Математическое приложение 1

Основные положения матричной алгебры применительно к задачам бухгалтерского учета

Настоящее приложение составлено для того, чтобы не загромождать основной текст определениями, утверждениями, числовыми примерами и математическими выкладками, относящимся к общим положениям матричной алгебры.

С другой стороны, без данного приложения чтение третьей главы было бы затруднительным, поскольку в ней предлагается принципиально новый подход к использованию в бухгалтерском учете матриц, не как обычных классификационных таблиц, а как математических объектов, над которыми проводятся по формальным правилам определенные операции матричной алгебры

Это относится, прежде всего, к исследованиям свойств зеркально симметричных матриц, к операциями транспонирования, к операциям умножения, где специального вида матрицы используются как операторы суммирования, выделения, окаймления и деокаймления матриц, а также, что особенно важно, — к разложению матриц по базису их линейного пространства.

1.1.Матрицы и их виды

Определение 1. Матрицей называется прямоугольная таблица следующего вида:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

на пересечении строк и столбцов которой находятся числа или другие объекты a_{ij}, наполняющие матрицу, где $i = 1, 2, \ldots, m$ — это номер строки; $j = 1,2, \ldots,n$ — номер столбца.

Число строк m и число стобцов n определяют размер матрицы, который обозначают как произведение строк на число столбцов $m \times n$, и поэтому говорят матрица *размером* $m \times n$.

Размер матрицы является ее важнейшей характеристикой, определяющей вид матрицы и действия над ней.

Матрицы обозначают большими жирными латинскими буквами **A,B,C, ..., S, ..., X, Y, Z**, а элементы матрицы — числа наполняющие ее, обозначают малыми или большими, но нежирными буквами, соответственно, a,b,c, ..., s, ..., x, y, z или A,B,C, ..., S, ..., X, Y, Z.

Существуют и другие обозначения матриц, например, $\mathbf{A}_{m,n} = \{a_{ij}\}_{m,n}$, где в фигурных скобках показан типичный элемент матрицы и указаны пределы изменения индекса строки m и индекса столбца n.

Отметим также, что индексы элементов матрицы i,j необязательно указывать в подстрочнике. Мы, например, будем широко использовать обозначение индексов в скобках, разделяя их запятой, поскольку, очевидно, что запись, например, $\mathbf{S}_{m,m} = \{s_{ij}\}_{m,m}$ и запись этой же матрицы в виде $\mathbf{S}_{m,m} = \{\mathbf{S}(I,J)\}_{m,m}$ — эквивалентные формы представления информации об одной и той же матрице.

Определение 2. Матрица называется *прямоугольной*, если число ее строк не равно числу ее столбцов, т.е. если $m \neq n$.

Например, матрицы

$$\mathbf{A}_{2,3} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{3,2} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 8 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

это прямоугольные матрицы разного размера: матрица **A** имеет 2 строки и 3 столбца; матрица **B**, соответственно, 3 строки и 2 столбца.

Определение 3. Матрица называется *квадратной*, если число ее строк равно числу ее столбцов, т.е. если $m = n$.

$$\mathbf{A}_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

Элементы квадратной матрицы a_{ij}, у которых индексы совпадают, т.е. $i = j$, называются элементами главной диагонали. Они и образуют ее из элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$. В приведенном примере главная диагональ состоит из элементов: $a_{11} = 1$, $a_{22} = 5$, $a_{33} = -9$.

Квадратные матрицы являются тем классом матриц, которые заслуживают отдельного внимания, поскольку они представляют особый интерес для моделирования бухгалтерского учета.

Определение 4. Квадратная матрица называется *симметричной*, если симметричные относительно главной диагонали элементы a_{ij} и a_{ji} равны между собой, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$ для всех $i = 1,2, \ldots,m$; $j = 1,2, \ldots,m$.

Например, приводимая ниже квадратная матрица симметрична, поскольку выполняются условия определения:

$$\mathbf{A}_{3,3} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Определение 5. Квадратная матрица называется *антисимметричной* или, что то же самое, *зеркально симметричной*, если между симметричными относительно главной диагонали элементами a_{ij} и a_{ji} имеет место равенство: $a_{ij} = -a_{ji}$ для всех $i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,m$, у которых $i \neq j$, т.е. для всех элементов, кроме элементов главной диагонали.

Например, приводимые ниже квадратные матрицы зеркально симметричны, поскольку выполняются условия определения:

$$\mathbf{A}_{3,3} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B}_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Вторая матрица — частный случай зеркально симметричной матрицы, у которой элементы главной диагонали равны нулю, представляет особый интерес для бухгалтерского учета, так как именно так выглядит сальдовая матрица, получаемая как разность между исходной и транспонированной к ней матрицы.

Определение 6. Квадратная матрица называется *диагональной*, если элементы ее главной диагонали не все равны нулю, а все остальные, внедиагональные элементы нулевые.

Например:

$$\mathbf{A}_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Определение 7. Диагональная матрица называется *единичной*, если каждый элемент ее главной диагонали равен единице.

$$\mathbf{E}_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица играет в матричной алгебре такую же роль, как число 1 в обычной алгебре. Ее обычно обозначают латинской буквой **I** или **E**. Мы принимаем в настоящей работе ее обозначение буквой **E**.

Как следует из определения, единичная матрица может быть только *квадратной*, прямоугольная матрица не может быть диагональной, так как у нее отсутствует ось симметрии, т.е. главная диагональ.

В отличие от этого нулевая матрица, которая играет ту же роль в матричной алгебре, что и нуль в обычной алгебре, может быть как квадратной, так и прямоугольной.

Определение 8. Матрица $\mathbf{O}_{m,n}$ размером $m \times n$ называется *нулевой* матрицей, если все ее элементы нулевые.

$$\mathbf{O}_{2,3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \mathbf{O}_{3,2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad \mathbf{O}_{2,2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad \mathbf{O}_{3,3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Определение 9. Матрицы **A** и **B** называются *равными*, если одновременно выполняются два условия:

1) матрицы **A** и **B** имеют одинаковый размер и
2) соответствующие элементы матриц равны между собой: $a_{ij} = b_{ij}$ для всех $i = 1,2,..., m$; $j = 1,2,\ldots,n$.

В смысле данного определения четыре выше приведенные нулевые матрицы не равны между собой и только потому, что имеют разные размеры.

Матрицы, приводимые ниже, также не равны между собой:

$$\mathbf{A}_{2,3}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\quad \mathbf{B}_{3,2}=\begin{pmatrix}1&3&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

только потому, что не совпадают элементы $a_{12} = 2$ и $b_{12} = 3$, хотя размеры матриц одинаковы и все остальные элементы равны между собой.

Определим еще один вид квадратных матриц — *треугольные* матрицы, которые также имеют отношение к бухгалтерскому учету. Они подразделяются на верхне- и нижнетреугольные.

Определение 10. Квадратная матрица называется *верхнетреугольной*, если *не все* элементы над главной диагональю равны нулю, а *все* элементы под главной диагональю равны нулю.

Определение 10′. Квадратная матрица называется *нижнетреугольной*, если *все* ее элементы над главной диагональю равны нулю, а *не все* элементы под главной диагональю равны нулю.

Приводимые ниже примеры треугольных матриц удовлетворяют условиям данных определений:

Верхнетреугольная Нижнетреугольная

$$\mathbf{A}_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Следующее определение относится ко всем видам матриц (и векторов), поскольку оно классифицирует их в зависимости от знаков элементов, наполняющих матрицы (и векторы).

Определение 11. Матрица называется *полуположительной*, если все ее элементы больше или равны нулю, т.е. *неотрицательны.*

Определение 11′. Матрица называется *полуотрицательной*, если все ее элементы меньше или равны нулю, т.е. *неположительны.*

В приведенном выше примере верхнетреугольная матрица относится к классу полуположительных, нижнетреугольная — к классу полуотрицательных матриц.

Разновидностью матриц являются векторы.

Определение 12. Вектор — это матрица размером $m \times 1$ или размером $1 \times m$.

Вектор размером $m \times 1$ называется *вектором-столбцом.* Он содержит m строк и один столбец, например, вектор-столбец:

$$\mathbf{a}_{3,1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$ содержит три строки и один столбец.

