

## Прогнозирование динамики экономических параметров предприятия на основе нейронных сетей

© 2012 М.С. Суменков

доктор экономических наук, профессор

©2012 С.М. Суменков

кандидат экономических наук, доцент

Уральская государственная юридическая академия, г. Екатеринбург

© 2012 Н.Ю. Новикова

ООО КБ "Кольцо Урала"

E-mail: ssm0001@yandex.ru

В статье предложена методика построения модели статистического анализа временных рядов на основе нейронных сетей, которые дают дополнительные возможности в моделировании нестационарных процессов и описании их хаотичного поведения.

*Ключевые слова:* нейронная сеть, временной ряд, случайная компонента, прогнозирование, тренд.

Необходимость изучения поведения различных показателей, характеризующих деятельность предприятия и находящиеся в постоянном изменении и движении, приводит к целесообразности использования теории случайных процессов, в основе которой лежит изучение закономерностей изменения случайных величин, характеризующих поведение реальных экономических показателей<sup>1</sup>.

Нейронные сети можно рассматривать как обобщение традиционных статистических подходов к анализу временных рядов. Они дают дополнительные возможности в моделировании нестационарных процессов и описании их хаотичного поведения. Благодаря своей большой гибкости, когда на одной типологии сети можно реализовать множество различных отображений, их семантическая сеть позволяет увязать в единое целое все процессы моделирования поведения временных рядов. Это, в первую очередь, выявление тренда и циклической составляющей, а также анализ случайной компоненты. За основу примем многослойную нейронную сеть с прямой связью (см. рисунок).

Первый слой нейронов обеспечивает определение наиболее подходящих вариантов статистической модели тренда. Учитывается тот факт, что все расчеты будут проводиться на сравнительно небольших (часто на минимально допустимых) размерах выборок, поэтому целесообразно анализировать лишь наиболее простые выражения этой компоненты.

Каждый из нейронов данного слоя будет моделировать одно из возможных представле-

ний статистической зависимости и на основе имеющейся исходной информации определять методом наименьших квадратов значения коэффициентов каждой из рассматриваемых функций с выдачей оценок тесноты связи.

Первый нейрон реализует линейное представление

$$f(t) = a \cdot t + b,$$

т. е. вычисляет значения коэффициентов  $a$  и  $b$  и оценку тесноты связи  $R^2x/t$ .

