

## 4.7

## Модели оценки производных финансовых активов

Под *производным финансовым активом* понимается такой актив, денежный поток по которому зависит от цены другого актива. *Опцион* является производным финансовым активом, дающим его владельцу право покупки или продажи определенного количества активов по фиксированной цене (эта цена носит название *цены исполнения опциона* — strike price, или exercise price) в момент или до окончания действия опциона (момент окончания называется *моментом исполнения*).

Опцион, дающий его владельцу право купить актив, носит название *колл-опцион* (call option), а дающий право продать — *пут-опцион* (put option). Особенность опционов состоит в том, что они дают право, но не налагают обязательство, и владелец опциона имеет выбор: а) воспользоваться правом и купить акцию (т.е. исполнить колл-опцион) по фиксированной цене исполнения; б) не покупать акцию. Так как цена акции меняется во времени, то покупка по фиксированной цене может принести владельцу опциона денежный выигрыш, равный разности текущей цены акции на рынке и цены исполнения. Очевидно, обладание таким правом имеет стоимость. Так же как о цене акции, можно говорить о цене опциона, т.е. цене права принять решение в будущем.

Модели оценки опциона определяют факторы, влияющие на его цену, и позволяют рассчитать эту цену при тех или иных значениях факторов.

*Операции в колл-опционе* (предполагается, что правом купить можно воспользоваться только в конкретный момент времени — в день исполнения опциона):

	<i>в текущий момент <math>t = 0</math></i>	<i>в момент исполнения опциона</i>
<p>покупатель (будущий владелец) →</p>	<p>уплачивает цену опциона (назовем ее ценой колл) и получает право покупки</p>	<p>→ если цена актива <math>S</math> (например, акции) выше, чем цена исполнения опциона <math>K</math>, то владелец использует право, исполняет опцион через покупку акции по цене <math>K</math></p>
<p><i>Общая выгода (доход) = <math>S - K</math>,</i>  <i>Чистая выгода = <math>S - K - \text{Цена колл}</math>;</i></p>		
<p>продавец →</p>	<p>получает цену колл и обязуется продать акцию по цене исполнения <math>K</math>, если владелец опциона изъявит желание</p>	<p>→ если оценка акции меньше, чем цена исполнения (<math>S &lt; K</math>), то владелец опциона не воспользуется правом и продавец выигрывает.</p>
<p><i>Чистый выигрыш продавца = Цена колл.</i>  <i>Чистые потери владельца = Цена колл.</i></p>		

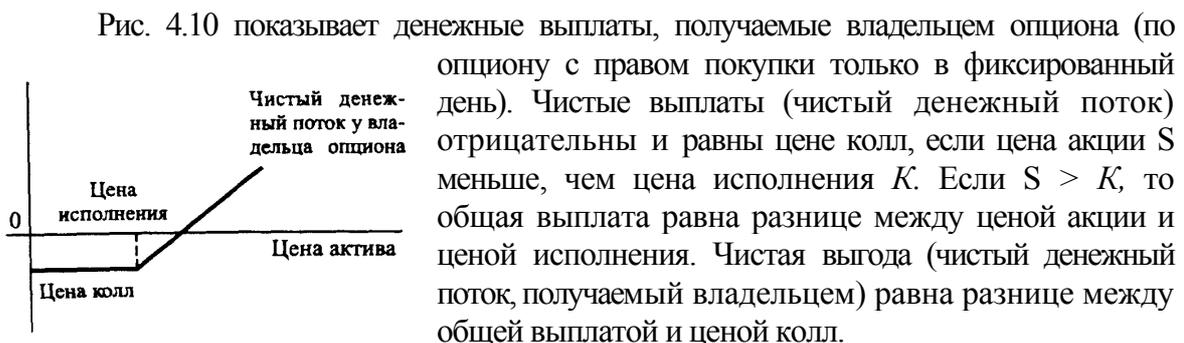


Рис. 4.10. Денежные выплаты, получаемые владельцем опциона

## Моделирование цены колл

Цена колл является внутренней оценкой опциона, как производного актива, и определяется рядом факторов, отражающих изменчивость исходного актива и характеристики самого опциона. В общем случае три основных фактора влияют на цену опциона:

- характеристики исходного актива;
- характеристики прав, гарантируемых опционом;
- характеристики финансового рынка.

