

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ФОНД ПОДГОТОВКИ КАДРОВ  
ИННОВАЦИОННЫЙ ПРОЕКТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

*Субпроект «Создание центра повышения квалификации преподавателей по экономике»*

**Государственный Университет – Высшая Школа Экономики**

**Программа дисциплины**

---

**Финансовая математика**

---

Москва  
2004

Программа дисциплины «Финансовая математика» составлена в соответствии с требованиями (федеральный компонент) к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки дипломированного специалиста (бакалавра, магистра) по циклу социально-экономических дисциплин государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования второго поколения, а также требованиями, предъявляемыми НППК к новым и модернизированным программам учебных курсов, разработанным в рамках субпроекта «Создание центра повышения квалификации преподавателей по экономике» Инновационного проекта развития образования.

Программа подготовлена при содействии НППК – Национального Фонда подготовки кадров в рамках субпроекта «Создание центра повышения квалификации преподавателей по экономике» Инновационного проекта развития образования.

Авторы (составители): Шведов Алексей Сергеевич, д.ф.-м.н., проф., ГУ-ВШЭ;  
Шоломицкий Алексей Геннадьевич, к.ф.-м.н., ГУ-ВШЭ

## **I. Организационно-методический раздел**

### **1. Цель курса**

Данный курс подготовлен в рамках Инновационного проекта развития образования, основной целью которого является повышение качества преподавания социально-экономических наук в России посредством совершенствования системы повышения квалификации преподавателей экономических дисциплин вузов с учетом передового мирового опыта. В соответствии с этой общей целью, настоящий курс – *Финансовая математика* – призван дать систематическое введение в, без преувеличения, одно из самых бурно развивающихся и практически востребованных направлений экономической науки XX века. Методы финансовой математики получили широкое распространение, во-первых, в связи с быстрым ростом рынков производных финансовых инструментов в последние десятилетия, во-вторых, в связи с развитием компьютерных технологий торговли на финансовых рынках и управления портфелями, без которых уже невозможно представить себе современные рынки капитала. В то же время нужно отметить, что основные результаты в этой области достаточно глубоки и имеют тесную связь с общей экономической теорией, а по сути сами составляют важную часть экономической теории.

Курсы аналогичной направленности сегодня читаются в большинстве университетов в мире и входят в стандарт подготовки специалистов в области экономики, финансов и фондового рынка. С развитием рынка ценных бумаг и интеграцией России в глобальные финансовые рынки интерес к методам финансовой математики и основанным на них технологиям в нашей стране постоянно возрастает. Настоящий курс должен, по замыслу его авторов, помочь разработчикам курсов, особенно из регионов, получить более верное и широкое представление о современном состоянии финансовой математики, в особенности с точки зрения практических ее приложений в области финансовых технологий, а также познакомиться с западными образовательными стандартами.

### **2. Задачи курса**

- дать слушателям по возможности широкое представление об основных принципах и методах финансовой математики на уровне современного состояния теории;

- помочь им получить представление о связи этих методов с «пограничными» областями экономики и об их месте в контексте современной экономической теории;
- дать представление о моделях выбора в условиях риска, а также о наиболее распространенных практических методах оценки риска в применении к финансовым задачам;
- систематически изложить математическую теорию финансовых производных инструментов (деривативов), продемонстрировать практическое применение ее результатов, включая риск-менеджмент и хеджирование при помощи деривативов;
- дать представление о теоретико-экономическом «равновесном» подходе к моделированию фондовых рынков и о связи с ним ряда основных моделей и результатов финансовой математики;
- ознакомить слушателей с основными принципами и методами построения и анализа динамических моделей в финансах.

На основе курса слушатели получают возможность дальнейшего *самостоятельного преподавания курсов аналогичного содержания*. Такая подготовка слушателей видится основной задачей данного курса.

### **3. Методическая новизна курса (новые методики, формы работы, авторские приемы в преподавании курса).**

Методика чтения данного курса, как и любого курса для преподавателей, должна быть ориентирована на пробуждение у слушателей творческого интереса к предмету и желания углубиться в данную область. При этом необходимо учитывать, что слушатели часто будут людьми, уже накопившими определенный опыт преподавания, имеющими сложившиеся интересы и взгляды. Поэтому преподавание может вестись в значительной степени в форме «диалога». В преподавании курса широко используются обзорные лекции с акцентом на самостоятельную работу слушателей. Предполагается выполнение слушателями домашних заданий. В зависимости от желания слушателей, эти задания могут быть достаточно сложными и творческими, с последующим обсуждением на занятиях. Программой курса предусмотрено занятие в компьютерном классе, знакомящее с обучающей компьютерной программой DerivaGem. Некоторая часть аудиторного времени будет посвящена дискуссиям и обмену опытом.

