma x}}\right)\geq\alpha \Leftrightarrow F_X\left(\frac{-\chi-\mu^T x}{\sqrt{x^T\Sigma x}}\right)\leq 1-E \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-\chi-\mu^T x}{\sqrt{x^T\Sigma x}}\leq F_X^{-1}(1-\alpha)\Leftrightarrow \mu^T x+F_X^{-1}(1-\alpha)\sqrt{x^T\Sigma x}\geq-\chi$$

где F_X — гауссовская функция распределения, ξ — вектор доходностей активов, χ — допустимый уровень *VaR* для портфеля, α — доверительный уровень и, как уже отмечалось раньше, в наших экспериментах этот показатель принимал значение $\alpha=$ 0.95. Подобный подход использован в [13]. В итоге, робастная задача примет следующий вид:

$$\max_x\left\{\mu^T x\;\middle|\;\begin{array}{l} I^T x=1\\ AX\leq b\\ x^T\Sigma x\leq s\\ \mu^T x+F_{(Y)}^{-1}(1-\alpha)\sqrt{x^T\Sigma x}\geq-\chi\\ Y\in R\\ x\in R_+^n\end{array}\right\} \qquad (20)$$

В наших экспериментах, в зависимости от требуемого уровня риска, значение χ варьировалось от 0.05 до 0.3. Другими словами, допустимые моделью предельные потери устанавливались от 5 до 30% от стоимости портфеля.

6. Анализ результатов

Доходность является одним из важнейших показателей эффективности управления портфелем, свидетельствующим об эффективности управления. Но нельзя, используя только доходность, судить о качестве управленческой стратегии. Помимо доходности есть и обратная сторона – риск, пренебрежение им в оценке эффективности может исказить реальное положение вещей. В настоящей работе для оценки эффективности инвестиционного портфеля использовался коэффициент Шарпа (Sharpe Ratio) [11]. Этот показатель по-другому называют коэффициент «доходность-разброс» (reward-to-variability ratio) и обозначают как *RVAR*:

$$RVAR=\frac{r_p-r_f}{\sigma_p} \qquad (21)$$

где r_p — средняя доходность портфеля за рассматриваемый промежуток времени, r_f — среднее значение безрисковой ставки, σ_p – стандартное отклонение доходности портфеля (общий риск). В качестве безрисковой ставки использовалась доходность государственных облигаций. Всего в рамках работы было проведено несколько экспериментов. Временной промежуток: 01.07.2010 – 01.05.2011. При проведении экспериментов построения оптимальных портфелей по описанным моделям использовались данные о дневных котировках акций следующих компаний, акции которых торгуются на ММВБ (*табл. 1*).

Таблица 1.

Предприятия, данные о котировках которых использовались при проведении экспериментов

№	Предприятие	Капитализация (млрд. руб.)	Количество акций
1	Татнефть	416.57	2 178 690 700
2	Газпром	5 627.19	23 673 512 900
3	Ростелеком	124.97	728 696 320
4	ВТБ	1 049.19	10 460 541 337 338
5	Лукойл	1 752.08	850 563 255
6	Полюс-Золото	321.40	190 627 747
7	Уралсиб	78.30	292 575 808 568
8	МТС	519.06	1 993 326 138
9	Сбербанк	2 340.67	21 586 948 000

Эксперименты проводились на российском рынке при растущем, боковом и понижающемся трендах. Рассмотрим результаты экспериментов при боковом тренде. Видно, что для всех моделей при увеличении риска увеличивается доходность (*рис. 1, 2*). У робастных моделей наблюдается более высокая доходность при примерно тех же уровнях риска. Следовательно, качество моделей повышается.

Опишем результаты аналогичных экспериментов на российском рынке при растущем тренде. Для всех моделей при увеличении риска увеличивалась доходность. В случае растущего тренда, при стандартной и робастной постановках задачи, наблюда-

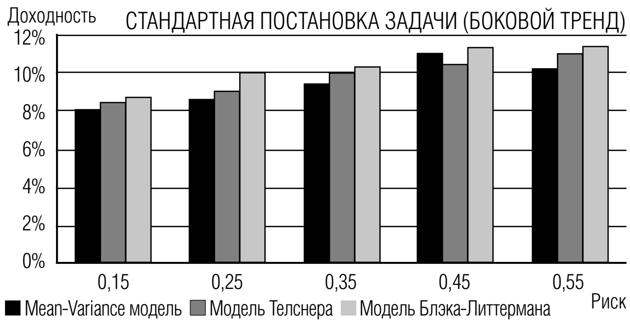

Рис. 1. Риски и доходности портфелей при боковом тренде.