Второй нейрон оценивает степенную функцию

$$f(t) = a \cdot t^b$$

путем преобразования ее к линеаризованной

$$\ln f(t) = \ln a + b \ln t.$$

Третий нейрон - показательную функцию

$$f(t) = a + b^t$$

с существующим преобразованием

$$\ln f(t) = \ln a + t \cdot \ln b.$$

Четвертый нейрон - показательно-степенную функцию

$$f(t) = a \cdot t^b \cdot c^t$$

с соответствующим приведением к линейному случаю

$$\ln f(t) = \ln a + b \cdot \ln t + t \cdot \ln c.$$

Пятый нейрон - логистическую функцию

$$f(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-ct}}$$

с соответствующим приведением к линейному случаю

$$\ln \frac{a}{(f(t)-1)} = \ln b - ct.$$

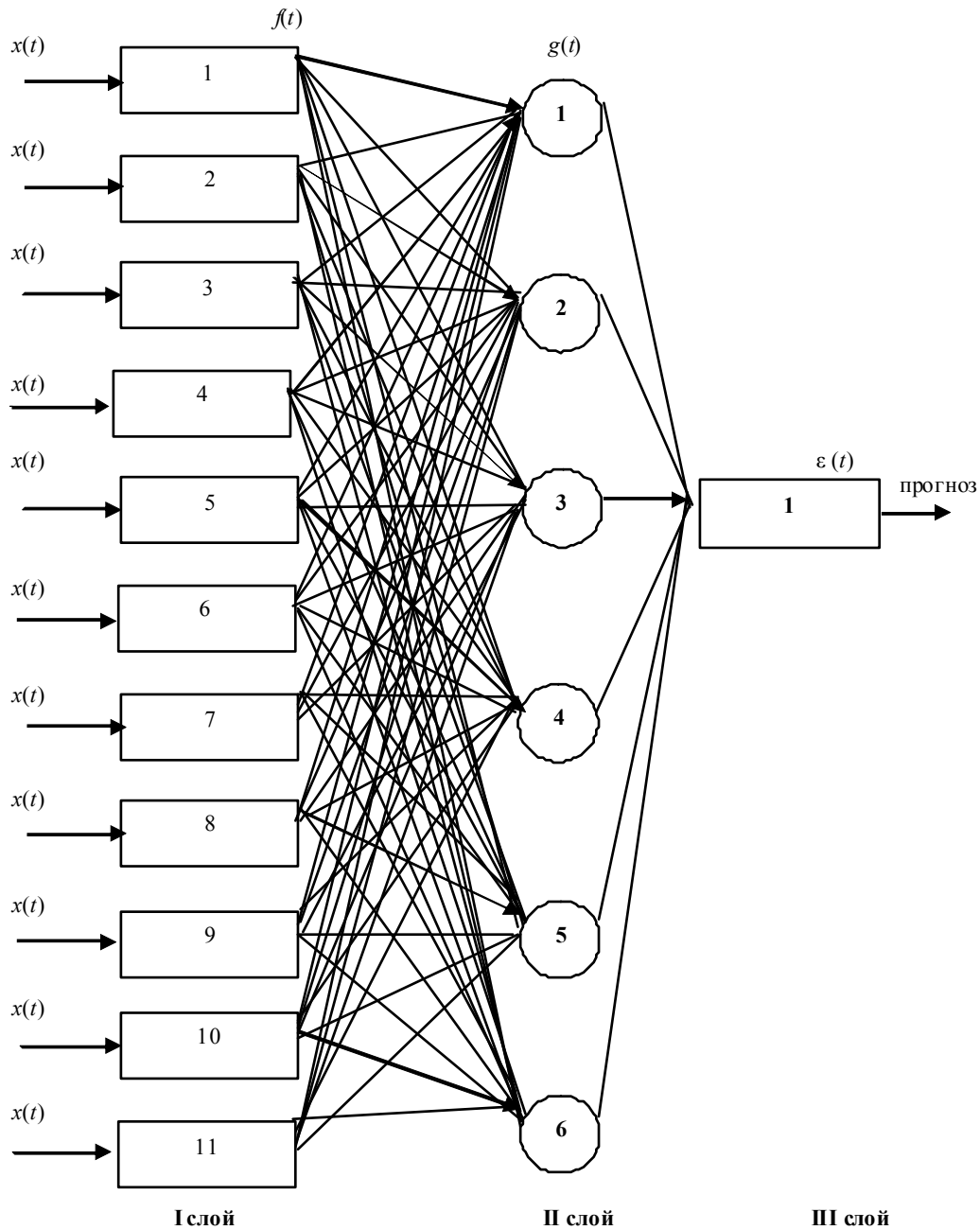


Рис. Трехслойная нейронная сеть

Шестой нейрон - функцию Гомперца

$$\ln f(t) = \ln a + bc^x$$

с соответствующим приведением к линейному виду

$$\ln (\ln f(t) - \ln a) = \ln b + x \ln c.$$

Седьмой нейрон - гиперболическую функцию

$$f(t) = \frac{1}{a + bt}$$

с соответствующим приведением к линейному случаю

$$\frac{1}{f(t)} = a + bt.$$

Восьмой нейрон - дробно-рациональную функцию

$$f(t) = \frac{t}{a + bt + ct^2}$$

с соответствующим приведением к линейному случаю

$$\frac{t}{f(t)} = a + bt + ct^2.$$

Девятый нейрон - функцию Торн-Квиста

$$f(t) = \frac{at}{b+t}$$

с соответствующим приведением к линейному случаю

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{a}$$

Десятый нейрон - функцию Джонсона

$$\ln f(t) = \frac{a}{c-b+t}$$

с соответствующим приведением к линейному случаю

$$\frac{1}{\ln f(t)-c} = -\frac{b}{a} - \frac{1}{a}t$$

В силу сделанного нами предположения об ограниченности числа наблюдений (в целях достижения стационарности случайных процессов) для того, чтобы случайные возмущения не становились статистически закономерными, будем рассматривать такие выражения циклической компоненты, которые содержат только две различных циклических переменных из выражения (2).

