

Динамические модели оптимального отбора инвестиционных проектов

© 2011 Т.А. Мошкова

Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)
E-mail: moshkova_ta@pochta.ru

В статье отбор инвестиционного проекта из нескольких альтернативных вариантов рассматривается как задача оптимального управления дискретной системой. С использованием дискретного принципа максимума Понтрягина найдена структура оптимального управления. Для случая осуществления однократных инвестиций и постоянных денежных потоков проектов найдено аналитическое решение дискретной задачи. Получены условия для отбора наилучшего проекта.

Ключевые слова: отбор инвестиционных проектов, задача оптимального управления, дискретный принцип максимума Понтрягина.

Введение

В работе рассматривается задача об отборе наилучшего проекта из m взаимоисключающих альтернативных проектов, имеющих разные параметры.

Проблема отбора наилучшего инвестиционного проекта формализуется как задача оптимального управления дискретной системой¹. Для решения задачи применяется дискретный принцип максимума Понтрягина².

1. Постановка динамической задачи отбора оптимального инвестиционного проекта

Динамика изменения основных средств предприятия FA_{it} в результате реализации i -го инвестиционного проекта описывается дискретным уравнением

$$FA_{it+1} = FA_{it} + \alpha_{it} INV_{it}, \quad i = 1, m, t = 0, n, \quad (1)$$

где α_{it} - булевы переменные, принимающее значение 0 или 1;

INV_{it} - потребность в финансовом ресурсе для реализации i -го проекта в периоде t ;

m - количество рассматриваемых альтернативных инвестиционных проектов;

n - максимальное число из n_i ;

n_i - период окончания i -го проекта.

Если финансовый ресурс INV_{it} инвестируется в i -й проект в периоде t , то $\alpha_{it} = 1$, если не инвестируется, то $\alpha_{it} = 0$.

Данное ограничение формализуется следующим образом:

$$\alpha_{it} \in [0, 1], \quad i = 1, m, t = 0, n. \quad (2)$$

Так как проекты взаимоисключающие, должно выполняться еще одно ограничение:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{it} = 1, \quad t = 0, n. \quad (3)$$

Для каждого инвестиционного проекта заданы начальные условия в период анализа проектов $t = 0$:

$$FA_{i0} = 0, \quad i = 1, m. \quad (4)$$

Выражение для чистого приведенного дохода предприятия в результате выбора одного из проектов запишется:

$$NPV = \sum_{i=1}^m \sum_{t=t_{0i}}^{n_i} \frac{FCF_{it}}{(1+r_i)^t}, \quad (5)$$

где t_{0i} - период начала осуществления i -го проекта;

FCF_{it} - свободный денежный поток i -го инвестиционного проекта (*Free Cash Flow*) в периоде t ;

r_i - ставка дисконтирования для i -го проекта, учитывающая различную степень риска инвестиций.

Предполагается, что все инвестиционные проекты осуществляются за счет финансовых ресурсов предприятия. Экономическая эффективность проектов оценивается в целом, и схема финансирования не учитывается. Рассматриваются денежные потоки от операционной (производственной) и инвестиционной деятельности³. Считается, что денежный поток, генерируемый инвестиционным проектом, имеет место в конце периода, т.е. является постнумерандо.

Свободный денежный поток i -го инвестиционного проекта FCF_{it} в конце периода t определяется как разница денежных потоков от операционной деятельности (*Operating Cash Flow*) OCF_{it} и инвестиционной (*Investment Cash Flow*) ICF_{it} :

$$FCF_{it} = OCF_{it} - ICF_{it}, \quad t = t_{0i}, n_i. \quad (6)$$

Денежный поток от операционной деятельности рассчитывается (здесь и далее предполагается $t=t_{0i}, n_i; i=1, m$):

$$OCF_{it} = REV_{it} - NOC_{it} - PT_{it}, \quad (7)$$

где REV_{it} - выручка (*Revenue*) от реализации произведенной продукции i -го проекта в периоде t ;
 NOC_{it} - чистые операционные издержки (*Net Operating Costs*);
 PT_{it} - налог на прибыль (*Profit Tax*).

Выручка i -го проекта определяется:

$$REV_{it} = P_{it} Q_{it}, \quad (8)$$

где P_{it} - цена продукции;
 Q_{it} - прогноз объема продаж продукции.