### *Характеристики исходного актива.*

1. Текущая цена актива. Цена опциона зависит от цены актива. Так как колл-опцион дает право покупки актива по фиксированной цене исполнения, то возрастание цены актива будет повышать цену колл. Аналогично цена опциона пут становится меньше при росте цены актива.

2. Колеблемость цены актива. Чем выше колеблемость (изменчивость) актива, тем выше цена опциона (и колл, и пут). Этим опцион отличается от других финансовых активов, по которым рост изменчивости (рост риска) вызывает падение цены. Причина такого поведения опциона в том, что его владелец не может потерять больше, чем цена колл, и имеет потенциальную возможность получить большой денежный поток при значительном изменении цены исходного актива.

3. Дивиденды по акции. Акция как финансовый актив характеризуется двойным денежным потоком: рост цены и дивидендные выплаты. Выплата дивидендов обычно приводит к краткосрочному снижению цены акции, так как новый владелец не может на них рассчитывать до следующего года или следующих выплат. Цена колл есть снижающаяся функция от размера дивидендных выплат, цена пут, наоборот, — возрастающая функция.

### *Характеристики самого опциона.*

4. Цена исполнения является главной характеристикой опциона. Для колл-опциона с ростом цены исполнения цена колл снижается, так как снижается общий и чистый денежный поток, получаемый владельцем опциона.

5. Временной период до даты исполнения опциона. С увеличением срока функционирования опциона увеличивается колеблемость цены актива и, соответственно, увеличивается цена опциона (и колл, и пут). В случае колл-опциона текущая оценка цены исполнения (эта цена фиксирована) с ростом временного промежутка снижается ( $PV$  цены исполнения становится меньше), что увеличивает цену опциона.

### *Изменения на финансовых рынках.*

6. Так как покупатель опциона платит цену колл вперед, то в цене отражена альтернативная стоимость капитала покупателя. Эта альтернативная стоимость будет зависеть от уровня безрисковой доходности и времени, остающегося до исполнения опциона. Возрастание процентной ставки на рынке увеличит цену опциона колл, так как уменьшится значение  $PV$  цены исполнения. С ростом временного промежутка до даты исполнения изменчивость процентной ставки увеличивается (в нормальной ситуации процентная ставка растет), что приводит к росту цены колл.

*Американский опцион* может быть исполнен в любой момент до окончания опциона (до даты исполнения) в отличие от *европейского опциона*, допускающего погашение только в заранее оговоренный момент (момент исполнения). Возможность погашения раньше фиксированного срока обеспечивает большую гибкость владельцу американского опциона. Сложность оценки такого опциона возрастает. Однако в большинстве случаев премия за более длительный срок, закладываемая в цену опциона, делает вариант с досрочным погашением невыгодным (исключения составляют опционы на акции с большими дивидендными выплатами, приводящими к снижению цены акции; в опционе колл может оказаться более выгодным погашение до экс-дивидендной даты).

В табл. 4.7 показано влияние рассмотренных факторов на цену колл и цену пут.

Таблица 4.7. Влияние факторов, включаемых в модели определения цены опциона

Факторы	Влияние на цену колл	Влияние на цену пут
Рост цены акции $S$	Рост	Снижение
Рост цены исполнения $K$	Снижение	Рост
Рост изменчивости цены акции	Рост	Рост
Увеличение временного промежутка до момента исполнения	Рост	Рост
Рост процентной ставки	Рост	Снижение
Рост дивидендных выплат	Снижение	Рост

Покупка опциона дает дополнительные права владельцу, и за эти права имеет смысл заплатить, если владелец может рассчитывать на получение выгоды. Цена опциона должна быть не больше текущей оценки возможной чистой выгоды. Эта идея лежит в основе построения моделей ценообразования опционов. Рассмотрим оценку чистой выгоды инвестора на простом примере. Пусть инвестор оценивает покупку колл-опциона, который дает право купить или не купить актив через полгода по фиксированной цене 10 ден. ед. Актив рискованный, и значения возможной цены через полгода имеют вероятностное распределение, показанное в табл. 4.8.