#### **4. Место курса в системе социогуманитарного образования.**

За советский период в сознании значительной части интеллигенции укоренилось представление «гуманитарный – значит без формул». Это представление является глубоко ошибочным. Человек и общество заслуживают не менее глубоких и тонких моделей и методов исследования, чем природа или техника. В мире сегодня в этом никого убеждать не надо. В нашей стране, к сожалению, у многих сохраняется представление, что если к обычным интеллигентским разговорам прибавить несколько диаграмм и таблиц с числами, то это уже «научное исследование». На таких представлениях воспитывается и значительная часть молодого поколения. Очень часто молодежь не приучается к тому, что главная часть любого научного исследования – это полученные результаты, что абсолютно необходимо соотносить собственные полученные результаты с результатами, полученными и опубликованными ранее другими исследователями.

Курс «Финансовая математика», бесспорно, выдерживает с этой точки зрения самый строгий отбор. Методы этой науки дают результаты, очевидно нужные, и при этом понятные даже человеку, который в самой этой науке разобраться и не может, и очень сильно не хочет этого делать. «Финансовая математика» может стать одним из курсов-локомотивов перевода в нашей стране социогуманитарного образования на мировой уровень.

Курс может входить в качестве обязательного или спецкурса (курса по выбору) в программы подготовки по специальностям «Математические методы анализа экономики», «Экономическая теория», «Финансы и фондовый рынок» на уровне магистратуры. Отбор материала для такого курса может, в принципе, быть различным, в зависимости от преподавателя и ВУЗа. Данный курс преследует задачу обеспечить преподавателей достаточным материалом для самостоятельного построения такого рода курсов.

Кроме того, отдельные разделы курса могут использоваться преподавателями при подготовке таких курсов, как *Теория финансов, Фондовый рынок, Инвестиционный анализ, Деривативы, Риск-менеджмент в финансах* и др.

#### **5. Требования к уровню освоения содержания курса.**

Курс ориентирован на преподавателей экономических и финансовых дисциплин. Представляется важным вопрос о математической подготовке слушателей. Чтобы ответить на этот вопрос, условно выделим 4 уровня математической подготовки в университетском образовании:

- ниже средней;
- средняя (например, факультет экономики ГУ–ВШЭ);
- повышенная (например, МФТИ, МИФИ);
- высокая (отделения математики механико-математических факультетов).

Предлагаемый УМК ориентирован на преподавателей со средней математической подготовкой (повышенный и, тем более, высокий уровень подготовки приветствуются).

Представляется, что, как минимум, средняя математическая подготовка нужна не только для преподавания финансовой математики, но и для преподавания большинства экономических дисциплин.

*Слушатели данного курса должны:*

- четко представлять себе основные идеи современной финансовой математики как в свете практического применения, так и в контексте общей экономической теории;
- получить навыки решения и самостоятельного составления задач по темам курса;
- получить представление о связи методов финансовой математики с практикой и идеи для дальнейшей самостоятельной научной работы со студентами.

## **II. Содержание курса**

### **1. Новизна курса (научная, содержательная; сравнительный анализ с подобными курсами в России и за рубежом).**

Финансовая математика является относительно новым предметом финансово-экономического образования в России. В настоящее время курсы этой направленности читаются и готовятся в ряде ВУЗов (в том числе, некоторые такие курсы были подготовлены в рамках Инновационного проекта развития образования). К сожалению, нужно отметить, что многие из этих курсов не вполне отвечают своим задачам. В частности, подбор материала в ряде случаев страдает некоторой фрагментарностью и теоретичностью, что в основном связано с малодоступностью для преподавателей соответствующей литературы, информации и общей «неразработанностью» материала по причине его новизны. Нужно отметить, что литература, до сих пор появлявшаяся на

русском языке, носила в основном теоретический и несколько односторонний характер, будучи по большей части посвящена проблематике расчета цен опционов – важному, но достаточно узкому аспекту финансовой математики. Предлагаемый курс должен, по замыслу его авторов, помочь разработчикам курсов, особенно из регионов, получить более верное и широкое представление о современном состоянии финансовой математики, в особенности с точки зрения практических ее приложений в области финансовых технологий, а также познакомиться с западными образовательными стандартами.

К сожалению, в нашей стране имеют место случаи, когда под названием «Финансовая математика» читаются курсы, единственное содержание которых – это финансовая арифметика, что соответствует теме 1 в нашей программе курса. Чувствуя, что они упускают что-то важное, авторы в ряде случаев почему-то называют такие курсы «классической» финансовой математикой.