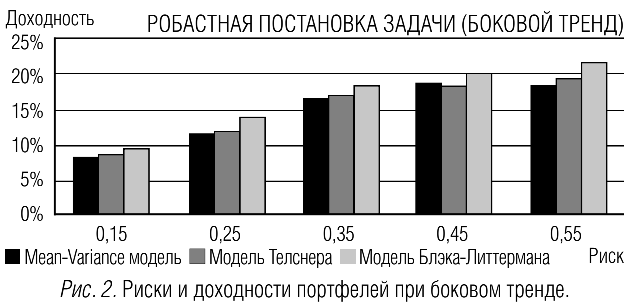

Рис. 2. Риски и доходности портфелей при боковом тренде.

лась высокая доходность портфелей. Качество робастных моделей немного выше качества моделей в стандартной постановке (*рис. 3, 4*).

Еще раз можно заметить, что доминирует модель Блэка-Литтермана, в то время как классическая mean-variance модель и модель Телсера ведут себя примерно одинаково. Это зависит от нескольких причин. Во-первых, были использованы прогнозы от аналитических ведомств с адекватной прогнозной способностью [14]. Во-вторых, при робастной постановке задачи вводились дополнительные ограничения на структуру

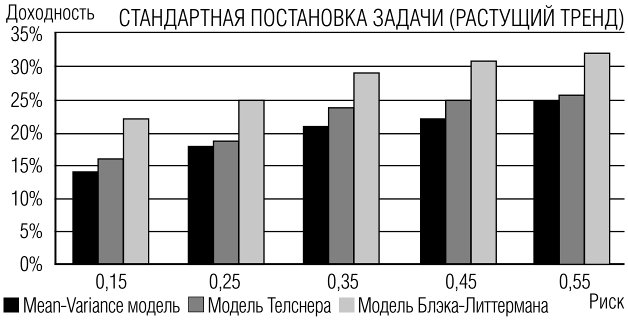

Рис. 3. Риски и доходности портфелей при растущем тренде.

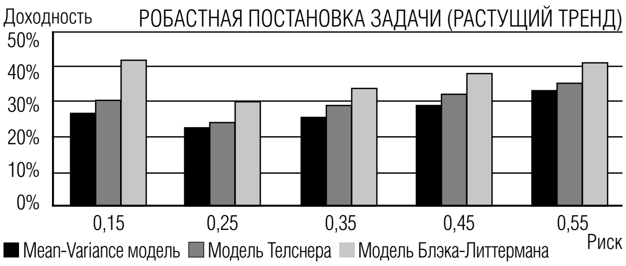

Рис. 4. Риски и доходности портфелей при растущем тренде.

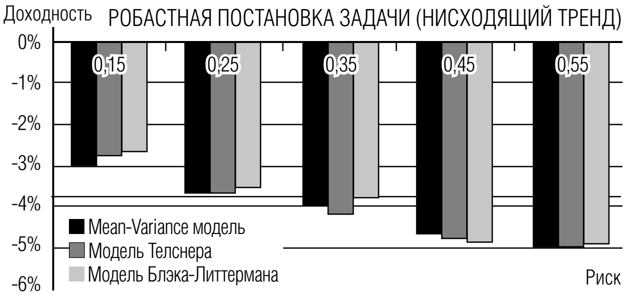

Рис. 5. Риски и доходности портфелей при падающем тренде.

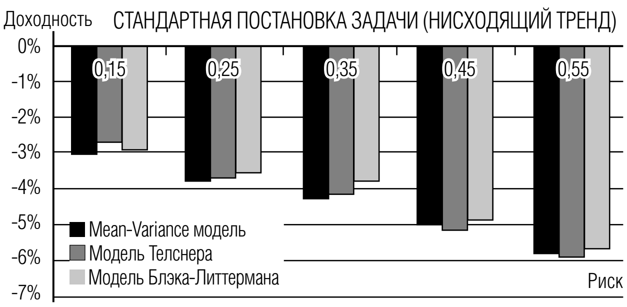

Рис. 6. Риски и доходности портфелей при падающем тренде.

