Математическая модель экономических последствий вооруженного противостояния неравных по силе противников

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: zeldner@inecon.ru

Предлагаемая математическая модель позволяет прогнозировать ожидания численности потерь, а также расходы на ведение боевых действий. Математическое описание состоит из уравнений Ланчестера и уравнений марковского процесса с доходами для обоих противников. Рассмотрен пример - математическая модель длительного вооруженного конфликта. Дано решение его для стационарного состояния конфликта.

Ключевые слова: динамика конфликта, уравнения динамики средних Ланчестера, марковский процесс с доходами (МПД).

Развитие науки и техники в конце XX в., появление новых видов оружия, огромные достижения в области информационных технологий вызвали к жизни новые теоретические предложения по способам ведения войны. Одним из таких предложений является концепция сетецентрической войны, которая предполагает создание единой информационной сети для всех родов войск, что должно повысить боеспособность как всей армии, так и каждого ее соединения. Идея сетецентрической войны была выдвинута в США, потому что там создана платная армия, сравнительно малочисленная, и потому что США сейчас обладают колоссальным технологическим преимуществом. В работе А. Храмчихина отмечается: "Классической крупномасштабной войны, подразумевающей высокие потери, США не могут вести ни одной. Наемная армия не выдержит, в нее перестанут идти люди"[1].

Все войны последнего времени, проводимые США и НАТО, имеют черты сетецентрической войны, поэтому представляется своевременной попытка построения математической модели такого рода войны, на которой было бы возможным изучение ее характеристик. Имеет смысл рассматривать математическую модель войны между нападающей развитой страной и обороняющейся малой страной, ведущей партизанскую войну. Математическая модель этой фазы войны должна учитывать наличие разной информированности сторон. Кроме того, математическая модель должна учитывать цели сторон в этой войне и ее длительность.

Практика войн, ведущихся странами США и НАТО, показывает, что такие войны идут длительное время, исчисляемое годами. Вследствие этого математическая модель войны должна быть динамической, охватывающей длительный период времени. Такая модель позволит оценивать интегральные показатели, отражающие действия всех подразделений каждой стороны в течение любого заданного промежутка времени. Математические модели, которые удовлетворяют описанным выше условиям, основаны на уравнениях Ланчестера в различных модификациях[2]. Для случая партизанской войны может быть применена модель, когда одна сторона имеет полную информацию о результатах своих действий (партизаны), а другая не имеет точных знаний о положении противной стороны и ведет так называемый огонь "по площадям", иногда подобного рода уравнения называют уравнениями Вольтерра. Для определения экономических потерь (потери в вооружении, боеприпасах, техники, расходах на личный состав и т.п.) предложены уравнения, полученные на основе теории марковских процессов с доходами (МПД), которые дополняют уравнения Ланчестера[3]. Очень важным и трудным вопросом при создании математической модели для конкретного случая является определение числовых коэффициентов в уравнениях Ланчестера, Вольтерра и уравнениях МПД. Для случая партизанской войны для определения коэффициентов может быть использован опыт войн в Ираке, Афганистане. Методика определения этих коэффициентов на основании опыта Второй мировой войны используется в работах[4] и др. Разработанные математические модели позволяют прогнозировать математические ожидания численности потерь войск в боевых единицах обеих сторон в функции времени, а также в расходах на ведение боевых действий.

Математическая модель длительного вооруженного конфликта между наступающей и обороняющейся сторонами, обладающими различной информацией

Рассмотрим противостояние двух сторон, которые обладают различными техническими и экономическими возможностями для ведения сетецентрической войны. Примеров таких войн имеется достаточное количество - это войны между НАТО и малыми странами. В этих случаях НАТО ведет сетецентрические войны при огромном информационном превосходстве, и единственной возможностью для малой страны является переход к партизанской войне. Тогда можно предположить, что информационное превосходство переходит к партизанам. Этот пример можно исследовать с помощью модели войны двух противников, имеющих разную информацию. С математической точки зрения такая модель может быть построена с помощью комбинации уравнений Ланчестера и Вольтерра.

Рассмотрим две стороны конфликта X и Y. Предположим, что каждая из группировок состоит из однородных боевых единиц, каждая боевая единица производит пуассоновский поток выстрелов, если только она не поражена, поток выстрелов боевой единицы распределен равномерно по боевым единицам противоположной стороны, причем одним выстрелом можно поразить не более одной боевой единицы, суммарная боевая мощь каждой группировки в каждый момент времени пропорциональна математическому ожиданию количества сохранившихся боевых единиц. Однако к стороне X информация о поражении целей не поступает, и она перераспределение огня не производит. Сторона Y имеет полную информацию, т.е. в случае поражения боевой единицы она производит мгновенный перенос стрельбы на другую боевую единицу противника.