Настоящий курс представляет собой систематическое изложение современных методов финансовой математики. Курс базируется на посвященных финансовой математике главах широко известного учебника группы авторов Н. Panjer (ed.) et al. *Financial Economics*, перевод которого на русский язык, насколько нам известно, в настоящее время готовится к изданию. Содержание курса охватывает широкий круг задач финансовой математики и соответствует требованиям, предъявляемым к подобным курсам в программах западных университетов. Важно подчеркнуть, что в программе курса основной упор делается на результаты и методы, ориентированные на практическое применение, теоретические результаты излагаются именно с этих позиций. В то же время авторы стремились к тому, чтобы изложение было логически и математически связным, а не фрагментарным.

## **2. Разделы курса**

- I. Принятие финансовых решений в условиях определенности и в условиях риска.
- II. Математика опционов, фьючерсов, форвардов.
- III. Хеджирование и риск-менеджмент.
- IV. Модели равновесного ценообразования на фондовом рынке.
- V. Динамические модели и их использование на финансовых рынках.
- VI. Процентные финансовые инструменты

### 3. Темы и краткое содержание

#### Раздел I. Принятие финансовых решений в условиях определенности и в условиях риска.

1. *Финансовая арифметика.* Простые и сложные проценты. Процентные ставки. Дискретное и непрерывное начисление. Дисконтирование денежных потоков. Ренты. Оценка доходности. Доходность облигаций. Срочная структура процентных ставок.
2. *Задача сравнения и оценки потоков (последовательностей) платежей.* Дисконтированная стоимость как критерий оценки. Аксиоматическое построение данного критерия.  
*Пример:* оценивание инвестиционных проектов. *NPV* проекта. Эмпирические приемы оценки, связанные с учетом риска путем изменения дисконтной ставки. Модель дисконтированной полезности Самуэльсона. Дисконтирование как выражение «нетерпения» (impatience). «Парадоксы» выбора на последовательностях платежей (intertemporal choice) и нетрадиционные модели дисконтирования (краткий обзор).
3. *Выбор портфеля: модель оценки фондовых активов (CAPM).*
4. *Выбор портфеля: теория арбитражной оценки (APT).*
5. *Выбор портфеля: максимизация ожидаемой полезности.* Статический и динамический случаи.
6. *Общие принципы оценки риска в финансах.* Меры риска. Дисперсия как мера риска, ее достоинства и недостатки. Меры риска, основанные на дисперсии.  
*Примеры:* нарушение простейшего принципа монотонности относительно первого стохастического доминирования (правила «чем больше, тем лучше») для любой функции, зависящей только от математических ожиданий и дисперсий. VaR и связанные с ней меры риска. Достоинства и недостатки различных мер риска, границы применения. Методика RiskMetrics. Аддитивность и субаддитивность мер риска как выражение принципа «децентрализации» принимаемых решений. Когерентные меры риска.
7. *Индивидуальный выбор при неопределенности и риске: обзор теорий и экспериментальных результатов.* Теория ожидаемой полезности Неймана – Моргенштерна. Теории субъективной ожидаемой полезности Сэвиджа, Энскомба и Ауманна. Парадоксы выбора. Критика ожидаемой полезности. Развитие теории:



нелинейные модели. Взвешенная полезность, ранговая полезность и др. Теория проспектов.

## Раздел II. Математика опционов, фьючерсов, форвардов.

8. *Деривативы*, их история, виды, возможности для риск-менеджмента. Примеры. Форвардные и фьючерсные контракты. Терминология, простейшие расчеты. Опционы: соотношения для цен. Паритет цен опционов call и put. Свопы, кэпы и флоры.
9. *Биномиальная модель цен финансовых активов*. Построение дерева цен. Оценка европейских и американских опционов на бездивидендный актив.
10. *Риск-нейтральное оценивание в биномиальной модели*. Понятие риск-нейтральной вероятности. Цена дериватива как ожидаемое (по риск-нейтральной вероятностной мере) значение дисконтированной стоимости денежного потока от исполнения дериватива. Модель геометрического случайного блуждания.
11. *Непрерывная модель изменения цен активов*. Геометрическое броуновское движение. Логнормальная модель цен. Волатильность. Необходимые понятия стохастического анализа (эмпирическое изложение). Формула Ито. Связь между дискретной и непрерывной моделями цен.
12. *Теория Блэка – Шоулза*. Формула Блэка – Шоулза для цены европейского опциона на бездивидендный актив (вывод на основе идеи риск-нейтрального оценивания и логнормальной модели цен). Практическое применение теории Блэка – Шоулза (обзор). Эффекты, выходящие за рамки теории.
13. *Развитие методов оценки для разнообразных деривативов*. Опционы на активы с дивидендами, валютные, на фьючерсы, экзотические опционы (lookback, барьерные, радужные и др.), облигации с правом отзыва и выкупа и др. Валютные финансовые инструменты. Использование триномиальных деревьев. Метод Монте-Карло для оценивания различных деривативов. Цены деривативов как решения дифференциальных уравнений. Метод конечных разностей.