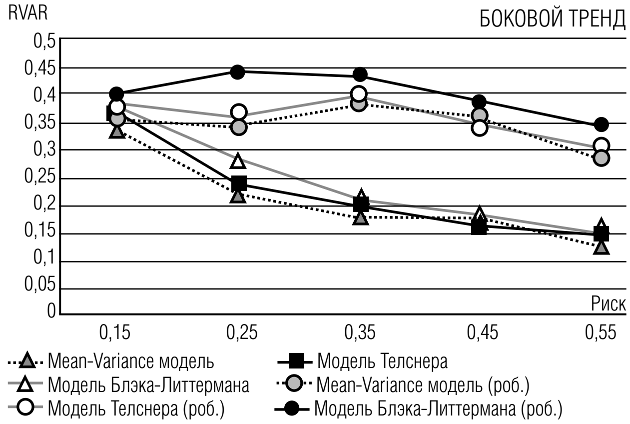

Рис. 7. Оценка качества портфеля при боковом тренде.

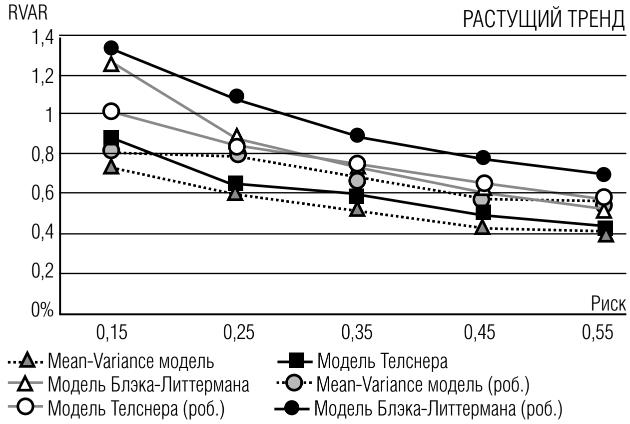

Рис. 8. Оценка качества портфеля при растущем тренде

портфеля, которые позволили сохранить уровень диверсификации при более высоких рисках.

Обратим внимание на случай, когда рынок, вопреки всем прогнозам, сменил тренд на нисходящий. Такие ситуации характерны при появлении резких негативных новостей в сфере экономики или политики. Ниже показано, как повели себя модели при подобной ситуации (*рис. 5, 6*). Можно заметить, что модели в робастной постановке во время просадок показывают лучшие результаты.

Теперь перейдем к рассмотрению качества портфелей по критерию риск-доходность. Обратим внимание на поведение коэффициента Шарпа при различных уровнях риска. Ниже отображены значения коэффициента Шарпа при боковом тренде (*рис. 7*).

Аналогично были рассчитаны коэффициенты Шарпа при растущем тренде для различных уровней риска (*рис. 8*).

Такие же расчеты были проведены и для случая резкой смены тренда на негативный (*рис. 9*). В данном случае результат похож на результат эксперимента при растущем тренде.

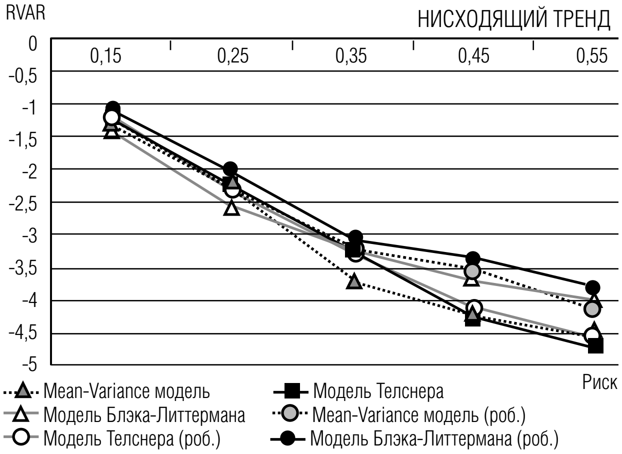

Рис. 9. Оценка качества портфеля при падающем тренде.