Вектор размером $1 \times m$ называется *вектором-строкой.* Он содержит одну строку и m столбцов, например, вектор-строка:

$\mathbf{a}'_{1,3} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ содержит одну строку и три столбца.

Несколько необычное для экономических задач название «вектор», которое ассоциируется с понятием физического вектора, т.е. *направленного отрезка*, при внимательном рассмотрении вполне соотносится с понятием «направление». Действительно, в векторах, в отличие от *множеств*, числа *упорядочены в* *определенном направлении* — каждое число в нем занимает определенную *позицию*: в векторе-столбце числа расположены по направлению «сверху-вниз» ($a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 1$), в векторе-строке — по направлению «слева-напрво» ($a'_1 = 3$, $a'_2 = 5$, $a'_3 = 1$).

Здесь, конечно, речь идет просто о порядке расположения чисел в числовом векторе-столбце или -строке, но в более глубоком смысле вектор однозначно определяет позицию «точки» в n-мерном евклидовом пространстве, т.е. задает направление отрезка, определяемом координатами «точки» в этом пространстве.

При этом упорядочение здесь должно пониматься не в смысле упорядочения чисел по возрастанию или по уменьшению, а по позиции занимаемой числом раз и навсегда. В отличие от этого, те же самые числа, записанные как множества чисел {3, 5, 1} не связаны с их позицией в представленной записи. Поэтому равенство, а точнее эквивалентность двух множеств, это совпадение элементов двух множеств независимо от расположения в них этих элементов.

Так, два множества {3, 5, 1} и {1, 5, 3}, также как и множества {3, 5, 1} и {1, 3, 5}, с точки зрения теории множеств рассматриваются как одно и то же множество чисел, но как векторы эти множества совершенно различны, так как упорядоченность элементов вектора, т.е. определенное местоположение чисел — это основной отличительный признак матриц и векторов. В нашем примере вектор-строки $\mathbf{a}' = (3, 5, 1)$ и $\mathbf{b}' = (1, 5, 3)$ не равны между собой, так как согласно определению 9 — равенства матриц (векторов) они представляют собой совершенно различные векторы.

Все только что сказанное о векторах и множествах полностью относится к матрицам и соответствующим им множествам.

Чтобы отличать от матриц векторы, их, т.е. векторы, принято обозначать малыми жирными латинскими буквами: **a, b, c, …, s, …, x, y, z**. А для того, чтобы отличать вектор-строку от вектора-столбца, ее, т.е. вектор-строку, принято обозначать малой жирной латинской буквой, но со штрихом, соответственно: **a′, b′, c′, …, s′, …, x′, y′, z′.** Отметим, что такое обозначение (см. далее) указывает на то, что вектор-строка — это *транспонированный* вектор-столбец.

Заметим также, что любая матрица может быть представлена как вектор-столбец, элементами которой являются вектор-строки, или же как вектор-строка, элементами которой являются векторы-столбцы. Например, матрица:

$$\mathbf{A}_{2,3} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$ может быть представлена как вектор-

столбец: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_2 \end{pmatrix}$, состоящий из следующих векторов-строк:

$\mathbf{a}'_1 = (3\ 4\ 5)$ и $\mathbf{a}'_2 = (-7\ 8\ 9)$.

С другой стороны, ту же самую матрицу можно представить как вектор-строку $A = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3)$, состоящую из следующих векторов-столбцов: $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Заключая рассмотрение различных видов матриц (и векторов), следует рассмотреть еще один их вид — окаймленные матрицы, которые обычно не рассматриваются в стандарных курсах по линейной алгебре или рассматриваются, но вскользь. В то же время окаймленные матрицы, т.е. матрицы содержащие итоги строк и столбцов, имеют непосредственное отношение к задачам бухгалтерского учета. Причина невнимания к этому виду матриц со стороны математиков вполне понятна, так как окаймленные матрицы избыточны в том смысле, что содержат линейно зависимые строки и столбцы в виде итоговых строк и столбцов, от которых по необходимости следует всегда избавляться. Но, тем не менее, в контексте настоящей работы окаймленные матрицы требуют специального рассмотрения.

Определение 13. Матрица размером $(m+1) \times (n+1)$ называется *окаймленной* матрицей, если ее последний ее $n+1$ столбец размером $(m+1) \times 1$ является суммой предыдущих векторов-столбцов такого же размера, а ее последняя $m+1$ строка размером $1 \times (n+1)$ является суммой предыдущих векторов-строк такого же размера.

Примеры матриц (и векторов) этого вида приводятся ниже:

$$\mathbf{A}_{(2+1),(3+1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ \hline 5 & 7 & 9 & 21 \end{array}\right), \quad \mathbf{A}_{(3+1),(3+1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & 0 & 9 & 5 \\ -5 & -9 & 0 & -14 \\ \hline -9 & -5 & 14 & 0 \end{array}\right),$$

$$\mathbf{a}_{(2+1),1} = \left(\begin{array}{c} 6 \\ 15 \\ \hline 21 \end{array}\right), \quad \mathbf{b}'_{(2+1),1} = (-9 \quad -5 \quad 14 \mid 0).$$

1.2.Сложение и вычитание матриц

<u>Определение 1</u>. *Суммой* двух матриц одинакового размера $\mathbf{A}_{m,n}$ и $\mathbf{B}_{m,n}$ называется третья матрица $\mathbf{C}_{m,n}$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц-слагаемых: $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ для всех $i = 1,2,\ldots, m$ и $j = 1,2,\ldots, n$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A}_{2,3} & & \mathbf{B}_{2,3} & & \mathbf{C}_{2,3} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 9 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ -3 & 0 & 18 \end{pmatrix} \end{array}$$

Таким образом, сложение матриц сводится к сложению соответствующих элементов матриц-слагаемых. Не все матрицы можно складывать, а только те, которые имеют одинаковый размер, и матрица-сумма тоже будет того же размера, что и матрицы-слагаемые. В этом случае говорят, что матрицы *согласованы* для сложения.

Сложение матриц обладает обычными свойствами аддитивности и коммутативности:

<u>Свойство 1</u>. *Коммутативность*: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, т.е. матрицы, согласованные для сложения можно складывать в любом порядке.

<u>Свойство 2</u>. *Ассоциативность*: $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$, т.е., как и в обычной алгебре, можно вначале сложить **B** и **C**, а затем прибавить к ним **A**, или же вначале сложить **A** и **B**, а к

ним прибавить **C**. Результат сложения будет один и тот же.

Определение 2. *Разностью* двух матриц $\mathbf{A}_{m,n}$ и $\mathbf{B}_{m,n}$ называется третья матрица $\mathbf{C}_{m,n}$ того же размера, каждый элемент которой равен разности соответствующих элементов матриц — уменьшаемого и вычитаемого: $c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j}$ для всех $i = 1,2,\dots, m$ и $j = 1,2,\dots,n$.

$$\underset{\mathbf{A}_{2,3}}{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}} - \underset{\mathbf{B}_{2,3}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 9 \end{pmatrix}} = \underset{\mathbf{C}_{2,3}}{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -11 & 16 & 0 \end{pmatrix}}$$

Вычитание матриц также сводится к вычитанию соответствующих элементов матриц. Как и в случае сложения матрицы должны быть *согласованы* для действия вычитания, т.е. должны иметь *одинаковый размер*.

1.3.Умножение матрицы на скаляр (число)

Определение. Операция умножения матрицы на скаляр-число λ — это есть умножение каждого ее элемента на это число, что можно записать следующим образом:

$$\lambda\, \mathbf{A}_{m,n} = \mathbf{B}_{m,n} = \{\lambda \cdot a_{ij}\}_{m,n}.$$

Например, при $\lambda = 3$ получаем следующее преобразование исходной матрицы **A** в матрицу **B**:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -7 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 \\ -21 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Следует понимать что само число *не имеет позиции* и поэтому его принято в этом смысле называть *скалярной величиной*, но при умножении на матрицу (или вектор) число, умноженное на ее элемент, занимает уже в матрице определенную позицию и становится таким образом ее элементом, как например, при умножении на матрицы или векторы специального вида:

$$3\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix},\quad 5\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$$

$$3\cdot\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\\hline 0&0&1&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&0&3&3\\0&0&0&0\\\hline 0&0&3&3\end{array}\right),\quad 5\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\\overline{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\\overline{5}\end{pmatrix}$$

Здесь при умножении на скаляр число автоматически попадает в те позиции, в которых содержатся единицы. При этом в окаймленной матрице (векторе) число копируется в соответствующих итоговых позициях.

