Новый метод актуарного оценивания негосударственного пенсионного фонда

© 2011 Е.Г. Крюкова
кандидат технических наук
Волгоградский государственный университет
E-mail:krukova@vlpost.ru

Предложен новый метод актуарного оценивания негосударственного пенсионного фонда с использованием формулы Блэка - Шоулса. Моделирование процессов выплат процессами Кокса позволяет использовать мартингальный подход для нахождения стоимости будущих выплат. Новый метод дает количественную оценку минимально необходимой стоимости капитала фонда в зависимости от величины пенсионных обязательств. Приведены примеры расчетов.

Ключевые слова: актуарное оценивание негосударственного пенсионного фонда, процессы Кокса, формула Блэка - Шоулса.

Введение

Данная статья посвящена применению стохастических методов к оценке достаточности капитала фонда для выполнения обязательств по выплатам. Капитал фонда состоит из резерва покрытия обязательств по выплатам, страхового резерва, имущества для обеспечения уставной деятельности. Актуальность работы определяется все возрастающей ролью негосударственных пенсионных фондов в пенсионном обеспечении лиц пенсионного возраста. Успешное решение данной задачи невозможно без устойчивой эффективной работы негосударственных пенсионных фондов. Устойчивость работы негосударственного пенсионного фонда определяют в результате актуарного оценивания. Действующий метод актуарного оценивания негосударственного пенсионного фонда (далее - фонд) основан на классическом подходе сравнения современной стоимости активов фонда с актуарной приведенной стоимостью математического ожидания выплат на основе принципа финансовой эквивалентности обязательств. Согласно Н. Бауэрсу и др.: "Задача актуарного анализа - найти тот размер пенсионных выплат, при котором их актуарная настоящая стоимость будет равна актуарной настоящей стоимости сделанных взносов"[1]. Действующая методика актуарного оценивания[2] основана на проверке выполнимости уравнения:

$$V_0 = A_0, \qquad (1)$$

где V_0 - современная стоимость активов фонда на момент актуарного оценивания $t = 0$;

A_0 - актуарная приведенная стоимость выплат.

Актуарную приведенную стоимость пожизненных выплат для группы участников в количестве ℓ_x возраста x с годовым размером пенсии на одного участника R находят по формуле

$$A_x = R \cdot \ell_x \cdot \ddot{a}_x,$$

где $\ddot{a}_x = 1 + p_x \cdot \nu + {}_2p_x \cdot \nu^2 + \ldots + {}_{w-x}p_x \cdot \nu^{w-x} = \dfrac{\sum_{j=0}^{w-x} l_{x+j} \cdot \nu^j}{l_x}$ - актуарная приведенная стоимость немедленного пожизненного страхового аннуитета пренумерандо с выплатами размера 1 лицу возраста;

x, ${}_{w-x}p_x$ - вероятность лицу возраста x прожить $w - x$ лет;

w - предельный возраст дожития;

$\nu = \dfrac{1}{1+i}$ - дисконтный множитель по актуарной процентной ставке i.

Актуарную приведенную стоимость выплат рассчитывают на основе актуарных предположений о случайной величине продолжительности предстоящей жизни участников и случайной величине актуарной процентной ставки, которая предполагается детерминированной. Актуарная приведенная стоимость выплат определяется по физической мере P, выбор которой должен предусматривать учет цены риска. Актуарная процентная ставка, согласно Международным стандартам финансовой отчетности, "должна отражать текущие представления рынка о временной стоимости денег и риски, характерные для данного конкретного обязательства"[3].

Критерии количественной оценки риска отклонения случайных величин, участвующих в расчете, от их математических ожиданий действующим методом актуарного оценивания не заданы. Поэтому актуарное оценивание по уравнению (1) приводит к существенной неопределенности результатов вследствие случайных величин актуарной процентной ставки и выплат.

Целью настоящей работы является разработка метода актуарного оценивания минимальной величины капитала фонда в зависимости от величины обязательств по выплатам.

В теории финансов и страховании действует мартингальный принцип расчета справедливой стоимости V_T платежного обязательства X:

$$V_T = E^*\left(\exp\left\{-\int_t^T r(\tau)d\tau\right\}X \middle| F_t\right)$$

по риск-нейтральной мартингальной мере P^*, которая при условии полноты рынка и отсутствия арбитража является единственной[4]. Это дает возможность получить однозначный результат расчета справедливой стоимости обязательства. Принципы определения стоимости страхования с точки зрения принципа финансовой эквивалентности рассмотрены в работах[5]. В работах А.В. Мельникова[6] найдена формула для нетто-премии в случае контрактов чистого дожития исходя из принципа эквивалентности относительно мартингальной меры P^* из модели Блэка - Шоулса. В обзоре А. Дамодарана[7] описано применение метода реальных опционов для расчета справедливой стоимости акций левериджированой фирмы.