Ожидаемый чистый денежный поток  $= 0 \times 0,25 + 5 \times 0,15 + 0 \times 0,25 + 0 \times 0,1 + 2 \times 0,25 = 1,25$ . Этот поток будет получен инвестором через полгода. Текущая оценка чистого эффекта при непрерывном начислении процентной ставки равна  $1,25e^{-kt}$ . Если процентная ставка на рынке равна 10% ( $k = 0,1$ ), то текущая оценка чистого денежного потока по опциону равна цене опциона и составляет  $1,25e^{-0,1 \times 0,5} = 1,25 \times 0,951 = 1,19$  ден. ед.

При построении цены опциона (теоретической стоимости опциона) делаются упрощающие предположения. Одно из таких предположений показано здесь и касается процентной ставки. Безрисковая процентная ставка одинакова для всех участников, одинакова для привлечения средств и для инвестирования и не меняется за время существования опциона.

Рассматривается непрерывное начисление процентов, что позволяет получить компактные математические формулы.

Таблица 4.8. Вероятностное распределение цены и денежные потоки держателя колл-опциона

Цена актива через 0,5 года, ден. ед.	Вероятность, %	Чистый денежный поток $S - K$ при $S > K$ , ден. ед.	Примечания
10	25	0	$10 - 10 = 0$
15	15	$15 - 10 = 5$	$15 - 10 = 5$
8	25	0 (не может быть отрицательным)	$8 - 10 = -2$
3	10	0 (не может быть отрицательным)	$3 - 10 = -7$
12	25	2	$12 - 10 = 2$

В таблице показаны и возможные денежные потоки держателя колл-опциона

$$\text{Чистый денежный поток} \begin{cases} = 0 & \text{при } S < K, S = K \\ = S - K & \text{при } S > K \end{cases}$$

## Взаимосвязь моделей оценки опционов колл и пут

Все модели оценки опциона разработаны для опциона колл. Это неслучайно, так как между ценой колл и ценой пут существует жесткая зависимость, носящая название *пут/колл-паритет* (put/call parity). Чтобы понять эту зависимость, рассмотрим хеджированную стратегию инвестора, осуществляющего опционы и пут, и колл. Инвестор может сформировать следующий портфель: 1) продать колл-опцион и купить пут-опцион с ценой исполнения  $K$ ; 2) купить акцию по текущей цене  $S$ . Такая хеджированная стратегия не содержит для инвестора никакого риска и обеспечивает получение чистого денежного потока в размере  $K$ .

Так, текущий момент денежный поток инвестора равен  $S - C + P$  ( $S$  — текущая цена акции,  $C$  — цена колл,  $P$  — цена пут,  $S$  и  $P$  — искомые переменные в модели). При цене акции  $S^*$  на дату исполнения инвестор с хеджированным портфелем имеет чистые выплаты, представленные в табл. 4.9.

Таблица 4.9. Денежные потоки инвестора, формирующего портфель

Действия по формированию портфеля в момент $t = 0$	Денежные потоки у инвестора на дату исполнения	
	если $S^* > K$	если $S^* < K$
Продажа колл-опциона, денежный поток = $C$	$-(S^* - K)$	0
Покупка пут-опциона, затраты = $P$	0	$K - S^*$
Покупка акции, затраты $S$ (цена акции на момент $t = 0$ )	$S^*$	$S^*$
Итоговый денежный поток по стратегии	$K$	$K$

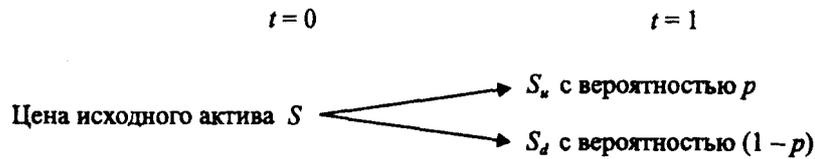
Таким образом, при отсутствии риска инвестор может через данную стратегию заработать  $K$  денежных единиц. Текущая оценка  $K$  должна совпадать с текущими затратами на осуществление этой стратегии:

$$\begin{array}{cc} t = 0 & t = N \\ \text{Затраты} = S - C + P & \text{Поступление} = K \end{array}$$

Текущая оценка чистого денежного потока по стратегии хеджирования  $PV(K) = \text{Текущая оценка денежных потоков по затратам на стратегию} = S - C - P$ . Таким образом, зная текущую цену акции  $S$ , цену исполнения, безрисковую ставку (как ставку дисконтирования для приведения будущего потока  $K$  к текущему моменту) и оценив по модели цену колл, можно определить цену пут.