Рассмотренные выше матрицы, которые содержат единицы в соответствующих позициях, образуют *базис* пространства матриц определенного класса. Так, например, базисом или *базисным пространством* квадратных матриц размером 3×3 будут девять следующих матриц:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\cdots\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Мы будем обозначать их соответственно позиции, занимаемой единицей:

$$\mathbf{E}_{11},\ \mathbf{E}_{12},\ \ldots,\ \mathbf{E}_{23},\ \ldots,\ \mathbf{E}_{33}.$$

Количество матриц, образующих базисное пространство матрицы, всегда равно количеству ее элементов. Для класса квадратных матриц размером $m \times m$ их количество будет равно $m \times m$ или m^2 (в нашем примере их соответственно $3 \times 3 = 9$), для общего случая — прямоугольных матриц, которые включают и класс квадратных матриц, количество матриц, образующих базисное пространство, будет соответственно равно $m \times n$.

<u>Утверждение 1</u>. Любая матрица $\mathbf{A}_{\mathbf{m,n}}$, какая бы она ни была, всегда и при том *единственным образом* может быть представлена-разложена как сумма произведений ее элементов — скаляров a_{ij} на базисные матрицы $\mathbf{E}_{ij}$ (i = 1,2, …, m; j = 1,2, …, n) ее пространства:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{m,n}} = a_{11}\cdot \mathbf{E}_{11} + a_{12}\cdot \mathbf{E}_{11} + \ldots + a_{mn}\cdot \mathbf{E}_{mn}$$

или, в краткой записи:

$$\mathbf{A}_{m,n} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{E}_{ij}$$

Например, приводимая ниже квадратная матрица размером 3×3 следующим образом разлагается по базисным матрицам ее пространства:

$$\mathbf{A}_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + 4\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Утверждение 2</u>. Сумма $\mathbf{C}_{m,n}$ двух матриц $\mathbf{A}_{m,n}$ и $\mathbf{B}_{m,n}$ может быть разложена по общему их базисному пространству, где скалярными множителями-коэффициентами линейного разложения будут суммы соответствующих элементов матриц $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Например, пусть дана сумма двух квадратных матриц $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+1 & 5+0 \\ 8-4 & 7+2 & 6+1 \\ 2+3 & 3+5 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 7 \\ 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Базисное разложение матрицы А показано выше, разложение матрицы В будет следующим:

$$\mathbf{B}_{3,3}=\begin{pmatrix}2&1&0\\-4&2&1\\3&5&2\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\cdots+2\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Обе матрицы **A** и **B**, как и их сумма — матрица **C**, имеют одно и то же — общее базисное пространство. При суммировании одноименные базисные матрицы $\mathbf{E}_{ij}$ будут вынесены за скобки и в результате получим:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(1+2)\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+(3+1)\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\cdots+(4+2)\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=3\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\cdots+6\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4&5\\4&9&7\\5&8&6\end{pmatrix}=\mathbf{C}$$

Для окаймленных матриц их базисное пространство формируется из соответствующих окаймленных матриц, содержащих также единицы в соответствующих позициях итогового столбца и итоговой строки. Ниже предлагается тот же самый пример разложения, но для окаймленной матрицы по базису, состоящему из 16 матриц (4×4):

$$\mathbf{A}_{3+1,3+1}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&5&9\\8&7&6&21\\2&3&4&9\\\hline 11&13&15&39\end{array}\right)=1\cdot\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\hline 1&0&0&1\end{array}\right)+3\cdot\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\hline 0&1&0&1\end{array}\right)+5\cdot\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\hline 0&0&1&1\end{array}\right)$$

$$+9\cdot\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right)+\cdots+11\cdot\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\hline 1&0&0&1\end{array}\right)+13\cdot\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\hline 0&1&0&1\end{array}\right)+15\cdot\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\hline 0&0&1&1\end{array}\right)$$

$$+39\cdot\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right)$$

1.4.Умножение матриц

Определение 1. *Произведением* матриц $\mathbf{A}_{m,s}$ и $\mathbf{B}_{s,n}$ является третья матрица $\mathbf{C}_{m,n}$, каждый элемент которой получен по определенному правилу умножения строки левой матрицы $\mathbf{A}_{m,s}$ на столбец правой матрицы $\mathbf{B}_{s,n}$ в соответствии с формулой:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}$$

где i = 1,2,…, m; k = 1,2,…, s; j = 1,2,…, n.

Ниже показан процесс и результат умножения матриц $\mathbf{A}_{2,3}\cdot \mathbf{B}_{3,2} = \mathbf{C}_{2,2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+0\cdot4+3\cdot2 & 1\cdot-1+0\cdot0+3\cdot3 \\ -2\cdot2+4\cdot4+0\cdot3 & -2\cdot-1+4\cdot0+0\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$$

Необходимо сразу же обратить внимание на то, что не всякие две матрицы могут быть умножены, а только те, которые *согласованы* для умножения *своими размерами*.

Критерий согласованности размеров умножаемых матриц вытекает из правила умножения: число элементов строки левой матрицы **A** обязательно должно равняться числу элементов столбца правой матрицы **B**.

Размер же матрицы **C** определяется числом столбцов матрицы **A** и числом строк матрицы **B**.

Все сказанное можно сформулировать в виде мнемонического правила:

1. Матрицы $\mathbf{A}_{m,s}$ и $\mathbf{B}_{s,n}$ согласованы для умножения, если внутренние индексы их размеров совпадают (s = s). В противном случае они не согласованы для умножения;

2. Размер матрицы $\mathbf{C}_{m,n}$, если выполнено условие 1), определяется внешними индексами размеров матриц $\mathbf{A}_{m,s}$ и $\mathbf{B}_{s,n}$. Совпадающие внутренние индексы в этом случае как-бы поглощаются.

Используя вышеприведенное мнемоническое правило, можно, например, сразу определить, что матрицы $\mathbf{A}_{5,3}$ и $\mathbf{B}_{5,3}$ не согласованы для умножения, так как их внутренние индексы 3 и 5 не совпадают. Поэтому в данном случае нет смысла говорить о результате умножения — матрице **C**, поскольку таковая для двух этих матриц не существует.

А вот матрицы (векторы) $\mathbf{A}_{5,1}$ и $\mathbf{B}_{1,7}$ согласованы для умножения, поскольку их внутренние индексы 1 и 1 совпадают. Их произведением будет матрица **C** размером 5×7.

Произведение матриц (векторов) $\mathbf{A}_{1,10}$ и $\mathbf{B}_{10,1}$ также существует, но результатом произведения будет число — скалярная величина, т.е. матрица **C** размером 1×1.

В связи с тем, что не все матрицы согласованы для умножения, операция умножения матриц в отличие от операции умножения в обычной алгебре не обладает свойством коммутативности, т.е. матричное умножения в общем случае некоммутативно: $\mathbf{A}{\cdot}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}{\cdot}\mathbf{A}$.

Так, например, можно умножить слева матрицу $\mathbf{A}_{5,1}$ и $\mathbf{B}_{1,7}$, так как произведение $\mathbf{A}_{5,1} \cdot \mathbf{B}_{1,7} = \mathbf{C}_{5,7}$ существует, но нельзя выполнить умножения матрицы $\mathbf{B}_{1,7}$ на матрицу $\mathbf{A}_{5,1}$, так как их произведения в этом случае не существует.

В то же время, для матриц $\mathbf{A}_{m,s}$, $\mathbf{B}_{s,r,}$ $\mathbf{C}_{r,n,}$ согласованных для умножения, выполняется, как в обычной алгебре, свойство *ассоциативности*:

$$\mathbf{A}_{m,s}(\mathbf{BC})_{s,n} = (\mathbf{ABC})_{m,n} \text{ и } (\mathbf{AB})_{m,r}\mathbf{C}_{r,n} = (\mathbf{ABC})_{m,n},$$

А отсюда и следует, что умножение согласованных матриц ассоциативно: $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$.