## Раздел III. Хеджирование и риск-менеджмент.

14. *Риск-менеджмент при помощи деривативов*. Использование деривативов и комбинаций деривативов для риск-менеджмента. Стандартные комбинации и опционные стратегии. Примеры.

15. *Хеджирование*. Дельта, гамма, тэта и др. характеристики портфелей, включающих производные. Дельта-хеджирование. Синтетические опционы. Страхование портфелей и другие практические стратегии динамического хеджирования.
16. *Оценка риска портфелей, включающих производные*. Метод сценариев, анализ чувствительности. Метод Монте-Карло для моделирования денежных потоков. Оценка VaR портфеля, включающего деривативы.

#### Раздел IV. Модели равновесного ценообразования на фондовом рынке.

17. *Однопериодная модель фондового рынка*. Модель в условиях определенности. Модель в условиях неопределенности. Вывод цен ценных бумаг из соображений равновесия. Ценные бумаги Эрроу – Дебре. Равновесный подход и риск-нейтральное оценивание. Подход «репрезентативного агента». Вывод модели оценки фондовых активов (CAPM). Вывод формулы Блэка – Шоулза из равновесной модели.
18. *Многопериодная модель фондового рынка*.

#### Раздел V. Динамические модели и их использование на финансовых рынках.

19. *Кредитный риск*. Структурные модели: подход Мертона. Учет кредитного риска в ценах корпоративных бумаг. Редуцированные модели. Практические методики оценки кредитного риска (CreditRisk+, CreditMonitor и др.).
20. *Модели финансовых временных рядов (обзор)*. Эмпирические факты, не укладывающиеся в логнормальную модель. ARMA модели. Пример: модель Уилки. Колебания волатильности. GARCH модели. Модели стохастической волатильности.

#### Раздел VI. Процентные финансовые инструменты

21. *Не зависящие от волатильности цены*. Процентные свопы и другие процентные финансовые инструменты. Задача оценки и хеджирования.
22. *Зависящие от волатильности цены*. Оценка права обменять один актив на другой. Применение для оценки европейских опционов на облигации, кэпов и флоров
23. *Модели для краткосрочных ставок*. Уравнение, связывающее цену дериватива с рыночной ценой риска. Стохастические модели с непрерывным временем для краткосрочных ставок и их применение для расчетов цен облигаций в будущие моменты времени

24. *Метод НЖМ.* Оценка деривативов с использованием стохастической модели для форвардных ставок (метод Хита – Джерроу – Мортон)

25. *Дюрация и выпуклость.* Хеджирование, основанное на расчете дюраций. Сравнение с методом Хита – Джерроу – Мортон.

26. *Отсроченные соглашения о форвардных ставках.* Ошибочность «наивной» оценки. Оценка с использованием метода Хита – Джерроу – Мортон.

#### **4. Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы.**

1. (а) По реальным данным о рыночных ценах бескупонных гособлигаций (например, US Treasury Bills, (Panjer, 1998, таблица 1.2); можно использовать данные о доходности ГКО) построить точечный график безрисковой доходности с непрерывным начислением в зависимости от срока до погашения облигаций. Точки графика соответствуют облигациям с соответствующим сроком погашения.

(б)\* Написать программу, вычисляющую безрисковую доходность с непрерывным начислением в «промежуточных» точках.

2. *Срочная структура процентных ставок.* Построить график срочной структуры процентных ставок (спот-ставки в зависимости от времени до погашения облигации) по реальным данным о ценах каких-либо купонных гособлигаций (например, US Treasury Bonds, (Panjer, 1998, таблица 1.4); можно использовать данные о доходности ОФЗ).

3. Покажите, что множество эффективных портфелей на плоскости  $(\sigma_r, m_r)$  изображается *выпуклым* множеством точек.

4. Даны два актива с независимыми нормально распределенными доходностями. Найдите формулы для оптимальной доли капитала, инвестированной в первый актив:

(а) на основе CAPM,

(б) по принципу минимизации ожидаемой полезности, если функция полезности денег (например) экспоненциальная.

5. В течение 21 квартала доходность акции компании XYZ (в %) была следующей:

18.41 12.19 2.51 -4.67 -3.12 -9.75 19.38

9.88 0.53 -1.08 -14.73 5.76 12.61 8.36

6.54 22.05 14.26 -12.04 23.96 12.59 -5.71

В те же кварталы доходность индекса *SSS* (в %) принимала следующие значения:

8.27 7.64 0.91 2.34 -3.57 0.35 2.48

5.40 3.54 -2.97 -1.88 0.45 7.51 6.03

11.84 8.69 1.30 -3.72 -2.41 -0.67 -0.13

(а) Какой будет ожидаемая годовая доходность акции компании *XYZ*, если ее оценить как среднюю доходность за 21 квартал, умноженную на 4?