7. Заключение

Из результатов экспериментов можно сделать вполне ожидаемый вывод о том, что при позитивных растущих тенденциях на рынке, качество инвестиционного портфеля (совокупность риска и доходности) кардинально от структуры портфеля не зависит. В периоды неопределенности (боковой тренд, перелом тренда, интервенции) структура портфеля играет решающую роль. В подобные периоды именно от структуры портфеля будет зависеть его качество. Эти выводы характерны для моделей в стандартной и робастной постановках. Робастные модели обладают лучшим качеством по сравнению с моделями в стандартной постановке на всех участках тренда (*рис. 1-6)*.

Итак, в рамках представленного исследования, робастной оптимизации были подвергнуты следующие модели: классическая mean-variance модель, модель Блэка-Литтермана, модель Телсера. Приведен сравнительный анализ эффективности моделей до робастной оптимизации и после. Оценены сильные и слабые стороны разных подходов. О целесообразности использования метода робастной оптимизации говорит тот факт, что качество портфелей увеличилось до 5-21% в зависимости от участков тренда, выбранной модели и значения выбранного риска. Для оценки качества инвестиционных портфелей использовались коэффициенты, отражающие безрисковую ставку, риск и доходность портфелей. ■

Литература

1. Галиев Д.Р. Фундаментальные модели финансовых рынков и факторные модели ценообразования. Проверка применимости для анализа российского фондового рынка. // Итоговая научно-образовательная конференция студентов Казанского университета 2009 г.: Сборник статей. – Казань, 2009. – С. 262-264.
2. Bevan A., Winkelmann K. Using the Black-Litterman Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience // Fixed Income Research, 1998, № 6. – P. 7-18.
3. Недосекин А.О. Методологические основы моделирования финансовой деятельности с использованием нечетко-множественных описаний : дисс. докт. экон. наук. – СПб, 2004. – С. 46-51.
4. Frost P.A., Savarino J.E. For better performance: Constrained portfolio weights // Journal of Portfolio Management, 1988, № 15. – P. 29-34.
5. Chopra V.K. Improving optimization // Journal of Investing, 1993, № 8. – P. 51-59.
6. Michaud R., Richard O. The Markowitz Optimization Enigma: Is «Optimized» Optimal? // Financial Analysts Journal, 1989, № 1. – P. 31-42.
7. Международная конвергенция измерения капитала и стандартов капитала: новые подходы (Базель II). 01.07.2004. URL: http://www.cbr.ru/today/pk/Basel.pdf (дата обращения: 04.07.11).
8. Engels M. Portfolio Optimization. PhD's Thesis. – Leiden, 2007. – 120 p.
9. Goldfarb D., Iyengar G. Robust Portfolio Selection Problems // Mathematics of Operation Research, 2003, № 1. – P. 1-38.
10. Schutel A.S. The Black-Litterman Model For Active Portfolio Management // Journal of portfolio management, 2009, №11. – P. 18-32.
11. Анализ портфельных инвестиций / М.Д. Миссаров, А.Г. Исавнин, И.И. Махмутов, Д.Р. Галиев; фил. Казан. ун-та - Набережные Челны : Лаб. операт. Полиграфии, 2011. – 239 с.
12. Miguel A.L. Stochastic portfolio Optimization with Round Lot Trading Constraints. 02.10.2009. URL: http://www.minlp.org/problems/mod/85/Stoc_Port_with_Round_Lot_-_MODEL.pdf (дата обращения: 05.07.2011).
13. Галиев Д.Р., Исавнин А.Г. Использование VaR-ограничений в модели Блэка-Литтермана при формировании инвестиционного портфеля // В мире научных открытий, 2011, №6. – С. 261-270.
14. Галиев Д.Р. Использование модели Блэка-Литтермана и экспертных оценок комплексного характера для эффективного управления портфелем ценных бумаг. Программная реализация и результаты применения на российском и американском рынках // Итоговая научно-образовательная конференция студентов Казанского университета 2010 г.: Сборник статей. – Казань, 2010. – С. 276-278.