1.5.Транспонирование матриц

Определение 1. Матрица $\mathbf{A}'$ называется *транспонированной*[21] по отношению к матрице **A**, если строки матрицы $\mathbf{A}'$ яв-

21. В настоящем контексте транспонированная матрица обозначается штрихом «′», но достаточно часто в в математической литературе для обозначения операции транспонирования используется надстрочный значок «Т». Например, в этом случае вместо A′ употребляют обозначение A^{T}.

ляются столбцами матрицы **A** и, наоборот, столбцы матрицы **A′** являются строками матрицы **A**.

При транспонировании прямоугольных матриц происходит изменение — инверсия их размера с **m** × **n** на **n** × **m**; при транспонировании же квадратных матриц размер их не изменяется. Ниже приводятся примеры транспонирования прямоугольных и квадратных матриц:

Исходнаяматрица Транспонированная к ней

$$\mathbf{A}_{2,3} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}'_{3,2} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 8 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Исходнаяматрица Транспонированная к ней

$$\mathbf{A}_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}'_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Исходнаяматрица Транспонированная к ней

$$\mathbf{A}_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}'_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Последний пример — транспонирование симметричной матрицы: в результате ничего не изменилось и **A** = **A′**. Во всех остальных случаях операция транспонирования изменяет исходную матрицу и **A** ≠ **A′**. Ниже приводятся примеры транспонирования особого вида матриц:

Исходнаяматрица Транспонированная к ней

$$\mathbf{A}_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}'_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Исходнаяматрица Транспонированная к ней

$$\mathbf{A}_{3,3}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 6\\ -3 & -6 & 9\end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}'_{3,3}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 2 & 5 & -6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

В первом примере верхнетреугольная матрица **A** превращается в нижнетреугольную матрицу **A′.**

Во втором — зеркально симметричная матрица **A** превращается в *противоположную* ей также зеркально симметричную матрицу **A′.** В этом последнем случае: **A** = – **A′** и, наоборот**, A** = – **A′.**

При транспонировании вектора-столбца он превращается в вектор-строку и, наоборот, вектор-строка превращается в вектор-столбец. Этот факт, как уже отмечалось, зафиксирован в обозначении вектора-строки, которая с тем, чтобы отличить ее от вектора-столбца помечается штрихом «′».

Исходнай вектор Транспонированный вектор

$$\mathbf{a}_{3,1}=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}'_{1,3}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

Во всех случаях имеет место равенство соответствующих типичных элементов исходной $\mathbf{A}_{m,n}$ и транспонированной к ней матрицы $\mathbf{A}'_{n,m}$, т.е. всегда: $\mathbf{a}_{i,j} = \mathbf{a}'_{j,i}$ для $i = 1,2,\ldots, m; j = 1,2,\ldots,n$. В связи с этим можно дать более строгое определение определение транспонирования матрицы.

<u>Определение 1′</u>. Матрица **A′** называется *транспонированной* по отношению к матрице **A,** если типичный элемент матрицы **A′** равен типичному элементу матрицы **A** с *инвертированными индексами*, т.е., если соблюдается равенство: $a'_{i,j} = a_{j,i}$ для всех $i = 1,2, \ldots, m; j = 1,2,\ldots,n$.

Укажем на следующее свойство операции транспонирования:

«Дважды транспонированная матрица всегда равна исходной матрице», т.е. всегда: **(A′)′ = A″.**

Ниже приводится числовой пример, иллюстрирующий это свойство:

Исходная матрица	Транспонированная к ней	Транспонированная от транспонированной
$\mathbf{A}_{2,3}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	$\mathbf{A}'_{3,2}=\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 8 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$	$(\mathbf{A}'_{3,2})'=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Рассматриваемое свойство легко доказать, основываясь на последнем определении 1′ транспонированной матрицы.

Действительно, при первом транспонировании инвертируются индексы в равенстве: $a'_{i,j} = a_{j,i}$, при втором транспонировании они снова инвертируются: $(a_{j,i})' = a_{i,j}$. И далее, при третьем транспонировании: $a'_{i,j} = a_{j,i}$, при четвертом: $(a_{j,i})' = a_{i,j}$, и так далее, для всех $i = 1,2, \ldots, m$; $j = 1,2,\ldots,n$.

Таким образом, имеем:

Свойство 1. *Четное* число операций транспонирования матрицы *не изменяет ее*, в то время, как *нечетное* число операций *транспонирует* исходную матрицу.

Кроме того, операция транспонирования матриц обладает следующими свойствами:

Свойство 2. Транспонированная сумма (разность) матриц равна сумме транспонированных матриц:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$$

Свойство 3. При умножении суммы матриц на скаляр λ получаем сумму транспонированных матриц, каждая из которых умножена на скаляр λ:

$$\lambda \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \lambda \cdot \mathbf{A}' + \lambda \cdot \mathbf{B}'$$

Свойство 4. Транспонированное произведение матриц равно произведению транспонированных матриц, где сомножители взяты в обратном порядке:

$$(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$$

Рассмотрим теперь свойства, связанные с зеркальной симметрией квадратных матриц, так как они связаны непосредственно с операциями и транспонирования и имеют, как это показано в настоящей работе, *фундаментальное* значения для понимания *природы двойной записи* и моделирования бухгалтерского учета.

Утверждение 1. Любая числовая матрица, какая бы она ни была, представима как сумма полуположительной и полуотрицательной матриц.

Ниже приводятся примеры, иллюстрирующие данное утверждение:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь матрица **A** представлена в виде суммы двух матриц: полуположительной $\mathbf{A}^+$, которая слева (все ее элементы ≥ 0, т.е. неотрицательны), и полуотрицательной $\mathbf{A}^-$, расположенной справа, и все элементы которой ≤ 0, т.е. неположительны.

Таким образом: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-$, где надстрочным значком «+» помечена полуположительная, соответственно, значком «–» — полуотрицательная матрица. Эти обозначения будут использоваться здесь и в основном тексте настоящей работы.

Отметим, что разложение $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-$ формально осуществимо и в том случае, если матрица сама является полуположительной (или полуотрицательной). В первом случае (**A** — полуположительная матрица) полуотрицательной матрицей считается нулевая матрица и разложение имеет тот же вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-$$

Здесь $\mathbf{A}^- = \mathbf{O}$, так как нулевая матрица может рассматриваться как полуотрицательная — все ее элементы неположительны, поскольку равны нулю, и, соответственно, для второго случая (**A** — полуотрицательная матрица) нулевая матрица рассматривается как полуположительная ($\mathbf{A}^+ = \mathbf{O}$) — все ее элементы неотрицательны, поскольку равны нулю.

Ниже приводится пример особого случая — разложения зеркально симметричной матрицы **A** на полуположительную $\mathbf{A}^+$

и полуотрицательную $\mathbf{A}^-$, имеющий непосредственное отношение к бухгалтерскому учету, поскольку именно так выглядит *сальдовая* матрица (см. далее):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Между этими двумя матрицами, полуположительной и полуотрицательной, всегда существует связь, которая ниже сформулирована в форме утверждения:

Утверждение 2. Для случая разложения зеркально симметричной матрицы *ее полуположительная матрица всегда равна ее транспонированной полуотрицательной матрице, взятой с противоположным знаком и, наоборот, т.е.:*

$$\mathbf{A}^+ = -(\mathbf{A}^-)' \text{ и, наоборот: } \mathbf{A}^- = -(\mathbf{A}^+)'$$

В нашем примере

$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Транспонируем полуотрицательную матрицу:

$$(\mathbf{A}^-)' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Сопоставляя транспонированную матрицу $(\mathbf{A}^-)'$ с полуположительной $\mathbf{A}^+$ видим, что элементы их различаются только знаками:

$$\mathbf{A}^{+}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (\mathbf{A}^{-})'=\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

Умножим скалярно матрицу $(\mathbf{A}^{-})'$ на -1, в результате чего получаем:

$$-(\mathbf{A}^{-})'=-1\cdot\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & +2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ +4 & +2 & 0\end{pmatrix}$$

Таким образом показано, что: $\mathbf{A}^{+} = -(\mathbf{A}^{-})'$. Рассуждая аналогично, нетрудно видеть, что справедливо и обратное:
$\mathbf{A}^{-} = (\mathbf{A}^{+})'$.