Применим метод реальных опционов для актуарного оценивания справедливой стоимости капитала фонда. Отличительными особенностями процесса движения капитала фонда от процессов в страховании и финансах являются:

1) наличие двух случайных величин: случайной величины выплат и случайной величины доходности активов;

2) длительный период наблюдаемого процесса (десятки лет).

В данных условиях оправданно применение равновесных моделей и нормального распределения, которое является предельным для сумм независимых случайных величин.

Применим метод закрытого фонда, когда будущие взносы равны нулю, новых участников нет. Расходы фонда на ведение дела соответствуют его доходам, капитал фонда не расходуется на обеспечение уставной деятельности.

Рассмотрим процесс движения капитала фонда $\{V_t, t \geq 0\}$ как совокупность двух независимых процессов:

1) случайного процесса выплат $\{S_t, t \geq 0\}$, заданного на стохастическом базисе $(\Omega^1, \Im^1, F^1, P^1)$;

2) случайного процесса доходности активов, зависящего от цен рискового актива финансового рынка Блэка - Шоулса, на стохастическом базисе $(\Omega^2, \Im^2, F^2, P^2)$. Тогда процесс движения капитала фонда будем рассматривать на достаточно богатом стохастическом базисе $(\Omega, \Im, F, P) = (\Omega^1 \times \Omega^2, \Im^1 \otimes \Im^2, F^1 \otimes F^2, P^1 \times P^2)$.

Для выполнения поставленной цели необходимо найти номинальную стоимость будущих выплат с учетом вероятности дожития участников за период полного исполнения обязательств фонда.

1. Моделирование случайного процесса выплат фонда

Покажем современные подходы к моделированию выплат[8], которые могут быть использованы для решения поставленной задачи.

Рассмотрим стационарный режим работы фонда, когда большинство участников получают выплаты пенсий и выкупных сумм - случайные одиночные события, независимые друг от друга. События выплат пенсий и выкупных сумм несовместны: один участник в данный момент времени может получить только одну выплату: пенсии, выкупной суммы по причине расторжения пенсионного договора или выкупной суммы на случай смерти.

Результирующий процесс выплат фонда $S^J(t)$ представляет собой сумму процессов выплат пенсий $S^1(t)$ и выкупных сумм с выбытием по причине расторжения $S^2(t)$ и по причине смерти $S^3(t)$:

$$S^{(J)} = \sum_{j=1}^{j=3} S^{(j)}(t), t \geq 0,$$

где $j = 1,2,3$ - причина выбытия.

Процессы выплат по причине j являются случайными по трем причинам: случайного набора моментов времени выплат и их интенсивности и случайного уровня выплат.

Моменты выплат по причине j, образующие последовательность независимых целочисленных случайных величин $\{N_k^j(t), k = 1,..., N_t^j, t \geq 0\}$, где $k = t$ - число скачков процесса выплат по причине j, будем моделировать неоднородным дважды стохастическим процессом Кокса:

$$N^j(t) = N_1(\Lambda^j(t)),$$

где $N_1(t), t \ge 0$ - однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью, или стандартный пуассоновский процесс;

$\Lambda^j(t)$, $t > 0$ - случайный независимый от $N_1(t), t \ge 0$ процесс с неубывающими непрерывными справа траекториями, удовлетворяющий условиям $\Lambda(0) = 0$;

$P(\Lambda(t) < \infty) = 1$ при каждом $0 < t < \infty$. Накопленная интенсивность

$$\Lambda^j(t) = \int_0^t \lambda^j(\tau) d(\tau), t \ge 0,$$

где $\lambda^j(t)$ - мгновенная интенсивность пуассоновского процесса в точке t.

Найдем функцию распределения $F(x,\lambda)$ процесса числа выплат $\{N_k^j(t), k = 1,..., N_t^j, t \ge 0\}$.