(б) Приняв индекс *SSS* за рыночный портфель, оцените коэффициент бета акции компании *XYZ*.

(в) Какой будет ожидаемая годовая доходность акции компании *XYZ*, если ее оценить с использованием модели *CAPM* при годовой безрисковой доходности 3.6% ?

6. Пусть для доходностей 5 активов принята следующая трехфакторная модель.

$$R_1 = 0.12 + 0.02 F_1 + 0.01 F_2 + 0.08 F_3$$

$$R_2 = 0.07 + 0. F_1 + 0.03 F_2 + 0. F_3$$

$$R_3 = 0.09 + 0.02 F_1 + 0.02 F_2 + 0. F_3$$

$$R_4 = 0.09 + 0.01 F_1 + 0.04 F_2 - 0.01 F_3$$

$$R_5 = 0.14 + 0.03 F_1 - 0.01 F_2 + 0.05 F_3$$

Доходность безрискового актива  $R_F = 0.04$ . Используя теорию арбитражной оценки (АРТ), проверить данную модель на наличие арбитражных возможностей. При существовании арбитражных стратегий определить их.

7. Рассматриваются  $n$  активов, случайная величина  $R_j$  – доходность  $j$ -го актива.

Доходность портфеля, составленного из этих активов, выражается по формуле

$$R_p = \sum_{j=1}^n x_j R_j, \quad \sum_{j=1}^n x_j = 1,$$

ограничения на короткие продажи отсутствуют. Доказать, что если  $R_p$  – это доходность портфеля с минимальной возможной дисперсией, то  $Cov(R_p, R_j)$  одна и та же при любом  $j, 1 \leq j \leq n$ .

8. Объясните, почему свойство субаддитивности является желательным свойством «денежных» мер риска, обеспечивающим возможность децентрализованного принятия финансовых решений. Покажите, что такая мера риска, как VaR:

- (а) удовлетворяет свойству субаддитивности для нормально распределенных доходов;
- (б) вообще говоря, не удовлетворяет свойству субаддитивности.

9. (а) Рассмотрим американский опцион put на британский фунт. Период до исполнения опциона 1 год, цена исполнения опциона 1,75. Курс фунта на настоящий момент 1,61, волатильность курса 12% в год, безрисковая ставка в долларах 8%, безрисковая ставка в фунтах 6% годовых. Оцените опцион, построив 2-ступенчатое дерево.

- (б) Постройте портфель, хеджирующий опцион.

10. Инвестор занимает следующие позиции в опционах на некоторые бездивидендные акции: 400 коротких опционов put с ценой исполнения 55 и сроком исполнения 4 мес. и 550 коротких опционов call с ценой исполнения 62 и сроком исполнения 6 мес. Цена спот акции 58, волатильность 32% в год, безрисковая ставка 12% годовых. Все опционы европейские. Предложите способ сделать портфель дельта- и гамма-нейтральным, изменяя позиции в базовом активе и одном из указанных опционов.

11. Рассмотрим 2-периодную модель финансового рынка с тремя агентами, каждый из которых имеет следующее начальное распределение дохода: 16 в момент 0 и 50 в момент 1. Каждый агент имеет функцию полезности

$$u(c, C) = \sqrt{c} + \sqrt{C},$$

где  $c$  – потребление в момент 0,  $C$  – потребление в момент 1. Имеется 3 состояния природы в момент 1, причем субъективные вероятности состояния  $k$  равны 0,5 для  $k$ -го агента и 0,25 для других агентов.

(а) (Полный рынок) Предположим, что на рынке имеются 3 ценные бумаги Эрроу-Дебре, соответствующие каждому из 3-х состояний. Покажите, что равновесное распределение на момент 1 для  $k$ -го агента таково: 100 для состояния  $k$  и 25 для других состояний. При помощи какой торговой стратегии достигается это распределение? Найдите цены бумаг Эрроу – Дебре и безрисковую процентную ставку.

(б) (Неполный рынок). На рынке есть лишь одна безрисковая бумага, выплата по которой равна 1 в любом состоянии. Найдите оптимальное распределение, цену безрисковой бумаги и безрисковую процентную ставку. Сравните полученные ответы и ожидаемые полезности потребления с полученными в п. (а).

12. Пусть построена модель с мультипликативной условной гетероскедастичностью (модель 2) для временного ряда

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t,$$

где

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2;$$

$\{v_t\}$  - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, таких, что  $E(v_t) = 0$ ,  $E(v_t^2) = 1$  при  $m = 1$ . При каких  $\alpha_l$  существует эквивалентная ей модель с аддитивной условной гетероскедастичностью (модель 1)

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2 + w_t$$

где  $w_t$  – другой процесс белого шума:

$$E(w_t) = 0$$

$$E(w_t w_{t+s}) = \begin{cases} \lambda^2 & \text{при } s = 0 \\ 0 & \text{при } s \neq 0 \end{cases}$$

а при каких  $\alpha_l$  – нет?