Рассмотрим теперь особый случай вычитания двух окаймленных матриц: исходной **S** и транспонированной к ней **S′**. Разность этих двух матриц обозначим $\mathbf{S} - \mathbf{S}' = \Delta\mathbf{S}$. Приводимый ниже пример иллюстрирует это уравнение:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S} & \mathbf{S}' & \Delta\mathbf{S} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6\\ 4 & 5 & 6 & 15\\ 7 & 8 & 9 & 24\\ \hline 12 & 15 & 18 & 45\end{array}\right) & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 12\\ 2 & 5 & 8 & 15\\ 3 & 6 & 9 & 18\\ \hline 6 & 15 & 25 & 45\end{array}\right) & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -4 & -6\\ 2 & 0 & -2 & 0\\ 4 & 2 & 0 & 6\\ \hline 6 & 0 & -6 & 0\end{array}\right)\end{array}$$

Матрица $\Delta\mathbf{S}$ названа в настоящей работе *сальдовой* матрицей и она обладает следующими *двумя замечательными свойствами*:

<u>Свойство 1</u>. Она зеркально симметрична относительно главной (нулевой) диагонали, т.е. всегда справедливо равенство для ее элементов с инвертированными индексами: $\Delta S(X,Y) = -\Delta S(Y, X)$ и, наоборот, $\Delta S(Y, X) = -\Delta S(X, Y)$ для всех $X, Y = 1,2, \ldots, M$, где M — количество строк = количеству столбцов матрицы $\Delta\mathbf{S}$.

<u>Свойство 2</u>. Сумма всех элементов сальдовой матрицы всегда равна нулю:

$$\Sigma\, \Delta S(X, Y) = 0.$$

<u>Утверждение 3</u>. Сумма двух любых зеркально симметричных сальдовых матриц $\Delta\mathbf{S}1$ и $\Delta\mathbf{S}2$ одинакового размера есть также зеркально симметричная матрица $\Delta\mathbf{S}3$ того же размера, обладающая вышерассмотренными свойствами 1 и 2.

Пример:

$$\underset{\Delta\mathbf{S}_1}{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -4 & -6 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \\ \hline 6 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right)} + \underset{\Delta\mathbf{S}_2}{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 & -4 \\ -3 & 5 & 0 & 2 \\ \hline -2 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)} = \underset{\Delta\mathbf{S}_3}{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -7 & -4 \\ 1 & 7 & 0 & 6 \\ \hline 4 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right)}$$

Это утверждение имеет непосредственное отношение к сводным и объединительным балансам и таким образом обосновывает эмпирически известный, но математически недоказанный факт, что в результате суммирования двух сальдовых балансов всегда будет получен сальдовый баланс, в котором валюты актива и пассивы всегда совпадут, что и является проявлением свойства 1 и 2 любой зеркально симметричной матрицы.

<u>Утверждение 4</u>. Сумма сальдовой матрицы и транспонированной к ней всегда равна нулевой матрице:

$$\Delta\mathbf{S} + \Delta\mathbf{S}' = \mathbf{O}.$$

Например:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -4 & -6 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \\ \hline 6 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & -6 \\ \hline -6 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Данное утверждение имеет отношение к ликвидационным и нулевым балансам, поскольку приведенное матричное уравнение и есть модель формирования ликвивдационного или нулевого баланса институционной единицы.

1.6.Матрицы (и векторы) — операторы умножения

Операция умножения матриц часто используется в матричной алгебре и ее приложениях для преобразования и выделения необходимых ее элементов, строк или столбцов матриц (векторов), а также в качестве операторов суммирования соответствующих элементов матриц и векторов. Это достигается умножением матрицы на специально подобранную матрицу или вектор.

Одним из таких операторов является единичная матрица, на главной диагонали которой находятся единицы, а все остальные элементы равны нулю. При умножении на единичную матрицу, как справа, так и слева, ничего не происходит — выделяются или, что же самое, остаются все элементы матрицы сомножителя, т.е. всегда **EA = A** и **AE = A**. Ниже приводятся примеры левого и правого умножения на единичную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Если на главной диагонали единичной матрицы оставить какую-либо одну единицу, а все остальные удалить, то будет выделена соответствующая строка при левом умножении и соответствующий столбец при правом умножении. Например, при умножении на матрицу $\mathbf{E}_{22}$ (единица находится на главной диагонали в позиции 22) получаем по данным нашего примера следующие результаты:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь при левом умножении выделилась вторая строка, при правом, соответственно, — второй столбец.

Для получения *итогов* матрицы необходимо ее умножить слева на вектор-строку $\mathbf{e}'$ или справа — на вектор-столбец $\mathbf{e}$, все элементы которых единицы. Эти векторы мы в дальнейшем будем назвать операторами суммирования, соответственно, элементов столбцов — оператор $\mathbf{e}'$ и элементов строк — оператор $\mathbf{e}$.

При умножении *слева* на вектор-строку $\mathbf{e}'$ получаем по данным нашего примера вектор-строку *итогов столбцов*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

При умножении *справа* на вектор-столбец $\mathbf{e}$ получаем по данным нашего примера вектор-столбец *итогов строк*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$$

При одновременном умножении слева на вектор-строку $\mathbf{e}'$ и справа — на вектор-столбец $\mathbf{e}$, получаем общий итог матрицы или ее *кросс-сумму*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{1,3} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3,3} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{3,1} = (45)_{1,1}$$

В результате по данным рассматриваемого примера получено число — скаляр $45 = (45)_{1,1}$, т.е. матрица размером 1×1, которая и является кросс-суммой или общим итогом матрицы.

Таким образом, предлагаемое изображение процедуры суммирования средствами векторно-матричного умножения существенно упрощено по сравнению с обычной записью с помощью знаков суммы Σ и сводится к следующему ее компактному представлению:

- **e′ A** = вектору-строке итогов столбцов матрицы **A**;
- **A e** = вектору-столбцу итогов строк матрицым **A**;
- **e′ A e** = общему итогу матрицы **A**.

В соответствии со свойством *ассоциативности* умножения матрицы изображение процедуры формирования общего итога,т.е. *кросс-суммирование,* возможно в двух вариантах:

- **(e′ A) e** — вначале формируются итоги *столбцов* — векторстрока **(e′ A),** а затем формируется общий итог: **(e′ A) e;**
- **e′ (A e)** — вначале формируются итоги *строк* — вектор-столбец **(A e),** а затем формируется общий итог: **e′ (A e).**

При этом всегда справедливо равенство: **(e′ A) e** = = **e′ (A e)** = **e′ A e,** т.е. общий итог матрицы не зависит от порядка кросс-суммирования.