О п р е д е л е н и е. Пусть функция $F(x,\lambda)$ определена на множестве $R \times \mathrm{M}$, где $\mathrm{M} \in R^m$, при $m = 3$ и множество M снабжено борелевской σ-алгеброй $B(M)$, как функция распределения аргумента x при каждом фиксированном λ и функция $F(x,\lambda)$ измерима по λ при каждом фиксированном x, т.е. $\{\lambda : F(x,\lambda) < c\} \in \mathrm{B(M)}$ при каждых $x \in R$ и $c \in R$. Пусть $U(\lambda)$ - вероятностная мера, определенная на измеримом пространстве $(\mathrm{M}, \mathrm{B(M)})$: $\mathrm{B(M)} = \sigma\{\lambda \in \mathrm{M}, \lambda(t) \le x, t \ge 0, x < \infty\}$; $\Pi_\lambda\{\mathrm{B}\}$ - вероятностная мера, определенная на измеримом пространстве $((\mathrm{N}, \mathrm{B(N)})$: $\mathrm{B}(N) = \sigma\{k \in N, k(t) \le y, t \ge 0, y < \infty\}$, $N_S = \{k \in \mathrm{N}, k(t) - k(t-1) = 0 \text{или} 1\} \in \mathrm{B(N)}$.

Тогда $F(x,\lambda)$ есть функция распределения процесса $N_k^j(t)$:

$$F(x,\lambda) = \mathrm{P}\{\Lambda \le x, N \in \mathrm{B}\} = \int_0^x \Pi_\lambda\{\mathrm{B}\} dU_\lambda .$$

Тогда процесс выплат по причине j будет *обобщенным процессом Кокса*. В силу стохастической независимости процессов моментов выплат и уровня выплат распределение процесса выплат по причине j имеет вид:

$$F_Y(y) = \mathrm{P}\{S^j(Y^j) \le y\} = \int_0^\infty \Theta_t^j(y) dU(\lambda^j),$$

где функция распределения $\Theta_t^j(y)$ в случае сложно-пуассоновского распределения имеет вид

$$\Theta_t^j(y) = \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot F^{*k}(y),$$

где $F^{*k}(x)$ - к- кратная свертка уровня выплат.

Тогда процесс совокупного числа выплат есть $N^J(t) = N^J{}_1(\chi_n(t))$, для которого в силу бесконечной делимости смешанного пуассоновского процесса выполнено $N_t^J = \sum_{j=1}^3 N_t^j$, $\chi_n(t) = \sum_{j=1}^3 \Lambda_t^j$.

Совокупный процесс выплат $S^J(t)$ представим в виде суммы обобщенных процессов Кокса, моделирующих выплаты по причине j.

Согласно представленной модели выплат искомая функция распределения совокупного процесса выплат будет смесью сложных распределений совокупности трех смешанных пуассоновских процессов с изменяющейся интенсивностью (процессов Кокса).

Лундбергом (1964)[9] доказана теорема, согласно которой для *смешанного пуассоновского процесса $\chi_n(t)$ будет мартингалом относительно фильтрации F^N*. Смешанный пуассоновский процесс по определению является стационарным, т.е. частным случаем процесса Кокса с $\Lambda(t) = \Lambda t$. Заметим, что теорема Лундберга сформулирована для интенсивности $\chi_n(t)$, которая является функцией времени. Кроме того, процесс Кокса $N^J(t)$ марковский, так же как и смешанный пуассоновский процесс, поэтому относительно фильтрации F_t^N имеем:

$$E[\chi_{N(t)}(t) | N(s) = m] = E[\chi_{N(t)}(t) | F_t^N] = \chi_m(s),$$

для $0 < s \le t$ и $m = 0,1,...$

Таким образом, случайный процесс выплат, моделируемый обобщенным процессом Кокса $N^J(t)$, будет мартингалом относительно фильтрации F^N. *Поэтому ожидаемое значение будущих выплат разумно находить методом исторического моделирования наблюдаемой функции распределения за соответствующий предшествующий период времени.*

Рассмотрим результаты расчетов процессов выплат на основе следующих предположений:

1) фонд выплачивает пожизненные пенсии группе участников в количестве ℓ_x одного воз-

раста x на момент актуарного оценивания $t = 0$ до полного вымирания группы в момент исполнения обязательств T, когда $\ell_w = 0$, где w - предельный возраст дожития, равный 83 годам;

2) размер выплат каждому участнику равен 20 тыс. руб./год;

3) единственной причиной выбытия является смерть участника.

Интенсивность смертности различных групп населения, особенно для лиц пенсионного возраста, существенно зависит от места проживания, профессиональной принадлежности, года наблюдения. Поэтому процесс смертности необходимо моделировать на основании статистических данных для исследуемой группы участников[10].