13. Два участника рынка заключают соглашение о форвардной ставке (FRA) с датой измерения плавающей ставки через 3 месяца и с датой выплаты через 6 месяцев. При простой процентной ставке 0.10 при заимствовании на 3 месяца и 0.11 при заимствовании на 6 месяцев какой должна быть фиксированная ставка в указанном соглашении, если при заключении соглашения никаких платежей не производится.

14. Рассмотрим бескупонные облигации с номиналом 1 млн. руб. и с погашением через 6 месяцев и через 1 год. Пусть облигация с погашением через 6 месяцев стоит в текущий момент времени (момент времени 0) 940 тыс. руб., а облигация с погашением через 1 год – 880 тыс. руб. Сколько стоит европейский опцион, дающий право через 1 месяц обменять без каких-либо дополнительных платежей 15 облигаций с погашением через 1 год (считая от настоящего момента времени) на 14 облигаций с погашением через 6 месяцев?

Введем обозначения  $T_1 = 0.5$ ,  $T_2 = 1$ ,  $P(t, T_i)$  – цена в момент времени  $t$  бескупонной облигации с номиналом 1 млн. руб. и с погашением в момент времени  $T_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Допустим, что стохастическая модель для цены каждой из этих облигаций имеет вид

$$dP(t, T_i) = \mu_i(t)P(t, T_i)dt + v(t, T_i)P(t, T_i)dz_t,$$

где  $z_t$  – стандартное броуновское движение, одно и то же для обеих облигаций.

Допустим, что

$$v(t, T_1) = 0.06, \quad v(t, T_2) = 0.08.$$

(Известно, что в подобных моделях для цен облигаций должны выполняться условия  $v(T_1, T_1) = 0$ ,  $v(T_2, T_2) = 0$ . Предположение о равенстве  $v(t, T_i)$  ненулевой константе может быть сделано, поскольку срок истечения опциона равный  $\frac{1}{12}$  (1 месяц) мал по сравнению с  $T_1$  и  $T_2$ . Т.е. интерес представляет диапазон цен  $0 \leq t \leq \frac{1}{12}$ .)

Какие дополнительные предположения были сделаны при расчете цены опциона?

### *Упражнения для занятий с программой DerivaGem*

1. Проверьте, какова скорость сходимости численных методов (расчета по биномиальному дереву) для «обычных» опционов. Для этого найдите цену европейского опциона по формуле Блэка – Шоулза, а затем проведите для того же опциона расчет с помощью дерева с 2, 20, 50 и т.д. шагами. Сколько шагов достаточно, чтобы получить ответ с приемлемой точностью? Как это зависит от параметров опциона?

2. Некоторые утверждают, что цены краткосрочных американских опционов близки к ценам европейских, и поэтому их можно с приемлемой точностью рассчитывать по формуле Блэка – Шоулза. Подставьте какие-либо параметры, достаточно реалистичные, и сравните цены американского и европейского опциона при различных сроках исполнения (начните с 1 месяца). Для каких сроков сказанное выше верно?

3. Для различных опционов проанализируйте зависимость цены от следующих параметров:

- цены исполнения;
- спот-цены актива;
- волатильности;
- безрисковой ставки;
- времени до исполнения.

Постройте графики.

4. Постройте графики дельты по цене актива для европейского и американского опционов put. Объясните отличия графиков.

5. Найдите цены различных экзотических опционов и сравните их со значениями, подсказанными интуицией.

## **5. Примерная тематика рефератов, курсовых работ**

1. Дисконтная ставка и некоторые проблемы ее определения и использования.
2. Методика RiskMetrics.
3. Теория экстремальных значений (EVT) и ее применение для оценки финансовых рисков.
4. Когерентные меры риска.
5. Развитие моделей выбора в условиях риска и неопределенности.
6. “Equity premium puzzle” и теория проспектов.
7. Оценка деривативов методом конечных разностей. .
8. Оценка опционов методом Монте-Карло: проблемы и подходы.
9. Практические аспекты хеджирования деривативами: проблемы и преимущества.
10. Современные практически-ориентированные модели кредитного риска.
11. Процентные деривативы: модели и методы оценки.

## **6. Примерный перечень вопросов к зачету (экзамену) по всему курсу повышения квалификации преподавателей**

1. Как бы Вы построили изложение теории простых и сложных процентов?
2. Какие вопросы представляются наиболее важными при изложении математики процентных ставок?
3. Приведите пример, который бы Вы использовали на лекции для иллюстрации понятия «срочная структура процентной ставки».
4. Постройте конспект лекции о дисконтированной стоимости и ее применении.
5. О каких основных фактах Вы бы упомянули, рассказывая студентам о применении дисперсии в качестве меры риска?
6. На чем бы Вы сделали ударение, сравнивая различные подходы и модели к измерению риска и выбору в условиях риска в финансах?
7. Какие примеры Вы бы выбрали, рассказывая о моделях выбора в условиях риска, обобщающих ожидаемую полезность?
8. С чего бы Вы начали изложение математической теории деривативов? Дайте несколько простых примеров, связанных с форвардами, фьючерсами, опционами.