Если матрица *окаймленная*, т.е. она уже содержит итоги строк и столбцов, то ее размер будет больше размера m × m неокаймленной матрицы и составит (m+1) × (m+1), где в последней m+1-строке будут содержатся уже подсчитанные итоги столбцов, а в последнем, m+1- столбце, соответственно, — итоги строк. В этом случае для выделения итоговой строки следует использовать вектор-строку $\mathbf{e}'_{m+1}$, у которой все элементы нули, а последний, m+1-элемент, равен единице; для выделения итогового столбца — использовать, соответственно, вектор-столбец $\mathbf{e}_{m+1}$, у которого также все его элементы равны нулю, а последний, m+1-элемент, равен единице. Следующие примеры поясняют сказанное:

$$(0 \quad 0 \quad 0 \mid 1) \times \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \\ \hline 12 & 15 & 18 & 45 \end{array} \right) = (12 \quad 15 \quad 18 \mid 45)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \\ \hline 12 & 15 & 18 & 45 \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 6 \\ 15 \\ 24 \\ \hline 45 \end{array}\right)$$

Точно также для выделения общего итога или кросс-суммы необходимо произвести одновременное умножение матрицы **A** слева на вектор-строку $\mathbf{e}'_{m+1}$ и справа на вектор-столбец $\mathbf{e}_{m+1}$:

$$(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \mid 1)_{1,4} \times \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \\ \hline 12 & 15 & 18 & 45 \end{array}\right)_{4,4} \times \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right)_{4,1} = (45)_{1,1}$$

Соответственно, если переобозначить $\mathbf{e}' = \mathbf{e}'_{m+1}$ и $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{m+1}$, то получим идентичные *по форме* изображения процедур выделения итогов:

- **(e′ A) e** — вначале выделяются итоги *столбцов* — вектор-строка **(e′ A),** а затем выделяется общий итог: **(e′ A) e;**
- **e′ (A e)** — вначале выделяютсяя итоги *строк* — вектор-столбец **(A e),** а затем выделяется общий итог: **e′ (A e).**

При этом всегда справедливо равенство: **(e′ A) e = = e′ (A e) = e′ A e.** Разница заключается в том, что в неокаймленных матрицах путем умножения на соответствующие единичные векторы — *векторы суммирования* производилось *суммирование* итогов, а в данном случае — с помощью умножения на *векторы выделения* производится *выделение* соответствующих итогов.

Приведем еще один вид преобразования матриц, имеющий отношение к моделированию бухгалтерского учета. Речь идет о преобразованиях неокаймленных матриц в окаймленные и, наоборот. Для этой цели предлагается использовать матрицы специального вида, которые образуются с помощью некоторой модификации единичных матриц. Ниже приводится пример, иллюстрирующий преобразование неокаймленной матрицы в окаймленную:

$$\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 1&1&1\end{array}\right)_{4,3}\times\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}_{3,3}\times\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right)_{3,4}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&6\\4&5&6&15\\7&8&9&24\\\hline 12&15&18&45\end{array}\right)_{4,4}$$

Матрицу-справа $\mathbf{E}_{+1}$ размером $m\times(m+1)$ назовем оператором *столбцового окаймления* или оператором добавления итогового столбца (подстрочный значок «+1» справа обозначает добавление итогового столбца). Она получена добавлением к единичной матрице единичного столбца, который и выполняет суммирование соответствующих элементов строк. Матрицу-слева $_{+1}\mathbf{E}$ — оператором *строчного окаймления* или оператором добавления итоговой строки (подстрочный значок «+1» слева обозначает добавление итоговой строки). Она получена добавлением к единичной матрице единичной строки, которая и выполняет суммирование соответствующих элементов столбцов.

Таким образом, рассмотренное выше преобразование неокаймленной матрицы **A** в окаймленную матрицу $_{+1}\mathbf{A}_{+1}$, т.е. ее «окаймление», можно записать в общем виде:

$$_{+1}\mathbf{E}\ \mathbf{A}\ \mathbf{E}_{+1} = {}_{+1}\mathbf{A}_{+1}$$

В обозначении окаймленной матрицы $_{+1}\mathbf{A}_{+1}$ подстрочный значок «+1» *слева* обозначает таким образом окаймление *строкой*; подстрочный значок «+1» *справа* — окаймление *столбцом*.

Матрица -слева представляет собой транспонированную правую матрицу, т.е $\mathbf{E}'_{+1} = {}_{+1}\mathbf{E}$. Это позволяет переписать приведенное выше преобразование в форме, подобной рассмотренной ранее, той, которая использовалась в связи с преобразованием матрицы с целью получения (или выделения) итогов матрицы:

$$\mathbf{E}'_{+1}\ \mathbf{A}\ \mathbf{E}_{+1} = {}_{+1}\mathbf{A}_{+1}$$

В соответствии со свойством ассоциативности умножения возможны следующие последовательности «окаймления» матрицы:

- $\mathbf{E'}_{+1}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}_{+1}) = {}_{+1}\mathbf{A}_{+1}$ — вначале добавляется итоговый столбец $(\mathbf{AE}_{+1}) = \mathbf{A}_{+1}$; затем — итоговая строка и общий итог: $\mathbf{E'}_{+1}(\mathbf{A}_{+1}) = {}_{+1}\mathbf{A}_{+1}$;
- $(\mathbf{E'}_{+1}\cdot\mathbf{A})\mathbf{E}_{+1} = {}_{+1}\mathbf{A}_{+1}$ — вначале добавляется итоговая строка $(\mathbf{E'}_{+1}\mathbf{A}) = {}_{+1}\mathbf{A}$; затем — итоговый столбец и общий итог: $({}_{+1}\mathbf{A})\mathbf{E}_{+1} = {}_{+1}\mathbf{A}_{+1}$.

Ниже на том же примере иллюстрируется первый вариант «окаймления».

Добавление итогового столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3,3} \times \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)_{3,4} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \end{array}\right)_{3,4}$$

Добавление итоговой строки и общего итога:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right)_{4,3} \times \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \end{array}\right)_{3,4} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \\ \hline 12 & 15 & 18 & 45 \end{array}\right)_{4,4}$$

Таким же образом можно убедиться, что и второй вариант «окаймления» приведет к тому же результату.

Иначе говоря, для всех существующих квадратных неокаймленных матриц всегда существуют *эквифинальные* преобразования «окаймления», выражаемые следующими матричными равенствами:

$$\mathbf{E'}_{+1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}_{+1} = \mathbf{E'}_{+1}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}_{+1}) = (\mathbf{E'}_{+1}\cdot\mathbf{A})\,\mathbf{E}_{+1} = {}_{+1}\mathbf{A}_{+1}$$

С помощью специальных операторов можно также записать процедуру обратного преобразования окаймленной матрицы в неокаймленную, т.е. операцию «деокаймления» матрицы. Ниже приводится пример, иллюстрирующий это преобразование:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}_{3,4} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 4 & 5 & 6 & | & 15 \\ 7 & 8 & 9 & | & 24 \\ \hline 12 & 15 & 18 & | & 45 \end{pmatrix}_{4,4} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3,3}$$

Матрицу-справа размером $m \times (m+1)$ обозначим $\mathbf{E}_{-1}$ и назовем оператором удаления итогового столбца оператором *столбцового деокаймления*. Она получается из соответствующей единичной матрицы Е путем добавления нулевого столбца, который и осуществляет удаление итогового столбца или столбцовое деокаймление (подстрочный значок «–1» справа обозначает удаление столбца).

Матрицу-слева размером $(m+1) \times m$ обозначим ${}_{-1}\mathbf{E}$ и назовем оператором удаления итоговой строки или *строчного деокаймления* (подстрочный значок «–1» слева обозначает удаление итоговой строки). Тогда рассматриваемое обратное преобразование окаймленной матрицы ${}_{+1}\mathbf{A}_{+1}$ в неокаймленную матрицу $\mathbf{A}$ будет в общем виде записано следующим образом:

$$_{-1}\mathbf{E} \cdot {}_{+1}\mathbf{A}_{+1} \cdot \mathbf{E}_{-1} = \mathbf{A}$$

Или, учитывая, что $\mathbf{E}'_{-1} = {}_{-1}\mathbf{E}$, это же уравнение можно записать в следующем, легко запоминающемся виде:

$$\mathbf{E}'_{-1} \cdot {}_{+1}\mathbf{A}_{+1} \cdot \mathbf{E}_{-1} = \mathbf{A}$$

Здесь также в соответствии со свойством ассоциативности умножения возможны следующие последовательности обратного преобразования окаймленной матрицы в неокаймленную:

- $\mathbf{E}'_{-1} \cdot ({}_{+1}\mathbf{A}_{+1} \cdot \mathbf{E}_{-1}) = \mathbf{A}$ — вначале удаляется итоговый столбец $({}_{+1}\mathbf{A}_{+1} \cdot \mathbf{E}_{-1}) = {}_{+1}\mathbf{A}$ и общий итог; затем — итоговая строка: $\mathbf{E}'_{1} \cdot ({}_{+1}\mathbf{A}) = \mathbf{A}$**;**
- $(\mathbf{E}'_{-1} \cdot {}_{+1}\mathbf{A}_{+1}) \cdot \mathbf{E}_{-1} = \mathbf{A}$ — вначале удаляется итоговая строка $(\mathbf{E}'_{1} \cdot {}_{+1}\mathbf{A}_{+1}) = \mathbf{A}_{+1}$ и общий итог; затем — итоговый столбец: $(\mathbf{A}_{+1})\ \mathbf{E}_{-1} = \mathbf{A}$.