Пример 1. Результаты расчетов номинальной стоимости выплат с учетом вероятности дожития для группы участников фонда А представлены в табл. 1.

В табл. 1 приведены данные процесса уменьшения числа участников фонда А и, соответственно, сумм выплат с увеличением возраста от момента актуарного оценивания $t = 0$, когда возраст участников группы $x = 75$ лет, до предельного возраста дожития $w = 83$ года при $t = 8$.

Пример 2. Результаты расчетов номинальной стоимости выплат с учетом вероятности дожития для группы участников фонда Б представлены в табл. 2.

Данные табл. 1, 2 показывают, что интенсивность процесса числа выплат существенно

Таблица 1. **Динамика количества участников и номинальной стоимости выплат с учетом вероятности дожития за период полного выполнения обязательств фонда А по выплатам**

№ года	Возраст, лет	Вероятность дожития	Количество участников, чел.	Номинальная стоимость выплат, тыс. руб.	Интенсивность смертности участников
t	x	${}_t p_x$	ℓ_x	S_t	$\overline{\mu}_t$
0	75	1,00	3585	71 700	0
1	76	0,85	3051	61 027	0,15
2	77	0,71	2538	50 770	0,17
3	78	0,57	2048	40 963	0,19
4	79	0,44	1583	31 651	0,23
5	80	0,32	1144	22 876	0,28
6	81	0,20	733	14 670	0,36
7	82	0,10	352	7 042	0,52
8	83	0,00	0	0	1,00
Итого				**300 700**	

Таблица 2. **Динамика количества участников и номинальной стоимости выплат с учетом вероятности дожития за период полного выполнения обязательств фонда Б по выплатам**

№ года	Возраст, лет	Вероятность дожития	Количество участников, чел.	Номинальная стоимость выплат, тыс. руб.	Интенсивность смертности участников
t	x	${}_t p_x$	ℓ_x	S_t	$\overline{\mu}_t$
0	70	1,00	40 032	800 640	0
1	71	0,91	36 325	726 499	0,09
2	72	0,82	32 633	652 654	0,10
3	73	0,73	29 072	581 436	0,11
4	74	0,64	25 560	511 203	0,12
5	75	0,55	22 147	442 939	0,13
6	76	0,47	18 850	377 007	0,15
7	77	0,39	15 682	313 637	0,17
8	78	0,32	12 653	253 057	0,19
9	79	0,24	9 777	195 530	0,23
10	80	0,18	7 066	141 320	0,28
11	81	0,11	4 531	90 624	0,36
12	82	0,05	2 175	43 506	0,52
13	83	0,00	0	0	1,00
Итого				**5 130 052**	

увеличивается с возрастом в наблюдаемом возрастном интервале, поэтому предположение о постоянной интенсивности процесса смертности участников неприменимо для лиц пенсионного возраста. Процесс числа выплат необходимо моделировать неоднородным дважды стохастическим процессом Кокса.

2. Определение справедливой стоимости капитала фонда

Для актуарных расчетов на длительном интервале времени разумно использовать равновесные модели. Такой равновесной моделью является модель Блэка - Шоулса определения стоимости финансовых обязательств. Модель Блэка - Шоулса основана на модели случайного блуждания, предполагающей нормальное распределение доходностей рыночных цен акций.

В работах Б. Мандельброта[11], Е. Петерса[12], А.Н. Ширяева[13] показано, что модель случайного блуждания служит грубым приближением реального процесса движения цен акций. Наблюдаемые распределения доходностей рыночных цен акций имеют более острые вершины и “тяжелые хвосты”, чем нормальное распределение, что говорит о процессе с “долгой памятью”, генерируемом нелинейным стохастическим процессом. Однако такой процесс характерен для среднесрочных периодов инвестирования до 60 рабочих дней.

В работе[14] выполнена оценка экспоненты Харста для временных рядов доходностей цен закрытия индекса РТС в зависимости от продолжительности периода наблюдений и установлено, что для временных рядов доходностей с длительным периодом наблюдения (более 60 рабочих дней) значение экспоненты Харста близко к 0,5, что соответствует функции нормального распределения доходностей рыночных цен. Это позволяет утверждать, что для актуарного оценивания с периодом исполнения обязательств несколько лет применима формула Блэка - Шоулса, использующая функцию нормального распределения и процесс движения цены активов на длительном диапазоне времени подчиняется модели (2).