При данных предположениях для стороны X можно написать классическое уравнение Ланчестера.

$$\frac{dx(t)}{dt} = -by(t) + u(t), \qquad (1)$$

где b[1/единица времени] - удельные потери стороны X от одной боевой единицы стороны Y;
$x(t)$, $y(t)$ - математическое ожидание численности сторон X, Y в момент времени t;
$u(t)$ - численность вводимых резервов в момент времени t стороны X.

Выведем уравнение для стороны Y. Будем считать, что сторона X не имеет информации о потерях стороны Y. Тогда следует применить уравнение Вольтерра. В этом случае уравнение будет иметь вид

$$\frac{dy(t)}{dt} = \alpha a(t)x(t) + v(t), \qquad (2)$$

где $v(t)$ - численность резервов, вводимых стороной Y, в момент времени t;
$a(t)$ [1/единица времени] - удельные потери стороны Y от боевой единицы стороны X;
α - вероятность того, что удельные потери стороны Y могут быть уменьшены из-за возможного неоднократного попадания стороны X в одну и ту же цель.

Этот эффект можно объяснить тем, что стрельба ведется по площади, на которой расположены цели. Такое уравнение может применяться, когда одна сторона наступает, а другая обороняется. Другой случай, когда сторона Y представлена партизанами, местоположение которых неизвестно, а известен только район их нахождения.

Для боя без подвода резервов обычно считают $\alpha = \frac{y(t)}{N}$, где $y(t)$ - математическое ожидание численности боевых единиц стороны Y на момент времени t, а N - численность боевых единиц стороны Y в начале боя.

Для случая длительного боя с непрерывным подводом резервов $v(t)$ определим в дальнейшем величину α иначе, так как величина N будет меняться в течение военных действий. Следуя[5], будем подвод резервов моделировать по закону непрерывной обратной связи, пропорционально разности между желаемыми x_T, y_T на время T окончания переходного процесса и фактическими значениями $x(t)$, $y(t)$, т.е. будем считать:

$$u(t) = K_x(x_T - x(t)),$$
$$v(t) = K_y(y_T - y(t)),$$

где x_T, y_T - заданные желаемые значения численности соответствующих сторон;
K_x, K_y - коэффициенты усиления, определяющие скорость ввода - вывода войск соответствующих сторон, а также потери сторон.

При данных обозначениях получим математическую модель конфликта сторон, обладающих разной информацией.

$$\frac{dx(t)}{dt} = -by(t) + K_x(x_T - x(t)), \qquad (3)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\alpha(t)ax(t) + K_y(y_T - y(t)). \qquad (4)$$

Поскольку уравнения (3), (4) выведены для условий длительных военных действий, в течение которых многократно подводятся резервы, постольку использование формулы $\alpha = \dfrac{y(t)}{N}$ невозможно, так как нельзя зафиксировать *N*. Поэтому предлагается данный коэффициент для значений его меньших единицы определить формулой

$$\alpha = \frac{y(t)}{y_T} \text{ при } \frac{y(t)}{y_T} \le 1, \tag{5}$$

$$\alpha = 1 \text{ при } \frac{y(t)}{y_T} \ge 1. \tag{6}$$

В пользу такого определения можно привести следующие соображения. Пусть $\alpha \le 1$. Это означает, что эффективность стрельбы понижается, т.е. стрельба ведется не по цели, а по площади, на которой находятся эти цели. Пусть $\alpha \ge 1$. Это значит, что сторона *Y* выводит часть своих войск из боя.

Для того чтобы война между сторонами проходила длительное время, необходимо выполнение свойства устойчивости в малом, в противном случае война быстро закончится поражением одного из противников. Для исследования устойчивости в малом уравнений (3), (4) сделаем подстановку $y(t) = \exp(u(t))$, т.е. $u(t)=lny(t)$. Одновременно будем считать, что a, b, K_x, K_y постоянны. Тогда с учетом (5) эти уравнения запишутся в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = -b\exp(u(t)) - K_x x + K_x x_T,$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{ax}{y_T} - K_y + K_y y_T \exp(-u(t)). \tag{7}$$

Линеаризуем данную систему относительно некоторой точки u_0, т.е. разложим функцию $exp(u)$ в ряд Тейлора в точке u_0. Получаем линейную систему, из которой вытекает характеристическое уравнение

$$s^2 + s(K_y y_T \exp(-u_0) + K_x) +$$
$$+ (K_x K_y y_T \exp(-u_0) - \frac{ab}{y_T}\exp(u_0)) = 0.$$