Если такое предположение неприемлемо, т.е. не гарантирует достаточную степень адекватности моделирования случайного процесса, то в состав нейронов 2-го слоя необходимо включать алгоритмы пошаговой регрессии и количество циклических переменных может быть увеличено.

Перечень нейронов 2-го слоя и выражения их циклической составляющей приведены в табл. 1.

Таблица 1. Перечень нейронов второго слоя и выражения их циклических составляющих

Номер нейрона	Выражение циклической составляющей
1	$g(t) = a_0 + a_1 \sin \pi t/6 + b_1 \cdot \cos \pi t/6$
2	$g(t) = a_0 + a_1 \sin \pi t/6 + a_2 \cdot \sin 2 \pi t/6$
3	$g(t) = a_0 + a_1 \sin \pi t/6 + b_2 \cdot \cos 2 \pi t/6$
4	$g(t) = a_0 + a_2 \sin 2 \pi t/6 + b_1 \cdot \cos \pi t/6$
5	$g(t) = a_0 + a_2 \sin 2 \pi t/6 + b_2 \cdot \cos 2 \pi t/6$
6	$g(t) = a_0 + b_1 \cos \pi t/6 + b_2 \cdot \cos 2 \pi t/6$

В качестве оценки степени приближения будет выступать величина

$$R^2 x/t = \frac{\sum (x(t) - f(t))^2}{Var x(t)}, \quad (1)$$

где  $Var x(t)$  - дисперсия временного ряда.

Второй слой нейронов обеспечивает определение циклической компоненты для каждого из возможных представлений тренда  $f(t)$ . Каждый из нейронов данного слоя будет моделировать одно из возможных представлений циклической составляющей. Эти представления должны быть адаптированы к конкретным условиям рассматриваемой задачи, т.е. учитывать результаты статистического моделирования.

Наиболее часто в качестве циклической составляющей выступает сезонная компонента, для нее период колебания известен и составляет, например, годовой период. В этом случае аппроксимирующая функция может иметь следующий вид:

$$g_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cdot \sin \frac{\pi kt}{6} + \sum_{k=1}^m b_k \cdot \cos \frac{\pi kt}{6}. \quad (2)$$

Как правило, для реальных задач  $m \leq 3^2$ .

Из таблицы видно, что при  $m = 2$  в выражении (2) охватываются все возможные комбинации варьирования двумя циклическими переменными.

Каждый нейрон 2-го слоя связан со всеми нейронами 1-го слоя, тем самым обеспечивает возможность полного перебора вариантов тренд-сезонных колебаний. Если обозначить  $f_k(t)$  - представление тренда в каждом нейроне 1-го слоя, а  $g_i(t)$  - циклическую составляющую, реализованную в  $i$ -м нейроне 2-го слоя, то на выходе  $i$ -го нейрона 2-го слоя будет тренд-сезонная компонента, имеющая следующую форму связи:  $f_k(t) = g_i(t)$ , которая обеспечивает максимальную по параметру  $k$  оценку тесноты связи, в качестве которой выступают либо коэффициент множественной корреляции  $R^2 y/t$ , либо дисперсия адекватности  $S^2 y/t$ .

С помощью данной нейронной сети можно оценить  $10 \times 6 = 60$  вариантов представления тренд-сезонной составляющей для каждого временного ряда, в то время как при традиционном подходе удалось бы оценить лишь  $10 + 6 = 16$  вариантов представления этой составляющей.

Третий слой нейронной сети содержит только один нейрон, на вход которого подается информация о форме представления тренд-сезонной компоненты с соответствующей оценкой тес-

ноты связи (в случае отсутствия автокорреляции) от каждого из шести нейронов 2-го слоя. Задача нейрона 3-го слоя - сделать обоснованный выбор из шести возможных вариантов наиболее подходящего представления тренд-сезонной компоненты.

Данный выбор производится не только с помощью анализа оценок тесноты связи  $R^2y/t$ , но и включает анализ случайности компоненты  $\xi(t)$  для каждого из шести случаев.