Для актуарного оценивания справедливой стоимости капитала фонда рассмотрим процесс риска капитала фонда $\{V_t\}_{t\geq 0}$ за период времени $t \in [0, T]$ как базовый актив опциона на покупку выплат K. Капитал фонда инвестирован в активы, соответствующие модели (B, S) - рынка. Тогда процесс движения капитала фонда за период актуарного оценивания порожден исключительно изменением стоимости капитала в результате его размещения в активы и подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению:

$$\frac{dV_t}{V_t} = rdt + \sigma dW, \tag{2}$$

где r - риск - нейтральная процентная ставка, соответствующая сроку исполнения обязательств фонда;

σ - стандартное отклонение доходности базового актива (капитала фонда);

W - винеровский процесс.

Риск-нейтральная процентная ставка, соответствующая доходности государственных облигаций со сроком погашения, равным сроку исполнения обязательств фонда, равна 10 %. Количественный учет цены риска в условиях нормального распределения обеспечивает величина стандартного отклонения доходности портфеля активов фонда, значение которой равно 10 %. При сделанных предположениях область допустимых значений актуарной процентной ставки лежит в диапазоне 0-20 %, что соответствует множеству значений доходности капитала фонда от размещения в активы (B, S) - рынка.

Формула Блэка - Шоулса для расчета справедливой стоимости капитала фонда C_T имеет вид

$$C_T = V_0\Phi\left(\frac{\ln\frac{V_0}{K} + T(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right) -$$

$$- Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{V_0}{K} + T(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right), \tag{3}$$

где V_0 - современная стоимость капитала фонда (базового актива) на дату оценивания;

Φ - функция стандартного нормального распределения;

T - срок исполнения обязательств по будущим выплатам, равный средневзвешенному сроку полного выполнения обязательств;

σ^2 - дисперсия доходности базового актива (активов капитала фонда);

K - номинальная стоимость будущих выплат с учетом вероятности дожития на дату полного исполнения обязательств.

Дисперсию доходности активов капитала фонда находили по формуле

$$\sigma_p^2 = w_E^2\sigma_E^2 + w_D^2\sigma_D^2 + 2\rho_{ED}w_E w_D \sigma_E \sigma_D,$$

где w_E, w_D - доли акций и облигаций, соответственно;

σ_E^2, σ_D^2 - дисперсии доходности акций и облигаций, соответственно;

σ_E, σ_D - стандартное отклонение доходности акций и облигаций, соответственно;

ρ_{ED} - коэффициент корреляции доходности акций и облигаций.

При следующих данных: $w_E = 0{,}3$; $w_D = 0{,}7$; $\sigma_E = 0{,}17$; $\sigma_D = 0{,}05$; $\rho_{ED} = 0{,}5$ дисперсия и стандартное отклонение портфеля активов фонда равны, соответственно, $\sigma_p^2 = 0{,}01$; $\sigma_p = 0{,}10$.

Для рассмотренной модели капитала фонда с выплатами

$$S_t = \max\{S_T, K\}$$

формула для справедливой стоимости капитала фонда исходя из принципа эквивалентности относительно мартингальной меры P^* из модели Блэка - Шоулса имеет вид[15]:

$$V_T = E \cdot e^{-rT} \max\{S_T, K\}. \qquad (4)$$

Поскольку $\max\{S_T, K\} = K + \max\{S_T - K, 0\}$, постольку, применяя формулу Блэка - Шоулса (3), преобразуем формулу (4) для справедливой стоимости капитала к виду

$$V_T = Ke^{-rT} + V_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) = K_0 + C_T, \qquad (5)$$

где K_0 - актуарная приведенная стоимость выплат на дату актуарного оценивания $t = 0$;

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(V_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Пример 3. Рассчитаем справедливую стоимость капитала фонда А по формуле Блэка - Шоулса (5) при значениях параметров: V_0=320 млн. руб., r =0,10, σ =0,10, σ^2 =0,02, K=300 700 тыс. руб., T=8 лет.

По формуле Блэка - Шоулса (3) получаем:

$d_+ = 3{,}19$, Φ_+=0,9993, $d_- = 2{,}91$, $\Phi_- = 0{,}9982$.

C_T= 320000 · 0,9993 – 300700 · $e^{-0{,}10 \cdot 8}$ · 0,9982 = = 184 906 (тыс. руб.).