9. Дайте простейший пример, который позволит студентам понять алгоритм вычисления цен опционов при помощи биномиальных деревьев. Объясните на этом примере смысл понятий «дельта-хеджирование», «синтетический опцион».
10. Представьте, что Вы рассказали студентам об оценивании деривативов при помощи биномиальных деревьев. Как бы Вы построили переход к непрерывным моделям? Приведите последовательность изложения, необходимые результаты, примеры и пр.
11. Представьте, что Вам предстоит вести семинары по теме «оценивание деривативов». Какие задачи Вы бы выбрали?
12. Как бы Вы объяснили студентам смысл понятий «риск-нейтральная вероятность» и «риск-нейтральное оценивание»? Зачем нужно риск-нейтральное оценивание деривативов?
13. Объясните предполагаемым студентам смысл понятия «хеджирование». Проиллюстрируйте его примером.
14. Выпишите формулы Блэка – Шоулза для цен опционов call и put на бездивидендный актив. Опишите подробно теоретические предпосылки и модель, на которую опирается эта формула. Что Вы ответите на вопрос студента о выполнении этих предпосылок на практике и о практической применимости формулы Блэка – Шоулза?
15. Объясните разницу между понятиями исторической и подразумеваемой (implied) волатильности.
16. Объясните смысл понятий «дельта», «гамма», «дельта-нейтральность», «гамма-нейтральность». Приведите пример, которым можно проиллюстрировать практическое значение этих понятий.
17. Расскажите об однопериодной равновесной модели фондового рынка и объясните, как получаются уравнения для цен ценных бумаг в этой модели. Приведите пример.
18. Как бы Вы построили изложение раздела "Процентные финансовые инструменты"?

### III. Распределение часов курса по темам и видам работ

| № п/п | Наименование тем и разделов   | ВСЕГО (часов) | Аудиторные занятия (час) | Самостоятельная работа |
|-------|---|---------------|--------------------------|------------------------|
| 1     | Раздел I. Принятие финансовых решений в условиях определенности и в условиях риска. | 9             | 6                        | 3                      |
| 2     | Раздел II. Математика опционов, фьючерсов, форвардов.                               | 12            | 8                        | 4                      |
| 3     | Раздел III. Хеджирование и риск-менеджмент.   | 9             | 6                        | 3                      |
| 4     | Раздел IV. Модели равновесного ценообразования на фондовом рынке.                   | 3             | 2                        | 1                      |
| 5     | Раздел V. Динамические модели и их использование на финансовых рынках.              | 6             | 4                        | .23                    |
| 6     | Раздел VI. Процентные финансовые инструменты  | 9             | 6                        | 3                      |
|       | ИТОГО:  | 48            | 32                       | 16                     |

### IV. Форма итогового контроля

Итоговый контроль предполагается проводить в форме коллоквиума, на котором слушатели будут представлять самостоятельно те или иные темы курса, лекции (в конспективном изложении), задачи и примеры, а также темы научной работы студентов.

### V. Учебно-методическое обеспечение курса

#### 1. Рекомендуемая литература (основная)

H. Panjer (ed.) et al. (1998) *Financial Economics*. – Schaumburg, Illinois: The Actuarial Foundation (готовится перевод на рус. яз.: Г. Пэнджер (ред.) и др. *Финансовая экономика*).

Hull, J.C. (2002) *Options, Futures, and Other Derivatives*, 5<sup>th</sup> Ed. – Prentice Hall.