## Биномиальная модель оценки колл-опциона

Биномиальная модель (binomial model) оценки "истинной", или внутренней (теоретической), цены опциона в текущий момент ( $t = 0$ ) строится на простейшем допущении о поведении цены исходного актива. Биномиальная модель иногда называется по фамилиям предложивших ее авторов: моделью Кокса — Росса — Рубинштейна (Cox — Ross — Rubinstein). Представление модели обычно строится для европейского опциона, который может быть исполнен в день погашения. Если в качестве актива рассматривается акция, то предполагается, что дивиденд по ней не выплачивается в течение срока действия опциона. Для каждого периода времени существуют только две возможности движения цены актива: вверх до значения  $S_u$  (up) или вниз до значения  $S_d$ . Предполагается известной вероятностью изменения цены.



Цена опциона выводится методом формирования такого портфеля из исходных активов, доступных инвестору на рынке, который обеспечивал бы такой же денежный поток инвестору, что и колл-опцион. На рынке инвестору доступны исходный актив, на который создается право покупки (рассматривается колл-опцион), и безрисковые варианты инвестирования и займа. В результате арбитражных операций на совершенном рынке активы и портфели активов будут оцениваться по прогнозируемому денежному потоку и риску, связанному с получением этих потоков. Строя портфель с денежными потоками, как по опциону, можно утверждать, что цена опциона равна оценке портфеля. В противном случае инвестор получит арбитражный доход, покупая относительно дешевый альтернативный портфель и продавая относительно дорогой.

Портфель должен воспроизводить характеристики колл-опциона (денежные потоки и риск). Построить этот портфель можно, например, из исходных активов и безрисковых облигаций.

Цена колл зависит от цены исходного актива. Пусть при цене актива  $S_u$  цена опциона равна  $C_u$  в момент  $tI$ , а при цене актива  $S_d$  цена опциона  $C_d$ .

Портфель включает: 1) безрисковые облигации в денежном выражении  $B$  (цена облигации на количество облигаций); 2) покупку исходных активов в количестве  $R$ . Это количество покупаемых активов определяется из соотношения

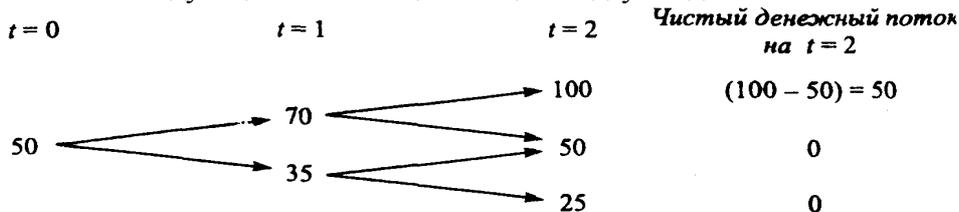
$$R = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}.$$

Так как для однопериодного действия опциона, когда известны цены актива будущего периода, можно рассчитать цену опциона на конец периода  $t=1$ , то может быть найден портфель (определено число покупаемых исходных активов и число безрисковых облигаций). Портфель создается для каждого временного периода (для каждого периода в модели определяются значения  $R_t$  и  $B_t$ ), что позволяет рассчитать его оценку и соответственно оценку опциона (текущую оценку опциона как актива, генерирующего денежные потоки на каждом временном промежутке). Конечным результатом итеративного процесса расчета оценки опциона будет оценка портфеля для  $I = 0$ , составленного из  $K$  исходных активов и  $B$  безрисковых ценных бумаг. Если полученное значение  $K < 0$ , то это означает продажу активов и ссужение денег. Если  $B < 0$ , то это означает продажу безрисковой облигации или получение ссуды по безрисковой процентной ставке.