Полученная по формуле Блэка - Шоулса расчетная оценка приведенной на дату актуарного оценивания номинальной стоимости выплат для фонда А, которая обеспечена имеющимся капиталом, равна

$$\hat{K}_0 = V_0 - C_T = 320\,000 - 184\,906 = 135\,094 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Приведенная на дату актуарного оценивания номинальная стоимость выплат фонда А, которую требуется обеспечить, равна:

$$K_0 = K \cdot e^{-rT} = 300700 \cdot e^{-0{,}10\cdot 8} = 135\,113 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Поскольку расчетная оценка стоимости выплат меньше требуемой, постольку имеющегося капитала 320 000 тыс. руб. недостаточно.

Расчеты по формуле Блэка - Шоулса позволяют установить минимально необходимую стоимость капитала фонда А, достаточную для выполнения обязательств по выплатам. Результаты расчетов для различной величины имеющегося капитала фонда А представлены в табл. 3.

Таблица 3. **Оценка справедливой стоимости капитала фонда А по формуле Блэка - Шоулса**

V_0	C_T	$\hat{K}_0$	K_0	**Результат**
320 000	184 906	135 094	135 113	Капитала недостаточно
360 000	**224 878**	**135 118**	**135 113**	Капитала достаточно
400 000	264 861	135 139	135 113	Капитала достаточно

Минимально необходимая стоимость капитала фонда А составляет **360 000 тыс. руб.**

Проведем актуарное оценивание фонда А согласно действующему законодательству[16].

1. Актуарная стоимость выплат, приведенная по актуарной процентной ставке 10 %, на дату актуарного оценивания равна $A_{75} = R \cdot \ell_{75} \cdot \ddot{a}_{75} = 3585 \cdot 20 \cdot 3{,}4537 =$ 247 631 (тыс. руб.).

2. Минимальная нормативная величина страхового резерва установлена законодательством[17] в размере 5 % актуарной приведенной стоимости выплат и составляет $247631 \cdot 0{,}05 = 12\,382$ (тыс. руб.).

3. Минимальная нормативная величина денежной оценки имущества для обеспечения ус-

тавной деятельности согласно законодательству равна 100 000 тыс. руб.

Тогда минимально необходимая стоимость капитала по действующим нормативам актуарного оценивания равна $247631 + 12382 + 100000 =$ = 360 013 (тыс. руб.), что соответствует оценке по формуле Блэка - Шоулса.

Однако действующим законодательством не установлена необходимая величина имущества для обеспечения уставной деятельности в зависимости от величины принятых фондом обязательств. Рассмотрим фонд Б с большей величиной обязательств.

Пример 4. Рассчитаем справедливую стоимость капитала фонда Б по формуле Блэка - Шоулса (5) при значениях параметров: V_0 = 4 000 000 тыс. руб., r =0,10, σ =0,10, σ^2 =0,002, K=5 130 052 тыс. руб. T=13 лет.

По формуле Блэка - Шоулса (3) получаем: $d_+ = 3{,}10$, Φ_+=0,9990, $d_- = 2{,}74$, $\Phi_- = 0{,}9969$.

$C_T = 4000000 \cdot 0{,}9990 - 5130052 \cdot e^{-0{,}10 \cdot 13} \cdot 0{,}9969 =$ = 2 602 232 (тыс. руб.).

Полученная по формуле Блэка - Шоулса расчетная оценка приведенной на дату актуарного оценивания номинальной стоимости выплат для фонда Б, которая обеспечена имеющимся капиталом, равна:

$$K_0 = V_0 - C_T = 4\,000\,000 - 2\,602\,232 = 1\,397\,768 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Приведенная на дату актуарного оценивания номинальная стоимость выплат фонда Б, которую требуется обеспечить, равна:

$$K_0 = K \cdot e^{-rT} = 5130052 \cdot e^{-0{,}10 \cdot 13} = 1\,398\,102 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Поскольку расчетная оценка стоимости выплат меньше требуемой, постольку имеющегося капитала 4 000 000 тыс. руб. недостаточно.

Расчеты по формуле Блэка - Шоулса позволяют установить минимально необходимую стоимость капитала фонда Б, достаточную для выполнения обязательств по выплатам. Результаты расчетов для различной величины имеющегося капитала фонда Б представлены в табл. 4.

Минимально необходимая стоимость капитала фонда Б составляет **5 100 000 тыс. руб**.

Проведем актуарное оценивание фонда Б согласно действующему законодательству[18].