Для того чтобы решение линеаризованной системы (7) было устойчивым, необходима и достаточна положительность коэффициентов этого уравнения. Коэффициент при s положителен, так как все параметры, входящие в него, положительны. Второй коэффициент положителен, если выполняется условие

$$\frac{K_x K_y}{ab} \ge \frac{y_0^2}{y_T^2}. \tag{8}$$

Если исследовать процесс на устойчивость в точке стационарности, в которой $\dfrac{y_0}{y_T} \approx 1$, то условием устойчивости является неравенство $\dfrac{K_x K_y}{ab} \ge 1$, которое одновременно при выполнении условия (6) является критерием устойчивости для уравнения (7), так как в этом случае уравнение (7) становится линейным с постоянными коэффициентами.

Модель затрат сторон на ведение боевых действий, основанная на теории марковских процессов с доходами

Пусть имеются две группировки противоборствующих сторон *X* и *Y* первоначальной численностью N_1 и N_2, однородных внутри каждой группировки боевых единиц (не обязательно однородных между группировками *X* и *Y*), которые находятся между собой в состоянии конфликта. Под боевой единицей будем понимать некий эталон, который зависит от вида рассматриваемых боевых действий и их масштаба. Подробно выбор эталонной боевой единицы рассмотрен в работе[6].

Для простоты рассмотрим вывод уравнений марковского процесса с доходами для случая коэффициента $\alpha = 1$ в уравнении (4).

Предположим, что огонь ведется только по непораженным целям, перенос с пораженной боевой единицы на непораженную производится немедленно. Огонь сторон распределен равномерно по непораженным боевым единицам, одним выстрелом не может быть поражена более чем одна единица. При этих предположениях каждая боевая единица может быть в одном из двух состояний: S_1 - не поражена и S_2 - поражена. Тогда для одной боевой единицы стороны *X* имеем марковский процесс из двух состояний с интенсивностью потока b^* поражающих выстрелов, приходящихся на одну боевую единицу стороны *X*, переводящую ее из состояния S_1 в состояние S_2 (рис. 1). Аналогично для боевой единицы второй стороны (рис. 2) имеем марковскую цепь с состояниями S_3 и S_4 и интенсивностью потока a^* поражающих выстрелов, приходящихся на одну боевую единицу стороны *Y*, переводящих ее из состояния S_3 в состояние S_4.

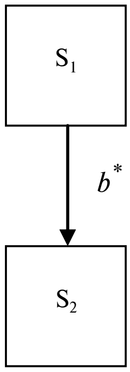

Рис. 1. **Подграф состояний боевой единицы стороны X**

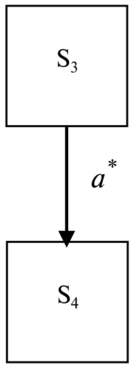

Рис. 2. **Подграф состояний боевой единицы стороны Y**

Для начального состояния значения интенсивностей сторон определяются по формулам

$$a^* = \frac{aN_1}{N_2} \text{ и } b^* = \frac{bN_2}{N_1},$$

где a и b - плотности пуассоновских потоков “успешных” выстрелов одной боевой единицы сторон X и Y, которые могут быть функциями времени;

N_1 и N_2 - численности сторон X и Y в начальный момент.

Следуя[7] для больших значений N_1, N_2, примем, что меняющиеся в процессе боя численности сторон принимаются равными математическому ожиданию боевых единиц сторон $x(t)$, $y(t)$. Следовательно, будем иметь:

$$a^* = \frac{ax(t)}{y(t)}, \qquad (9)$$

$$b^* = \frac{by(t)}{x(t)}. \qquad (10)$$

Учитывая (9), (10) для марковской цепи (см. рис. 1, 2), можно отметить, что справедливы известные уравнения Ланчестера[8] (1), (2).