## 2. Рекомендуемая литература (дополнительная)

- Cox, J.C., and Rubinstein, M. (1985) *Options Markets*. - Prentice Hall.
- D.Duffie (1996) *Dynamic Asset Pricing Theory*. – Princeton Univ. Press.
- Ingersoll, J. E. (1987) *Theory of Financial Decision Making*. – Rowman and Littlefield.
- Musiela, M. and Rutkowski, M. (1997) *Martingale Methods in Financial Modelling*. - Springer.
- Pliska, S. (1997) *Introduction to Mathematical Finance. Discrete Time Models*. – Blackwell.
- P.Wilmott, S.Howison, J.Dewinne (1995) *The Mathematics of Financial Derivatives. A Student Introduction*. – Cambridge Univ. Press.
- Буренин, А.Н. (2003) *Фьючерсные, форвардные и опционные рынки*, 3-е изд. – М.: НТО им. Вавилова.
- Галиц, Л. (1998) *Финансовая инженерия*. – М.: ТВП.
- Мельников, А.В. (1997) *Финансовые рынки. Стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг*. – М.: ТВП.
- Мельников, А.В., Волков, С.Н., Нечаев, М.Л. (2001) *Математика финансовых обязательств*. – М.: ГУ–ВШЭ.
- Шведов, А. С. (1998) О математических методах, используемых при работе с опционами. – *Экономический журнал Высшей Школы Экономики*, 2, 3, 385 – 409.
- Шведов, А. С. (1999) *Теория эффективных портфелей ценных бумаг*. – М.: ГУ–ВШЭ.
- Шведов, А. С. (2001) *Процентные финансовые инструменты. Оценка и хеджирование*. – М.: ГУ–ВШЭ.
- Шведов, А. С. (2002) Применение метода конечных разностей для оценки финансовых инструментов. – *Экономический журнал Высшей Школы Экономики*, 6, 2, 193 – 216.
- Ширяев, А.Н. (1998) *Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели. Теория*. (Тома 1,2). – М.: ФАЗИС.
- Шоломицкий, А. Г. (2003) *Финансовая математика*. – Статья в: *Экономико-математический энциклопедический словарь*, Большая Российская энциклопедия – ИНФРА-М.
- Шоломицкий, А. Г. (2003) *Выбор при неопределенности и моделирование риска*. – Учебник, подготовленный в рамках Инновационного проекта развития образования.

### Рекомендуемая дополнительная литература по отдельным темам

Хотя при той математической подготовке, которая предполагается у слушателей, хотя бы небольшой курс по теории вероятностей и математической статистике они в свое

время сдавали, опыт показывает, что долгосрочные результаты этого обучения часто оказываются очень плохими, близкими к нулевым. Здесь хорошим подспорьем, с нашей точки зрения, является учебное пособие Шведова А.С. «Теория вероятностей и математическая статистика», второе издание которого в настоящее время готовится в ГУ-ВШЭ (первое издание 1995 г.). Уникальность этого пособия состоит в том, что при сравнительно небольших затратах времени читателя и небольших математических способностях данное пособие позволяет ликвидировать имеющиеся у читателя провалы в понимании предмета и вывести его на тот уровень, на котором возможна работа с некоторыми курсами по финансовой математике.

Представляется также полезным дать здесь такой (конечно, выборочный) список литературы, которую слушатели могли бы использовать в дальнейшем при работе над собственными курсами, а также черпать в них материал для студенческих рефератов, эссе, курсовых работ и т.д. Некоторые из статей, указанных ниже, можно найти в свободном доступе в Интернет, тексты ряда других будут включены в хрестоматию по курсу. Литература дана преимущественно по темам, изложение которых будет носить обзорный характер.

#### *Тема 1.*

Promyslov, D. A new approach to interest rates. Trans. Soc. Actuaries. 1980.

#### *Тема 2.*

Смоляк, С. А. (2002) *Оценка эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности (теория ожидаемого эффекта)*. – М.: Наука.

Koopmans, T. C. (1960) Stationary ordinal utility and impatience. – *Econometrica*, 28, 2, 287 – 309.

Loevenstein, G., and Prelec, D. (1992) Anomalies in intertemporal choice: evidence and interpretation. – *Quarterly J. of Economics*, 107, 2, 573 – 597.

#### *Тема 6.*

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., and Heath, D. (1999) Coherent measures of risk. – *Mathematical Finance*, 9, 3, 203 – 228.

Borch, K. (1974) The rationale of the mean-standard deviation analysis: comment. – *American Economic Review*, 64, 428 – 430.

Phelan, M. (1995) *Probability and statistics applied to the practice of financial risk management: the case of JPMorgan's RiskMetrics*. – Working Paper 95-19, Wharton Business School, Univ. of Pennsylvania.

*Тема 7.*

Starmer, C. (2000) Developments in non-expected utility theory: the hunt for a descriptive theory of choice under risk. – *J. of Economic Literature*, XXXVIII, 332 – 382.

*Тема 19.*

Crouhy, M., Galai, D., Mark, R. (2000) A comparative analysis of current credit risk models. – *J. of Banking and Finance*, 24, 59 – 117.

### **3. Перечень обучающих, контролирующих компьютерных программ, кино- и телефильмов, мультимедиа и т.п.**

*Обучающая программа DerivaGem.* Данная учебная программа была создана для сопровождения известного учебника Дж. Халла (J. Hull), указанного выше в списке литературы. Позволяет рассчитывать цены широкого ассортимента деривативов на различные базовые активы и иллюстрирует расчеты графиками, диаграммами деревьев цен и пр. Программу можно найти на странице Дж. Халла в Интернете: [www.rotman.utoronto.ca/~hull](http://www.rotman.utoronto.ca/~hull).