$$\text{Цена колл (оценка опциона)} = \text{Текущая цена актива} \times R - \text{Привлечение денежных средств для покупки активов} = S \times R - B.$$

Например, рассмотрим колл-опцион с ценой исполнения 50 долл. и сроком опциона два года. Текущая цена акции — 50 долл. Дивиденды не выплачиваются, и исполнить опцион можно только в конце второго года (рассматривается европейский опцион)<sup>1</sup>.

Известны следующие значения цены акции по двум годам:



<sup>1</sup> Damodaran A. Damodaran on Valuation: Security Analysis for Investment and Corporate Finance. P. 326—28.

Для каждого года построим портфель, комбинируя  $R_t$  акций и привлекая  $B_t$  денежных средств для получения такого же денежного потока, какой генерирует опцион колл с ценой исполнения 50 долл. Итеративный процесс начинается с последнего года до исполнения опциона и доходит до года  $t = 1$ .

Построим портфель года  $t = 2$ , если цена акции поднимется до 70 долл. Денежные потоки по колл-опциону имеют вид:

$t = 1$	$t = 2$	Чистый денежный поток по опциону	Поток по портфелю
70	100	50	$100 \times R_{21} - (1 + k_f) \times B_{21}$
	50	0	$50 \times R_{21} - (1 + k_f) \times B_{21}$

Оценка колл совпадает с оценкой портфеля при равенстве денежных потоков:

$$100 \times R_{21} - (1 + k_f) \times B_{21} = 50,$$

$$50 \times R_{21} - (1 + k_f) \times B_{21} = 0$$

При  $k_f = 11\%$  решение системы уравнений относительно  $R_{21}$  и  $B_{21}$  дает следующие значения:  $R_{21} = 1$ ,  $B_{21} = 45$ . Если цена акции в году  $t = 1$  равна 70 долл., то при займе 45 долл. и покупке одной акции инвестор получит такой же денежный поток, что и при покупке опциона колл. Цена колл на момент  $t = 1$ , если цена акции 70 долл., равна  $70 \times R_{21} - B_{21} = 25$  долл.

Если в момент  $t = 1$  цена акции равна 35 долл., денежные потоки по опциону имеют вид:

**Система уравнений**

$$50 \times R_{22} - (1 + k_f) \times B_{22} = 0;$$

$$25 \times R_{22} - (1 + k_f) \times B_{22} = 0$$

имеет решение  $R_{22} = 0$ ,  $B_{22} = 0$ .

При цене акции 35 долл. в момент  $t = 1$  колл-опцион ничего не стоит.

Построим портфель года  $t = 1$ , когда цена акции может подняться с 50 до 70 долл. или опуститься до 35 долл. Денежные потоки по колл-опциону имеют вид:

$t = 0$	$t = 1$	Чистый денежный поток по опциону	Поток по портфелю
50	70	25	$70 \times R_1 - (1 + k_f) \times B_1$
	35	0	$35 \times R_1 - (1 + k_f) \times B_1$

**Решая систему уравнений**

$$70 \times R_1 - (1 + k_f) \times B_1 = 25;$$

$$35 \times R_1 - (1 + k_f) \times B_1 = 0,$$

находим, что для построения портфеля с таким же потоком, что и колл-опцион, нужно купить 0,71 акции и занять 22,5 долл. Оценка колл равна  $0,71 \times 50 - 22,5 = 13,2$ . Таким образом, в колл-опционе с ценой исполнения 50 долл. и сроком два года при рассмотренных допущениях о возможных ценах акции цена опциона равна 13,2 долл.

## Модель Блэка — Шоулса

Биномиальная модель строится на весьма жестких предпосылках: известны дискретные значения будущей цены акции; известны вероятностные распределения движения цены. Модель Блэка — Шоулса<sup>1</sup> является частным случаем биномиальной модели. Ее построение основывается на следующих предпосылках:

1) в качестве временного интервала между различными моментами по биномиальной модели рассматривается изменение цены акции;

2) цена акции меняется постоянно и временные интервалы в модели очень короткие ( $t \rightarrow 0$ );

3) изменение цены актива является случайным процессом. Теоретически при очень коротких временных интервалах цены акции во времени а) изменяются очень слабо и

<sup>1</sup> Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 1973. May — June. P. 637—654.