Ниже на том же примере иллюстрируется первый вариант обратного преобразования.

Удаление столбца и общего итога:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \\ \hline 12 & 15 & 18 & 45 \end{array}\right)_{4,4} \times \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{4,3} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ \hline 12 & 15 & 18 \end{array}\right)_{4,3}$$

Удаление итоговой строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)_{3,4} \times \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ \hline 12 & 15 & 18 \end{array}\right)_{4,3} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right)_{3,3}$$

Нетрудно убедиться, что и второй вариант деокаймления — вначале «строка», а затем «столбец» также даст тот же результат, т.е. для всех существующих квадратных окаймленных матриц всегда справедливы матричные равенства, изображающие *эквифинальные* процедуры обратного преобразования окаймленных матриц в неокаймленные:

$$\mathbf{E}'_{-1} \cdot {}_{+1}\mathbf{A}_{+1} \cdot \mathbf{E}_{-1} = \mathbf{E}'_{-1} \cdot ({}_{+1}\mathbf{A}_{+1} \cdot \mathbf{E}_{-1}) = (\mathbf{E}'_{-1} \cdot {}_{+1}\mathbf{A}_{+1}) \cdot \mathbf{E}_{-1} = \mathbf{A}$$

1.7.Блочные матрицы и операции над ними

Выше рассматривались матрицы, числовая информация в которых неструктурирована, т.е. не разделена на группы или блоки. Если информацию структурировать, то получим так называемую блочную матрицу, как в нижеследующем примере:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \hline 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{array}\right), \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{array}\right)$$

Элементами блочных матриц являются не числа, а блоки чисел — подматрицы, из которых состоят эти матрицы. В данном случае:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22}\end{pmatrix}$$

Здесь элементами матрицы **A** являются следующие матрицы:

$$\mathbf{A}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & 7 & 8\\ 11 & 12 & 13\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_{12}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 9 & 10\\ 14 & 15\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{21}=\begin{pmatrix}16 & 17 & 18\\ 21 & 22 & 23\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_{22}=\begin{pmatrix}19 & 20\\ 24 & 25\end{pmatrix}$$

Соответственно, — элементы матрицы **B:**

$$\mathbf{B}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & 7\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_{12}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 8 & 9 & 10\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{21}=\begin{pmatrix}11 & 12\\ 16 & 17\\ 21 & 22\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_{22}=\begin{pmatrix}13 & 14 & 15\\ 18 & 19 & 20\\ 23 & 24 & 25\end{pmatrix}$$

Несмотря на то, что блочные матрицы **A** и **B** в исходном виде содержат одну и ту же числовую информацию — это разные матрицы, так как информация в них по-разному структурирована и они поэтому состоят из различных блочных элементов. И в соответствии с общим определением равенства матриц, приведенным выше, матрицы **A** и **B** не могут считаться равными, несмотря на одинаковый размер, так как их соответствующие элементы не равны между собой: $\mathbf{A}_{11} \neq \mathbf{B}_{11}, \ldots, \mathbf{A}_{22} \neq \mathbf{B}_{22}$.

Над блочными матрицами определены все перечисленные выше операции: сложение, вычитание, умножение на скаляр, умножение блочных матриц, транспонирование и другие. При сложении, вычитании и умножении необходимо чтобы блочные матрицы были согласованы для этих операций по правилам, определенным выше для обычных, числовых матриц.

Так, при сложении двух матриц **A** и **B** необходимо, чтобы соответствующие, складываемые подматрицы были одного размера. Так, рассмотренные выше матрицы **A** и **B** нельзя складывать и вычитать, так как их соответствующие элементы-подматрицы $\mathbf{A}_{ij}$ и $\mathbf{B}_{ij}$ имеют разные размеры. Но следующие ниже матрицы можно складывать (и вычитать), так как они имеют одинаковые по размерам соответствующие блочные элементы:

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \hline 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{array}\right), \quad \mathbf{B}=\left(\begin{array}{ccc|cc} 25 & 24 & 23 & 22 & 21 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 15 & 14 & 13 & 12 & 11 \\ \hline 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Сумма этих матриц **A** + **B** = **C** будет содержать следующие элементы:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12}+\mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{A}_{21}+\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22}+\mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{pmatrix}$$

В данном примере элементы матрицы **C** — подматрицы $\mathbf{C}_{ij}$ будут следующими:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 25 & 24 & 23 \\ 20 & 19 & 18 \\ 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+25 & 2+24 & 3+23 \\ 6+20 & 7+19 & 8+18 \\ 11+15 & 12+14 & 13+13 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 26 & 26 & 26 \\ 26 & 26 & 26 \\ 26 & 26 & 26 \end{pmatrix}=\mathbf{C}_{11}$$

$$\begin{pmatrix} 19 & 20 \\ 24 & 25 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix} 26 & 26 \\ 26 & 26 \end{pmatrix}=\mathbf{C}_{22}$$

При умножении на скаляр λ блочной матрицы каждый ее элемент, т.е. подматрицы, будут умножены на число λ. Например:

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cdot\mathbf{A}_{11} & \lambda\cdot\mathbf{A}_{12} \\ \lambda\cdot\mathbf{A}_{21} & \lambda\cdot\mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

При умножении блочных матриц также необходимо согласование их размеров, но при этом должны согласовываться не только общие их размеры, но и размеры блоков, которые будут перемножаться.

Также, как и для обычных, скалярных матриц к блочным матрицам можно применять операторы суммирования и выделения, но они в этом случае должны иметь соответствующую блочную структуру.

Так, например, рассматриваемая матрица **A** может быть преобразована в вектор-столбец путем умножения справа на блочный вектор **e** суммирования строк:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_{12}\cdot\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{A}_{21}\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_{22}\cdot\mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$$

В результате блочная матрица **A** преобразована в блочный вектор-столбец **a**., элементы которого:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{A}_{11}\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_{12}\cdot\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{A}_{21}\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{A}_{22}\cdot\mathbf{e}_2$$

Отметим особо, в последнем разъяснении, вообще говоря, нет никакой необходимости, если вспомнить определение равенства векторов (матриц), поскольку в данном случае сам факт равенства векторов — это *равенство его соответствующих элементов*.

Рассмотренное выше преобразование блочной матрицы в блочный итоговый вектор иллюстрирует следующий числовой пример:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \hline 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 1 \\ 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} (1+2+3)+(4+5) \\ (6+7+8)+(9+10) \\ (11+12+13)+(14+15) \\ \hline (16+17+18)+(19+20) \\ (21+22+23)+(24+25) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 15 \\ 40 \\ 48 \\ \hline 68 \\ 88 \end{array}\right)$$

Заметим, что строго говоря, процесс получения элементов вектора следует записывать как сумму произведений: $(1\cdot1+2\cdot1+3\cdot1)$ + $(4\cdot1 + 5\cdot1)$ и т.д., но фактичеки это сводится к обычному суммированию и поэтому запись была упрощена. Здесь скобками выделены суммы соответствующих блоков, но следует понимать, что окончательно получается вектор:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 15 \\ 40 \\ 48 \\ \hline 68 \\ 88 \end{array}\right), \quad \text{где } \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ 40 \\ 48 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 68 \\ 88 \end{pmatrix}$$

Аналогично умножение слева на блочную вектор-строку $\mathbf{e'}$ — оператор суммирования столбцов — преобразует блочную матрицу в соответствующую итоговую вектор-строку:

$$(\mathbf{e'_1} \quad \mathbf{e'_2}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} = (\mathbf{e'_1 A_{11}} + \mathbf{e'}_2\mathbf{A_{21}} \quad \mathbf{e'_1 A_{12}} + \mathbf{e'}_2\mathbf{A_{22}}) = (\mathbf{a'_1} \quad \mathbf{a'_2})$$

Числовой пример, представленный ниже, иллюстрирует преобразование блочной матрицы в блочную итоговую вектор-строку:

$$(1 \quad 1 \quad 1 \mid 1 \quad 1) \cdot \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \hline 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{array}\right) = (55 \quad 60 \quad 65 \mid 70 \quad 75)$$

Одновременное умножение блочной матрицы слева на блочный вектор-строку **e′** и справа — на блочный вектор-столбец **e** преобразует ее в скалярную величину — общий итог или кросс-сумму:

$$\mathbf{e}' \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = (1 \quad 1 \quad 1 \mid 1 \quad 1) \cdot \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \hline 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 1 \\ 1 \end{array}\right) = 300$$

Умножение может выполняться в двух последовательностях:

- $\mathbf{e}' (\mathbf{A}\ \mathbf{e}) = \mathbf{e}'\ \mathbf{A}\ \mathbf{e}$ — вначале умножение справа на вектор-столбец, затем — слева на вектор-строку;
- $(\mathbf{e}'\ \mathbf{A})\ \mathbf{e} = \mathbf{e}'\ \mathbf{A}\ \mathbf{e}$ — вначале умножение слева на вектор-строку, затем — справа на вектор-столбец.