Чистые операционные издержки включают: материальные затраты (*Material Costs*) MC_{it} , заработную плату (*Wages and Salary*) WS_{it} , начисления на заработную плату (*Wages Charges*) WC_{it} , другие затраты (*other cost*) OC_{it} :

$$NOC_{it} = MC_{it} + WS_{it} + WC_{it} + OC_{it}. \quad (9)$$

Материальные затраты i -го инвестиционного проекта рассчитываются:

$$MC_{it} = Cm_{it} Q_{it}, \quad (10)$$

где Cm_{it} - материальные затраты на единицу продукции.

Фонд заработной платы определяется:

$$WS_{it} = w_{it} L_{it}, \quad (11)$$

где w_{it} - средняя ставка заработной платы персонала;
 L_{it} - численность производственного персонала.

Численность персонала рассчитывается по формуле

$$L_{it} = \frac{Q_{it}}{l_{it}}, \quad (12)$$

где l_{it} - норматив выпуска продукции средним работником за период t .

Начисления на заработную плату определяются:

$$WC_{it} = \tau_w WS_{it}, \quad (13)$$

где τ_w - ставка единого социального налога.

Накладные и коммерческие затраты OC_{it} вычисляются следующим образом:

$$OC_{it} = \omega_i (MC_{it} + WS_{it} + WC_{it}), \quad (14)$$

где ω_i - процент от затрат на материалы, зарплату, начислений на зарплату i -го проекта.

Подставим (12) в (11), а (10), (11), (13) и (14) в (9), получим формулу для чистых операционных издержек в следующем виде:

$$NOC_{it} = Q_{it} C_{it} (1 + \omega_i), \quad (15)$$

где C_{it} - себестоимость продукции (затраты на единицу продукции), рассчитывается по формуле:

$$C_{it} = Cm_{it} + (1 + \tau_w) \frac{w_{it}}{l_{it}}. \quad (16)$$

Налог на прибыль вычисляется:

$$PT_{it} = \tau_c (REV_{it} - NOC_{it} - DEP_{it}), \quad (17)$$

где τ_c - ставка налога на прибыль;

DEP_{it} - амортизационные начисления (*Depreciation*).

Для расчета износа основных средств (внеоборотных активов) предприятия (*Fixed Assets*) FA_i используется метод равномерного начисления амортизации:

$$DEP_{it} = \mu FA_{it}, \quad (18)$$

где μ - норма амортизации;

FA_{it} - стоимость основных средств в i -м проекте в начале периода t .

Процесс производственной деятельности i -го проекта описывается производственной функцией Леонтьева

$$P_{it} Q_{it} = f_i FA_{it}, \quad (19)$$

где $P_{it} Q_{it}$ - стоимость прогнозируемого объема продаж продукции (выручка) i -го проекта;
 f_i - фондоотдача основных средств, характеризующая производственный процесс i -го проекта.

Подставим формулы (8), (15), (17) в выражение для денежного потока от операционной деятельности i -го инвестиционного проекта (7) и, учитывая (8), (18), (19), получим:

$$OCF_{it} = \left[(1 - \tau_c) f_i \frac{P_{it} - C_{it}}{P_{it}} + \tau_c \mu \right] FA_{it}.$$

Выражение в скобках является рентабельностью инвестиций в форме денежного потока i -го проекта (*Cash Flow Return On Investments*) $CFROI_{it}$:

$$CFROI_{it} = (1 - \tau_c) f_i \frac{P_{it} - C_{it}}{P_{it}} + \tau_c \mu. \quad (20)$$

С учетом (19) операционный денежный поток запишется:

$$OCF_{it} = CFROI_{it} FA_{it}. \quad (21)$$

Инвестиционный денежный поток ICF_{it} расходуется на капиталовложения INV_{it} в основные средства:

$$ICF_{it} = \alpha_{it} INV_{it}. \quad (22)$$

Выражение для чистого приведенного дохода предприятия (5) с учетом (6), (21) и (22) в результате выбора одного из проектов определится:

$$NPV = \sum_{i=1}^m \sum_{t=t_{0i}}^{n_i} \frac{CFROI_{it} FA_{it} - \alpha_{it} INV_{it}}{(1+r_i)^t}. \quad (23)$$