изменение цены может быть описано непрерывным нормальным распределением, б) изменяются очень сильно, имеют место скачки цен, и вероятностное распределение должно характеризоваться как пуассоновское. Модель Блэка — Шоулса исходит из слабых колебаний цены и возможности использования нормального распределения;

4) нормальное распределение допускает отрицательные значения результата (кривая нормального распределения симметрична относительно центральной оси и имеет положительные и отрицательные области (см. гл. 3), что не соответствует случаю акции, цена которой не может опуститься ниже нуля (ответственность акционеров ограничена). Более того, нормальное распределение предполагает равную вероятность подъема и снижения цены, хотя в реальной жизни инфляция приводит к большему изменению цены в сторону повышения. Таким образом, принято вводить в модель распределение натурального логарифма цен акции. Кривая логнормального распределения всегда положительна и имеет правостороннюю скошенность (вероятность повышения цены);

5) отсутствуют дивидендные выплаты;

6) опцион может быть исполнен только в фиксированный момент времени (европейский опцион);

7) факторами, определяющими цену опциона, являются: а) текущая цена акции  $S$ , б) цена исполнения  $K$ , в) срок действия опциона (время до момента исполнения опциона)  $t$ , г) безрисковая доходность, соответствующая сроку действия опциона  $k_f$  (если срок действия опциона два года, то и  $k_f$  отражает годовую процентную ставку безрискового инвестирования на два года), безрисковая доходность постоянна, д) степень изменчивости натурального логарифма цены акции (дисперсия  $\sigma^2$ ). Дисперсия рассчитывается за прошедший период времени, как правило, сопоставимый со сроком действия опциона (если рассматривается годовой опцион, то дисперсия рассчитывается по изменениям цены акции за год, если опцион трехмесячный, то достаточно рассмотреть изменение за последние три месяца). В качестве случайной величины для расчета дисперсии берется значение  $\ln(P_{t+1}/P_t)$ ;

8) нейтральность по отношению к риску;

9) отсутствуют транзакционные издержки и несовершенства рынка.

Модель определяет равновесную цену колл, которая не позволяет получать арбитражный доход. Если в какой-то момент действительная цена опциона отличается от оценки по модели, то инвестор имеет возможность сформировать портфель путем продажи колл-опционов и покупки акций и без риска получить доходность, превышающую процентную ставку. Рост таких сделок приведет к выравниванию модельной оценки и действительной цены.

*Модель Блэка — Шоулса:*

Цена опциона = Текущая цена актива  $\times N(d_1)$  – Текущая оценка цены исполнения  $\times N(d_2)$

или

$$C = SN(d_1) - Ke^{-k_f t}N(d_2),$$

где  $Ke^{-k_f t}$  — текущая оценка (PV) цены исполнения при непрерывном дисконтировании (см. Приложение 1);  $k_f$  — ставка процента (безрисковая доходность);  $t$  — срок действия опциона, т.е. число лет между сегодняшним моментом и моментом исполнения опциона;  $e$  — основание логарифма,  $e = 2,71828$ ;

$N(d)$  — вероятность того, что при нормальном распределении со средней, равной нулю, и стандартном отклонении, равном единице, результат будет меньше  $d$  (см. параграф 3.2 и табл. 6 Приложения 2 "Таблица накопленного нормального распределения

$N(X)$ ", иногда называемую "Таблица интегральной функции плотности нормального распределения").