1. Актуарная стоимость выплат, приведенная по актуарной процентной ставке 10 %, на дату актуарного оценивания равна: $A_{70} = R \cdot \ell_{70} \cdot \ddot{a}_{70} = 40032 \cdot 20 \cdot 4{,}6667 =$ 3 736 351 (тыс. руб.).
2. Минимальная нормативная величина страхового резерва в размере 5% актуарной приведенной стоимости выплат составляет: $3736351 \cdot 0{,}05 =$ 186 818 (тыс. руб.).
3. Минимальная нормативная величина денежной оценки имущества для обеспечения уставной деятельности равна 100 000 тыс. руб.

Тогда минимальная достаточная величина капитала по действующим нормативам актуарного оценивания равна: $3736351 + 186818 + 100000 =$ = 4 023 169 (тыс. руб.). Согласно оценке по формуле Блэка - Шоулса, этой величины капитала недостаточно для выполнения обязательств по выплатам. Расчеты по формуле Блэка - Шоулса дают большую величину капитала 5 100 000 (тыс. руб.). Нормативная величина капитала 100 000 тыс. руб. недостаточна для фонда с большим объемом обязательств даже для покрытия расходов крупного фонда. По законодательству[19] страховой резерв и имущество для обеспечения уставной деятельности могут быть использованы для покрытия недостатка стоимости активов для выполнения обязательств по выплатам.

Проверим полученные результаты в случае ликвидации фонда. Пусть доля портфеля акций в активах фонда составляет 30 %, облигаций-70 %. В результате неблагоприятной инвестиционной ситуации (например, кризис 2008 г.) рыночная стоимость акций упала на 40 %, стоимость облигаций эмитентов, объявивших дефолт, - 20 % от стоимости портфеля облигаций.

Пример 5. Рассмотрим случай ликвидации фонда А с капиталом 360 000 тыс. руб. (весь капитал инвестирован в активы), стоимостью обязательств по выплатам - 247 631 тыс. руб., страховым резервом - 12 382 тыс. руб., имуществом для обеспечения уставной деятельности - 100 000 тыс.

Таблица 4. **Оценка справедливой стоимости капитала фонда Б по формуле Блэка - Шоулса**

V_0	C_T	$\hat{K}_0$	K_0	**Результат**
4 000 000	2 602 232	1 397 768	1 397 102	Капитала недостаточно
5 100 000	**3 701 807**	**1 398 193**	**1 398 102**	**Капитала достаточно**
5 300 000	3 901 647	1 398 953	1 398 102	Капитала достаточно

руб. В результате кризиса уменьшение стоимости активов составило 93 600 тыс. руб., в том числе:

1) из-за падения рыночной стоимости акций: $360000 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 =$43 200 тыс. руб.;

2) из-за дефолтов эмитентов облигаций: $360000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 =$50 400 тыс. руб.

Оставшийся капитал в размере 360 000 - 93 600 = 266 400 тыс. руб. достаточен для выполнения обязательств по выплатам в размере 247 631 тыс. руб.

Пример 6. Рассмотрим случай ликвидации фонда Б с капиталом 4 023 169 тыс. руб. (весь капитал инвестирован в активы), стоимостью обязательств по выплатам - 3 736 351 тыс. руб., страховым резервом - 186 818 тыс. руб., имуществом для обеспечения уставной деятельности - 100 000 тыс. руб. В результате кризиса уменьшение стоимости активов составило 1 046 024 тыс. руб., в том числе:

1) из-за падения рыночной стоимости акций: $4023169 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 =$482 780 тыс. руб.;

2) из-за дефолтов эмитентов облигаций: $4023169 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 =$563 244 тыс. руб.

Оставшийся капитал в размере 4 023 169 - 1 046 024 = 2 977 145 тыс. руб. недостаточен для выполнения обязательств по выплатам в размере 3 736 351 тыс. руб.

Если капитал фонда Б сформирован в размере 5 100 000 тыс. руб. (достаточный капитал по формуле Блэка - Шоулса), то при тех же условиях уменьшение стоимости активов составит 1 326 000 тыс. руб., в том числе:

1) из-за падения рыночной стоимости акций: $5100000 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 =$ 612 000 тыс. руб.;

2) из-за дефолтов эмитентов облигаций: $5100000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 =$714 000 тыс. руб.

Оставшийся капитал в размере 5100 000-1 326 000 = 3 774 000 тыс. руб. достаточен для выполнения обязательств по выплатам в размере 3 736 351 тыс. руб.