Таким образом, задача выбора оптимального инвестиционного решения из m альтернативных вариантов запишется в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} NPV = \sum_{i=1}^m \sum_{t=t_{0i}}^{n_i} \frac{CFROI_{it} FA_{it} - \alpha_{it} INV_{it}}{(1+r_i)^t} \rightarrow \max, \quad (24) \\ FA_{it+1} = FA_{it} + \alpha_{it} INV_{it}, \quad i = 1, m, t = 0, n, \quad (25) \\ \alpha_{it} \in [0,1], \quad i = 1, m, t = 0, n, \quad (26) \\ \sum_{i=1}^m \alpha_{it} = 1, \quad t = 0, n, \quad (27) \\ FA_{i0} = 0, \quad i = 1, m. \quad (28) \end{array} \right.$$

Сформулируем задачу оптимального управления: зная начальное состояние основных средств для каждого инвестиционного проекта (28), необходимо выбрать такое допустимое управление инвестициями (26)-(27) для дискретной системы (25), чтобы чистый приведенный доход предприятия (24) принял максимальное значение.

2. Решение динамической задачи отбора инвестиционного проекта

Применим для решения задачи дискретный принцип максимума Понтрягина⁴. Запишем гамильтониан:

$$H_t = \sum_{i=1}^m \left[\left\{ \Psi_{it+1} - \frac{1}{(1+r_i)^t} \right\} \alpha_{it} INV_{it} + \Psi_{it+1} FA_{it} + \frac{CFROI_{it} FA_{it}}{(1+r_i)^t} \right], t = 0, n.$$

В соответствии с принципом максимума в каждой точке оптимальной траектории функция Гамильтона H_t достигает максимума относительно управления. Из условия максимума гамильтониана найдем оптимальное управление в период начала осуществления i -го проекта t_{0i} , определяющее выбор наилучшего i -го проекта:

$$\alpha_{it_{0i}}^{opt} = \begin{cases} 1, & \text{если } R_{jt_{0i}} = \max_i R_{it_{0i}} \\ 0, & \text{если } R_{jt_{0i}} \neq \max_i R_{it_{0i}} \end{cases} \quad i = 1, m, \quad (29)$$

где значение $R_{it_{0i}}$ определяется:

$$R_{it_{0i}} = \left(\Psi_{it_{0i}+1} - \frac{1}{(1+r)^{t_{0i}}} \right) INV_{it_{0i}}. \quad (30)$$

Таким образом, наилучшим проектом будет проект, у которого максимальное значение $R_{it_{0i}}$.

Сопряженная система запишется:

$$\Psi_{it} = \frac{\partial H_t}{\partial FA_i} = \Psi_{it+1} + \frac{CFROI_{it}}{(1+r_i)^t}, \quad (31)$$

$$i = 1, m, t = n_i, t_{0i}.$$

Для сопряженных переменных на правом конце должно выполняться условие трансверсальности:

$$\Psi_{in_i+1} = 0, \quad i = 1, m. \quad (32)$$

Сформулируем численный алгоритм выбора наилучшего инвестиционного решения из m взаимоисключающих альтернативных вариантов в начальный период:

1) подготавливаются исходные данные для m различных проектов: прогнозируемые цены и объем продаж продукции, удельные материальные затраты, количество и средняя зарплата сотрудников для периодов $t=t_{0i}, n_i$;

2) рассчитывается по формуле (10) себестоимость продукции C_{it} каждого i -го проекта для периодов $t=t_{0i}, n_i$;

3) рассчитывается по формуле (20) рентабельность инвестиций в форме денежного потока $CFROI_{it}$ каждого i -го проекта, $t=t_{0i}, n_i$;

4) рассчитываются по формуле (31) сопряженные переменные Ψ_{it+1} для каждого i -го проекта для периодов $t=n_i, t_{0i}$;

5) вычисляются по формуле (30) значения $R_{it_{0i}}$ для каждого i -го проекта;

6) выбирается по формулам (29), (30) наилучший проект с максимальным значением $R_{it_{0i}}$.