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (k_f + \sigma^2/2)t}{\sigma t^{1/2}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma t^{1/2} \quad \text{или} \quad d_2 = \frac{\ln(S/K) + (k_f + \sigma^2/2)t}{\sigma t^{1/2}}.$$

Идея модели Блэка — Шоулса также сводится к формированию портфеля путем покупки акций и привлечения денежных средств. Аналогом покупки колл-опциона рассматривается следующее формирование портфеля:

	<i>по биномиальной модели</i>	<i>по модели Блэка — Шоулса</i>
1) привлечение ден. ед. денежных средств в размере	<i>B ден. ед.</i>	<i><math>Ke^{-k_f t} N(d_2)</math></i>
2) покупка акций в количестве	<i>R шт.</i>	<i><math>N(d_1)</math> шт.</i>

Например, рассмотрим корпорацию "Вепатор", имеющую на конец 1996 г. 3 млн. варрантов сроком на 5 лет (до 2001 г.). Цена исполнения 80 долл. Текущая цена акции 60 долл. Пятилетние государственные облигации в текущий момент обеспечивают доходность 10% годовых. Дисперсия по годовым колебаниям цен акций данной корпорации равна 0,14. Подставив исходные данные в модель, получаем:

$$1) d_1 = [\ln(60/80) + (0,1 + 0,14/2) \times 5] / (0,14 \times 5)^{1/2} = 0,562 / 0,836 = 0,672, \quad d_2 = d_1 - (0,14 \times 5)^{1/2} = 0,672 - 0,836 = -0,164.$$

По таблице накопленного нормального распределения  $N(X)$  для  $X > 0$  (табл. 6 Приложения 2) находим  $N(d_1) = N(0,672) = 0,749$ ,  $N(d_2) = N(-0,164) = 0,435$ ;

$$2) 60 \times 0,749 - (0,435 \times 80) / e^{0,1 \times 5} = \text{Цена варранта} = 44,94 - 34,8 / 1,6487 = 23,84.$$

### Цена пут в модели Блэка — Шоулса

Как было показано ранее, паритет колл/пут имеет вид:

$$\text{Цена колл} - \text{Цена пут} = \text{Текущая цена акции} - \text{Текущая оценка цены исполнения} = C - P - S - Ke^{-k_f t}$$

### Модификации модели Блэка — Шоулса

**Учет дивидендных выплат.** Выплата дивидендов приводит к снижению цены акции. Тем самым цена опциона колл снижается (цена пут увеличивается).

*Дивидендные выплаты для краткосрочного опциона* (срок исполнения до года). Переменной модели должна стать текущая оценка ожидаемых дивидендов в течение срока исполнения. В этом случае цена акции  $S = S - \sum d_{at} / (1 + k_f)^t$ .

$$C = SN(d_1) - Ke^{-k_f t} N(d_2).$$

Например, если опционколл на акцию имеет цену исполнения 45 долл. и осталось 4 месяца до срока исполнения, то при текущей цене 50 долл. и дисперсии логарифма цен 0,06 при ожидаемой выплате дивидендов через 2 месяца в размере 0,56 долл. текущая оценка дивиденда равна  $0,56 / (1 + k_f)^{2/12}$ . При  $k_f = 3\%$   $PV$  дивиденда = 0,56. Цена акции  $S = 50 - 0,56 = 49,44$ .  $d_1 = 0,81 \times N(d_1) = 0,79$ ;  $d_2 = 0,666 \times N(d_2) = 0,747$ . Цена колл  $C = 49,44 \times 0,79 - 45 \times e^{-0,03 \times 4/12} \times 0,747 - 5,78$ .

*Дивидендные выплаты для долгосрочного опциона.* Предпосылкой модифицированной модели является неизменность дивидендной доходности ( $g = \text{Дивиденд на акцию} / \text{Текущая цена акции}$ ) в течение срока опциона.

$$C = Se^{-\alpha t} N(d_1) - Ke^{-r t} N(d_2),$$
$$d_1 = \frac{\ln(S / K) + (k_f - r + \sigma^2 / 2)t}{\sigma t^{1/2}}.$$

Досрочное исполнение опциона (модели американского опциона). Для включения в модель возможности досрочного исполнения могут быть применены два подхода: 1) оценка колл для каждой экс-дивидендной даты и выбор максимальной оценки (ввод параметров срока выплаты дивидендов и их величины, корректировка цены акции на текущую оценку дивидендов, выбор максимальной цены колл); 2) использование биномиального подхода для задания вероятности досрочного исполнения.