Такой анализ случайной компоненты  $\xi(t)$  включает в себя следующие три типа:

- 1) проверка случайности  $\xi(t)$ ;
- 2) проверка нормальности распределения;
- 3) оценка параметров нормального распределения.

Введем следующие обозначения:

$y(t)$  - наблюдаемое значение временного ряда,  $t \in 1, T$ ;

$Y(t) = f_k(t) + g_s(t)$  - расчетная величина тренд-сезонной компоненты;

$$\xi(t) = Y(t) - y(t).$$

**2. Проверка нормальности** необходима для обоснования оценок точности прогнозов на базе статистического моделирования. Как известно<sup>3</sup>, случайная величина  $\{\varepsilon^t\}$  должна быть распределена по нормальному закону с известными параметрами:

- а) математическое ожидание равно нулю;
- б) дисперсия равна единице.

Для оценки гипотезы о нормальности распределения  $\{\varepsilon\}$  вычисляются выборочная средняя этого ряда  $\bar{\varepsilon}$  и его выборочная дисперсия  $T^2\bar{\varepsilon}$ , все множество значений данного временного ряда разбивается на шесть равных интервалов длины  $T\varepsilon$  с центром в точке  $\varepsilon$ . Подсчитывается число попаданий элементов ряда в каждый из интервалов. Эти величины образуют выборочные частоты  $n_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), данные заносятся в следующую таблицу (табл. 2).

Здесь  $N = 24$  - общее число наблюдений;  $P_i$  - вероятность попадания в  $i$ -й интервал случайной величины, распределенной по нормальному зако-

Таблица 2. Величина выборочных значений

Номер интервала	$n_i$	$P_i$	$N'_i = 24P_i$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n_i}$
1	$n_1$	0,02	1	$(n_1 - 1)^2/1$
2	$n_2$	0,14	3	$(n_2 - 3)^2/3$
3	$n_3$	0,34	8	$(n_3 - 8)^2/8$
4	$n_4$	0,34	8	$(n_4 - 8)^2/8$
5	$n_5$	0,14	3	$(n_5 - 3)^2/3$
6	$n_6$	0,02	1	$(n_6 - 1)^2/1$
$\Sigma$	24	1	24	$X^2_{набл}$

**1. Проверка случайности** производится в данной нейронной сети по критерию медианы. Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p, \dots, \xi_T$$

исследуемый временной ряд остатков или случайной компоненты. Упорядочим его и найдем для него медиану  $\xi_m$ . Затем, сравнивая уровни исходного ряда с медианой, образуем новый ряд по следующему правилу: если

- $\xi_i > \xi_m$ , то ставим плюс,
- $\xi_i < \xi_m$ , то ставим минус,
- $\xi_i = \xi_m$ , то уровень пропускается.

Ряд состоит из случайных величин, если выполняются следующие неравенства:

$$K_{\max} < [3,3 (\lg (T + 1))], \tag{3}$$

$$N(n) < \left( \frac{1}{2} (T + 1 - 1,96\sqrt{T-1}) \right), \tag{4}$$

где  $T$  - число уровней ряда,

$K_{\max}$  - длина наибольшей серии, состоящей сплошь из (+) или (-),

$N(n)$  - число таких серий.

Квадратные скобки означают взятие целой части соответствующих чисел.

ну;  $n'_i$  - выравнивающие частоты, определяемые по формуле  $n'_i = N \cdot P_i$ . Тогда можно вычислить

$$X^2_n = \sum_{i=1}^6 \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$$

наблюдаемое значение критерия Пирсона, по которому производится оценка гипотезы о нормальности временного ряда  $\varepsilon(t)$ .

Гипотеза о нормальности распределения считается справедливой, если (при заданном уровне значимости  $\alpha = 0,05$ ) выполняется следующее соотношение:

$$X^2_n < X^2_{кр} (\alpha = 0,05, k = 3) = 7,81,$$

где  $X^2_{кр}$  - критические точки распределения Пирсона, значение которых взято из таблицы<sup>4</sup>.