Предположим, что в процессе боевых действий стороны получают некоторый выигрыш или проигрыш (например, территории, трофеи и т.п.). Назовем этот выигрыш или проигрыш доходом, который может быть положительным или отрицательным. Используя теорию марковских процессов с доходами[9], выведем уравнения доходов для одной боевой единицы, которая может находиться в двух состояниях S_1 и S_2 (см. рис. 1) и имеет интенсивность потока перехода b^*. Предположим, что к моменту времени t боевая единица (рис. 1) находится в состоянии S_1 и имеет доход $W_1(t)$. Найдем доход в момент времени $(t+\Delta t)$, т.е. $W_1(t+\Delta t)$. При условии того, что за время Δt поражение возможно только одним попаданием, вероятность поражения боевой единицы равна $b^*(t)\Delta t$, а следовательно, вероятность того, что боевая единица не будет поражена, равна $(1 - b^*(t)\Delta t)$. Пусть непораженная боевая единица, которая остается в состоянии S_1, дает дополнительный доход $r_{11}(t)$, тогда общий доход, остающийся в состоянии S_1, через время Δt будет равен $(1 - b^*(t)\Delta t)(W_1(t) + r_{11}(t)\Delta t)$. Если боевая единица поражена, то она переходит в состояние S_2 (см. рис. 1) с вероятностью $b^*(t)\Delta t$), следовательно, доход перехода из S_1 в S_2 будет равен $b^*(t)\Delta t r_{12}$. Поскольку состояние S_2 поглощающее, постольку в этом состоянии доход примем равным нулю. Теперь получается уравнение доходов

$$W_1(t+\Delta t) = (1 - b^*(t)\Delta t)(W_1(t) + r_{11}(t)\Delta t) + b^*(t)\Delta t r_{12}.$$

После преобразований, отбросив члены второго порядка малости и перейдя к пределу, получим уравнение доходов для боевой единицы

$$\frac{dW_1(t)}{dt} = -b^*(t)W_1(t) + r_{11}(t) + b^*(t)r_{12}(t).$$

Заменим $b^*(t)$ согласно формуле (2), тогда окончательно получим

$$\frac{dW_1(t)}{dt} = -b(t)\frac{y(t)}{x(t)}W_1(t) + r_{11}(t) + b(t)\frac{y(t)}{x(t)}r_{12}. \qquad (11)$$

Аналогично для стороны Y (см. рис. 2) уравнение доходов запишется в виде

$$\frac{dW_2(t)}{dt} = -a(t)\frac{x(t)}{y(t)}W_2(t) + r_{33}(t) + a(t)\frac{x(t)}{y(t)}r_{34}, \quad (12)$$

где $W_2(t)$ - доход одной боевой единицы стороны Y;

$r_{33}(t)$ - доход в единицу времени в случае, когда боевая единица Y остается в состоянии S_3;

$r_{34}(t)$ - доход при переходе из состояния S_3 в состояние S_4.

В конкретных задачах интерес представляет определение доходов всех боевых единиц сторон X и Y, которые находятся по формулам:

$$W_x(t) = W_1(t)x(t), \; W_y(t) = W_2(t)y(t), \quad (13)$$

где $W_x(t)$ и W_y - доходы сторон X и Y.

Таким образом, получены дополнительно к уравнениям динамики средних Ланчестера (3), (4) уравнения, определяющие динамику доходов в среднем, получаемых в результате боевых действий, т.е. уравнения (11),(12),(13).

Для случая $\alpha \le 1$ в уравнении (12) $a(t)$ заменим на $\alpha a(t) = \frac{y(t)}{y_T}a(t)$, и тогда уравнение (12) будет записано в виде

$$\frac{dW_2(t)}{dt} = -a(t)\frac{x(t)}{y_T}W_2(t) + r_{33}(t) + a(t)\frac{x(t)}{y_T}r_{34}. \quad (14)$$

Остальные уравнения (11), (13) остаются без изменений.

Рассмотрим применение данных уравнений к случаю длительного вооруженного конфликта.

Исследование математической модели математического ожидания доходов для случая длительного вооруженного конфликта

Рассмотрим случай, когда война перешла в длительную стадию военных действий между оккупационной группой войск и силами сопротивления партизан. Тогда боевые действия принимают стационарный характер с установившимися статистически средними потерями и доходами сторон в течение определенного времени (например, календарного года). Стационарность будет соблюдаться, если стороны для компенсации потерь будут вводить дополнительные силы. Если резервы будут вводиться по принципу обратной связи, то динамический процесс боевых действий будет моделироваться уравнениями (3), (4).