3. Аналитическое решение динамической задачи отбора оптимального инвестиционного проекта

Для распространенного случая, когда инвестиции осуществляются однократно, а операционные денежные потоки проектов являются постоянными, возможно аналитическое решение дискретной задачи. В этом случае из формулы

(21) следует, что рентабельности инвестиций проектов постоянны $CFROI_{it} = const$. Получено аналитическое выражение для сопряженной переменной⁵:

$$\Psi_{it+1} = \frac{CFROI_i}{r_i} \left[\frac{1}{(1+r_i)^t} - \frac{1}{(1+r_i)^{n_i}} \right]. \quad (33)$$

С учетом формулы (30) и условий однократных инвестиций в периоде начала осуществления i -го проекта t_{0i} значение $R_{it_{0i}}$ определится:

$$R_{it_{0i}} = \left[CFROI_i \left(\frac{1}{r_i(1+r_i)^{t_{0i}}} - \frac{1}{r_i(1+r_i)^{n_i}} \right) - \frac{1}{(1+r_i)^{t_{0i}}} \right] INV_{i0}. \quad (34)$$

Учитывая, что выражение в круглых скобках в формуле (34) представляет собой приведенную стоимость аннуитета с периода t_{0i} по n_i (коэффициент аннуитета) $B(n_i, r_i, t_{0i})$, запишем:

$$R_{it_{0i}} = \left[CFROI_i B(n_i, r_i, t_{0i}) - \frac{1}{(1+r_i)^{t_{0i}}} \right] INV_{i0}. \quad (35)$$

Таким образом, отбор наилучшего инвестиционного проекта определяется следующими факторами: рентабельностью инвестиций $CFROI_i$, коэффициентом аннуитета $B(n_i, r_i, t_{0i})$, коэффициентом дисконтирования $\frac{1}{(1+r_i)^{t_{0i}}}$, объемом инвестиций INV_{i0} .

Максимум R_{i0} достигается при максимизации произведения рентабельности инвестиций i -го проекта $CFROI_i$ и коэффициента аннуитета $B(n_i, r_i, t_{0i})$ и объема инвестиций INV_{i0} .

При рассмотрении проектов, начинающихся одновременно в начальный период времени $t_{0i}=0$, функция R_{i0} будет иметь выражение:

$$R_{it_{0i}} = [CFROI_i B(n_i, r_i) - 1] INV_{i0}. \quad (36)$$

Из анализа формулы (36) следует, что в случае равенства периодов окончания проектов $n_i=n$, рисков проектов $r_i=r$, объемов инвестирования

проектов $INV_{i0} = INV_0$ наилучшим будет проект с максимальной рентабельностью инвестиций $CFROI_i$.

При рассмотрении проектов с бесконечным горизонтом планирования функция R_0 запишется:

$$R_{i0} = \left[\frac{CFROI_i}{r_i} - 1 \right] INV_{i0}.$$

Заключение

Проблема отбора инвестиционного проекта из нескольких альтернативных вариантов формализована как задача оптимального управления дискретной системой. С использованием дискретного принципа максимума Понтрягина найдена структура оптимального управления. Для случая осуществления однократных инвестиций и постоянных денежных потоков проектов найдено аналитическое решение дискретной задачи. Показано, что отбор наилучшего инвестиционного проекта определяется следующими факторами: рентабельностью инвестиций в форме денежного потока $CFROI_i$, коэффициентом аннуитета $B(n_i, r_i, t_{0i})$, коэффициентом дисконтирования $\frac{1}{(1+r_i)^{t_{0i}}}$, объемом инвестиций INV_{i0} .

¹ Павлов О.В. Принятие инвестиционных решений на основе теории оптимального управления дискретными системами // Проблемы управления Control sciences. 2010. □ 4.

² См.: Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М., 1973; Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике. М., 2003.

³ См.: Брейли Р., Майерс С. Принципы корпоративных финансов. М., 1997; Бирман Г., Шмидт С. Капиталовложения: Экономический анализ инвестиционных проектов. М., 2003; Бриггем Ю., Гасперски Л. Финансовый менеджмент: Полный курс: в 2 т. СПб., 1998; Хелферт Э. Техника финансового анализа. СПб., 2003; Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов: Теория и практика: учеб. пособие. М., 2004.

⁴ Болтянский В.Г. Указ. соч.; Лагоша Б.А. Указ. соч.

⁵ См.: Павлов О.В., Мошкова Т.А. Математические модели оптимального управления инвестициями в реальные активы // Вестн. СГАУ. 2010. □ 3(23).