**3. Оценка параметров нормального распределения** осуществляется с помощью оценки следующих двух статистических гипотез с учетом того, что

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon(t),$$

$$S^2_{\varepsilon} = \frac{1}{(T-1)} \sum_{t=1}^T (\varepsilon(t) - \bar{\varepsilon})^2.$$

Первая гипотеза  $H_0 : M(\bar{\varepsilon}) = 0$

Гипотеза считается справедливой, если

$$|\bar{\varepsilon}| < \frac{t_{kp}(a = 0,05, k = T-1) \cdot S^2_{\varepsilon}}{\sqrt{T-1}},$$

где  $t_{kp}(a, k)$  - критическая точка распределения Стьюдента.

Вторая гипотеза  $H_0 : M(S^2_{\varepsilon}) = 1$ .

Гипотеза считается справедливой, если выполняется соотношение

$$(T-1) S^2_{\varepsilon} \leq \chi^2_{kp}(a = 0,05; k = T-1).$$

Таким образом, для признания выражения тренд-сезонной компоненты оптимальной в рамках сформулированных положений необходимо, чтобы ее остаточная составляющая имела нормальное распределение  $N(0,1)$ .

Сформированная по описанным алгоритмам нейронная сеть позволяет получать аналитическое выражение его тренд-сезонной компоненты, с помощью которой путем экстраполяции можно осуществлять прогнозирование динамики поведения экономических параметров с получением соответствующих доверительных интервалов. Этот процесс осуществляет нейрон 4-го слоя, который связан с нейроном 3-го слоя. Основные задачи нейрона 4-го слоя следующие:

1) определение продолжительности периода прогнозирования;

2) получение прогнозных оценок;

3) оценка достоверности получаемых прогнозных оценок динамики экономических показателей.

Понятно, что все эти задачи тесно взаимосвязаны.

Для решения указанных задач нейрон реализует алгоритм, изложенный в<sup>5</sup>. Возможность его использования следует из того факта, что случайная величина  $\xi(t)$  распределена нормально с параметрами  $(0,1)$ . Введем следующие обозначения. Пусть  $y(t)$  - наблюдаемые значения временного ряда;  $T$  - период предыстории, т.е.  $t \in 1, T$ ,  $Y(t) + g_i(t)$  - сепарабельная регрессионная модель тренд-сезонной компоненты времен-

ного ряда;  $n$  - число независимых слагаемых этой модели;  $Y(t)$  - теоретическое значение компонент временного ряда.

$$S^2_{y/t} = \frac{\sum_{t=1}^T (y(t) - Y(t))^2}{T - n - 1} -$$

дисперсия адекватности временного ряда;

$\alpha$  - уровень значимости;

$t_{kp}(\alpha, T - n - 1)$  - критическое значение распределения Стьюдента;

$(T + 1, \dots, T + \tau, \dots)$  - период прогнозирования.

В данном случае можно утверждать<sup>6</sup>, что с доверительной вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha$  прогнозное значение исследуемого параметра  $Y(T + \tau)$  попадает в следующий доверительный интервал через промежуток времени  $\tau$ .

$$\left\{ Y(T + \tau) \pm t_{kp}(\alpha, T - n - 1) S_{y-t} - \right. \\ \left. - t \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{T} + \frac{3(T + 2\tau - 1)^2}{T(T - 1)^2}} \right\}.$$

С помощью построения доверительных интервалов производится оценка достоверности получаемых прогнозных оценок экономических показателей.

По предложенной методике можно формировать прогнозные оценки динамики экономических параметров предприятий различных отраслей народного хозяйства и производить оценку их экономической деятельности.

<sup>1</sup> Концептуальный подход к прогнозированию динамики временных рядов / М.С. Суменков [и др.] // Стратегическое управление организациями: проблемы и возможности современной экономики: материалы Всерос. науч.-практ. конф. СПб., 2011. Ч. 1. С. 176-184.

<sup>2</sup> Мюллер П. Таблицы по математической статистике. М., 1982.

<sup>3</sup> Кильдишев Г.С., Френкель А.А. Анализ временных рядов и прогнозирование. М., 1983.

<sup>4</sup> Ерина А.М. Математико-статистические методы изучения экономической эффективности производства. М., 1983.

<sup>5</sup> Нейронные сети и финансовые рынки / Д.-Э. Бэстенс [и др.]. М., 1997.

<sup>6</sup> Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его применение. М., 1981.

Поступила в редакцию 03.01.2012 г.