Таким образом, ***применение формулы Блэка - Шоулса позволяет рассчитать минимально необходимую стоимость капитала фонда в зависимости от величины пенсионных обязательств.***

Выводы

Разработан новый метод актуарного оценивания негосударственного пенсионного фонда. Новизна метода заключается в применении формулы Блэка - Шоулса для оценки справедливой стоимости капитала фонда. Практическая ценность метода состоит в возможности количественной оценки минимально необходимой стоимости капитала фонда в зависимости от величины пенсионных обязательств. Показано, что применение современных методов стохастического анализа для моделирования процесса будущих выплат в виде обобщенных процессов Кокса позволяет найти номинальную стоимость будущих выплат с учетом вероятности дожития.

---

[1] Актуарная математика / Н. Бауэс [и др.]. М., 2001. С. 536.

[2] См.: О порядке проведения актуарного оценивания деятельности негосударственных пенсионных фондов по негосударственному пенсионному обеспечению: постановление Правительства РФ от 4 февр. 2009 г. № 95; Об утверждении требований к порядку оформления результатов актуарного оценивания деятельности негосударственных пенсионных фондов: приказ Инспекции негосударственных пенсионных фондов при Минтруде РФ от 12 февр. 2001 г. № 15.

[3] Оценочные резервы, условные обязательства и условные активы: междунар. стандарт финансовой отчетности МСФО 37.

[4] *Эмбрехтс П.* Актуарный и финансовый подходы к расчетам стоимости в страховании // Обозрение прикладной и промышленной математики. Серия финансовая и страховая математика. 1998. Т. 5. В. 1. С. 6-22.

[5] См.: *Эмбрехтс П.* Указ. соч.; *Buhlmann H.* Mathematical Methods in Risk Theory. 2 print. N.Y.,1970; *Ширяев А.Н.* Стохастические проблемы финансовой математики // Обозрение прикладной и промышленной математики. Серия финансовая и страховая математика. 1994. Т. 1. С. 780-820; *Ротарь В.И., Бенинг В.Е.* Введение в математическую теорию страхования // Обозрение прикладной и промышленной математики. Серия финансовая и страховая математика. 1994. Т. 1, в. 5. С. 698-779; *Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.* Математические основы теории риска. М., 2007.

[6] См.: *Мельников А.В.* Гибкие схемы страхования. Расчеты схем гибкого страхования // Экономический журнал ВШЭ. 2003. № 2. С. 139 - 172; *Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств. М., 2001.

[7] *Damodaran A.* Option Pricing Theory and Applications // Option.pdf.63 p.

[8] См.: *Buhlmann H.* Op. cit.; *Эмбрехтс П.* Указ. соч.; *Гранделл Я.* Смешанные пуассоновские процессы // Обозрение прикладной и промышленной математики, серия финансовая и страховая математика. 1998. Т. 5. В. 1. С. 44 - 65; *Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.* Указ. соч.

[9] См.: *Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.* Указ. соч.; *Гранделл Я.* Указ. соч.

[10] *Крюкова Е.Г.* Моделирование случайного процесса смертности. VII Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике. Тезисы докладов. Весенняя сессия. Ч. IV // Обозрение прикладной и промышленной математики, серия фи-

нансовая и страховая математика. 2006. Т. 13, в. 4. С. 658 - 659.

[11] *Mandelbrot B.B.* Fractals and Scaling in Finance. Discontinuality, Concentrarion, Risk. N.Y., 1997.

[12] *Peters E.E.* Fractal Market Analysis. Applying Chaos Theory to Investment & Economics. N.Y., 1994.

[13] *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. М., 1998.

[14] *Крюкова Е.Г.* Фрактальный процесс динамики финансовых индексов российского фондового рынка. VIII Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике. Осенняя сессия. Тезисы докладов. Ч. I // Обозрение прикладной и промышленной математики. Серия финансовая и страховая математика. 2008. Т. 15, в. 2. С. 322 - 324.

[15] *Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л.* Указ. соч. С. 221.

[16] См.: О порядке проведения актуарного оценивания деятельности негосударственных пенсионных фондов по негосударственному пенсионному обеспечению: постановление Правительства РФ от 4 февр. 2009 г. № 95; О негосударственных пенсионных фондах: федер. закон от 7 мая 1998 г. № 75-ФЗ.

[17] О негосударственных пенсионных фондах.

[18] См.: О порядке проведения актуарного оценивания деятельности негосударственных пенсионных фондов по негосударственному пенсионному обеспечению; О негосударственных пенсионных фондах.

[19] О негосударственных пенсионных фондах.

Поступила в редакцию 05.10.2011 г.