Для случая $\alpha = 1$ и $a = const, b = const$ эти уравнения становятся линейными, и если выполняется неравенство $k_x k_y - ab$ строго больше нуля, то система уравнений имеет стационарное установившееся решение

$$x_{st} = \frac{x_T - \frac{by_T}{k_x}}{1 - \frac{ab}{k_x k_y}}, \quad y_{st} = \frac{y_T - \frac{ax_T}{k_y}}{1 - \frac{ab}{k_x k_y}}.$$

Из уравнений (11), (12), (13) получим стационарные значения расходов сторон X, Y:

$$W_{xst} = \frac{x_{st}^2}{by_{st}}r_{11} + x_{st}r_{12},$$

$$W_{yst} = \frac{y_{st}^2}{ax_{st}}r_{33} + y_{st}r_{34}.$$

В правых частях данных формул вторые члены означают расходы, которые возникают при уничтожении боевой единицы, т.е. при переходе из S_1 в S_2 для стороны X и из S_3 в S_4 для стороны Y. Можно предположить, что эти составляющие расходов достаточно малы, поэтому пренебрегаем ими, тогда получим соотношение расходов сторон

$$\frac{W_x}{W_y} \cong \frac{ar_{11}x_{st}^3}{br_{33}y_{st}^3}. \quad (15)$$

Соотношение можно интерпретировать следующим образом. Параметры a, b, r_{11}, r_{33} учитывают в конечном счете характеристики вооружения, организованности и подготовленности боевых единиц сторон. Отношение расходов сторон зависит от отношения первых степеней этих параметров. В то же время соотношение расходов зависит от отношения численности сторон в третьей степени.

Рассмотрим случай $\alpha \le 1$. Тогда уравнения (3), (4) переходят в нелинейную систему уравнений (7). Как было доказано, эта система уравнений устойчива, а следовательно, имеет стационарное решение, которое обозначим x_{st1}, y_{st1}. Тогда соотношение расходов для сторон, имеющих разную информацию (случай $\alpha \le 1$), имеет вид

$$\frac{W_x}{W_y} = \frac{x_{st1}^3}{y_{st1}^2 y_T}\frac{ar_{11}}{br_{33}}. \quad (16)$$

Изложенное показывает, что борьба со сравнительно малочисленными (по сравнению с оккупационной армией) отрядами партизан может потребовать больших расходов от армии противника, которая должна контролировать всю территорию оккупируемой страны и вследствие этого должна иметь достаточно большую численность. В работе В.А. Бочарова приведены сведения, подтверждающие этот тезис: “Например, американский исследователь Дейчман в 60-х годах использовал уравнения Ланчестера в изучении партизанской борьбы в Греции, Филиппинах, Индонезии, Кубе, Алжире, Вьетнаме и ряде других стран. Он доказал, что для полного подавления партизанского движения необходимо превосходство сил регулярной армии в 8 раз”[10]. Из формул (15), (16) следует, что расходы на регулярную армию будут в 512 раз больше расходов на партизанскую армию в зависимости от численности войск, не говоря о значительно больших расходах на содержание солдата (коэффициент r_{11}).

Математическая модель вооруженного конфликта на основе уравнений динамики средних Ланчестера дополнена уравнениями доходов сторон, полученными на основе теории марковских процессов с доходами. Исследован конфликт, в процессе которого компенсация потерь производится по принципу обратной связи. Получены формулы (15), (16) для отношения показателей расходов сторон конфликта, в которых показана зависимость этого показателя от технических возможностей сторон и их численности. Модель может быть полезна при прогнозировании результатов проведения военных операций, а также при анализе военных конфликтов в исторических исследованиях.

---

[1] *Храмчихин А.* Уроки “Чхон Ана” // Независимое военное обозрение. 2010. 26 апр. (№12).

[2] *Трухаев Р.Н., Хоменюк В.Б.* Методы оптимизации информационных систем поиска и обнаружения. Л., 1973.

[3] *Поляк Г.Л.* Определение экономических потерь воюющих стран на основе марковских процессов с доходами // Сегодня и завтра российской экономики: науч.-аналит. сб. 2010., № 40-41. С. 38-43.

[4] См.: *Бочаров В.А.* Проблема альтернативности исторического развития: исторические и методологические аспекты: дис. ... канд. ист. наук. Томск, 2002. URL: http://kilo.tsu.ru/contens.htm; *Митюков Н.В.* Определение жертв войн через ланчестерские модели // Историческая психология и социология истории. 2009. № 2. С. 122-140.

[5] *Буянов Б.Б., Лубков Н.В., Поляк Г.Л.* Математическая модель длительного вооруженного конфликта // Проблемы управления. 2007. № 5.С. 48-51.

[6] *Митюков Н.В.* Указ. соч.

[7] *Трухаев Р.Н., Хоменюк В.Б.* Указ. соч.

[8] Там же.

[9] *Ховард Р.А.* Динамическое программирование и марковские процессы. М., 1964.

[10] *Бочаров В.А.* Указ. соч.

Поступила в редакцию 07.11.2011 г.