Рассмотренные выше преобразования блочной матрицы в блочный вектор — в вектор-столбец и в блочный вектор-строку и *скалярное* умножение-преобразование матрицы в общий итог или кросс-сумму, по существу, не отличаются от соответствующих преобразований обычной, т.е. скалярной матрицы, которые были рассмотрены ранее. Единственное отличие в том, что структурирование матрицы и векторов-операторов позволяет структурировать и получаемые таким образом итоги.

Такие преобразования матрицы в вектор-столбец и в вектор-строку мы будем называть *аддитивными преобразованиями* или *преобразованиями по аддитивной схеме*, подчеркивая тем самым, что при этом производится сквозное суммирование, соответственно, элементов строк или элементов столбцов, но при структурном выделении составляющих этих сумм. Кроме того, этот тип преобразование мы будем также назвать *матрично-векторным преобразованием*, акцентируя тем самым внимание на том, что в результате *матрица* преобразуется в *вектор*, т.е. в вектор-столбец или в вектор-строку.

В то же время, возможно и другое преобразование, которое мы назовем здесь *неаддитивным преобразованием* блочной матрицы, которое мы также будем называть *матрично-матричным* преобразованием, подчеркивая тем самым, что *матрица*, состоящая из *подматриц*, преобразуется таким образом в блочную *матрицу*, но состоящую из *векторов*. Для этой цели исходная матрица должна быть умножена на специального вида блочную матрицу **E** — слева и справа — на транспонированную к ней **E′**, структура которых понятна из следующих примеров.

Преобразование в векторно-столбцовую матрицу:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{o}\\ \mathbf{o} & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{A}_{12}\cdot\mathbf{e}_2\\ \mathbf{A}_{21}\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{A}_{22}\cdot\mathbf{e}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12}\\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22}\end{pmatrix}$$

Числовой пример:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}=\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15\\ \hline 16 & 17 & 18 & 19 & 20\\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c}1 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 0\\ \hline 0 & 1\\ 0 & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}6 & 9\\ 21 & 19\\ 34 & 29\\ \hline 51 & 39\\ 66 & 49\end{array}\right)$$

Преобразование в вектор-строчную матрицу:

$$\mathbf{E}'\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{e}'_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1\cdot\mathbf{A}_{11} & \mathbf{e}'_1\cdot\mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{e}'_2\cdot\mathbf{A}_{21} & \mathbf{e}'_2\cdot\mathbf{A}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}'_{11} & \mathbf{a}'_{12}\\ \mathbf{a}'_{21} & \mathbf{a}'_{22}\end{pmatrix}$$

Числовой пример:

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&1&0&0\\ \hline 0&0&0&1&1\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\\ \hline 16&17&18&19&20\\21&22&23&24&25\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|cc}18&21&24&27&30\\ \hline 37&39&41&43&45\end{array}\right)$$

Умножение матрицы слева и справа, т.е. в соответствии с формулой: $\mathbf{E}'\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}$ преобразует ее в скалярную матрицу, состоящую из итогов соответствующих блоков исходной матрицы:

$$\mathbf{E}'\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&1&0&0\\ \hline 0&0&0&1&1\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\\ \hline 16&17&18&19&20\\21&22&23&24&25\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c}1&0\\1&0\\1&0\\ \hline 0&1\\0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}63&57\\117&88\end{pmatrix}$$

Здесь также умножение может выполняться в двух последовательностях:

- $\mathbf{E}'\,(\mathbf{A}\,\mathbf{E})=\mathbf{E}'\,\mathbf{A}\,\mathbf{E}$ — вначале умножение справа на вектор-столбцовую матрицу, затем — слева на вектор-строчную матрицу;
- $(\mathbf{E}'\,\mathbf{A})\,\mathbf{E}=\mathbf{E}'\,\mathbf{A}\,\mathbf{E}$ — вначале умножение слева на вектор-строчную матрицу, затем — справа на вектор-столбцовую матрицу.

И в заключение настоящего раздела рассмотрим операцию транспонирования блочных матриц. Для понимания закономерности рассмотрим вначале числовой пример: транспонируем, т.е. переставим столбцы и строки матрицы **A**, и сравним результат с исходной матрицей:

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \hline 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{array}\right) \quad \mathbf{A}'=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & 7 & 12 & 17 & 22 \\ 3 & 8 & 13 & 18 & 23 \\ \hline 4 & 9 & 14 & 19 & 24 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{array}\right)$$

Из сравнения матрицы **A** и транспонированной к ней матрицы **A′** видна следующая закономерность:

- Блоки на главной диагонали транспонируются и остаются на месте. Размер их, поскольку они квадратные, не меняется;
- Блоки вне главной диагонали транспонируются и меняются местами. Размер их инвертируется так, что матрицы A и A′ оказываются согласованными для операций сложения и вычитания, а также и умножения для рассматриваемого случая квадратных матриц.

Все это позволяет записать операцию транспонирования в следующем общем виде для рассматриваемого класса матриц размером 2×2:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_{11} & \mathbf{A}'_{21} \\ \mathbf{A}'_{12} & \mathbf{A}'_{22} \end{pmatrix}$$

Как и в случае скалярных матриц, сальдовая блочная матрица образуется как разность исходной блочной матрицы и транспонированной к ней:

$$\mathbf{A}-\mathbf{A}'=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mathbf{A}'_{11} & \mathbf{A}'_{21}\\ \mathbf{A}'_{12} & \mathbf{A}'_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}-\mathbf{A}'_{11} & \mathbf{A}_{12}-\mathbf{A}'_{21}\\ \mathbf{A}_{21}-\mathbf{A}'_{12} & \mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}'_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\Delta\mathbf{A}_{11} & \Delta\mathbf{A}_{12}\\ \Delta\mathbf{A}_{21} & \Delta\mathbf{A}_{22}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15\\ \hline 16 & 17 & 18 & 19 & 20\\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25\end{array}\right)-\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 6 & 11 & 16 & 21\\ 2 & 7 & 12 & 17 & 22\\ 3 & 8 & 13 & 18 & 23\\ \hline 4 & 9 & 14 & 19 & 24\\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|cc}0 & -1 & -8 & -12 & -16\\ +4 & 0 & -4 & -8 & -12\\ +8 & +4 & 0 & -4 & -9\\ \hline +12 & +8 & +4 & 0 & -4\\ +16 & +12 & +8 & +4 & 0\end{array}\right)$$

Зеркальная симметрия блочной сальдовой матрицы проявляется в следующих ее свойствах:

- Блоки $\Delta\mathbf{A}_{11}=\mathbf{A}_{11}-\mathbf{A}'_{11}$ и $\Delta\mathbf{A}_{22}=\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}'_{22}$, находящиеся на главной диагонали, являясь *квадратными* матрицами, *внутренне зеркально симметричны* относительно своей нулевой диагонали и суммы их элементов всегда тождественно равны нулю: $\mathbf{e}'\,\Delta\mathbf{A}_{11}\,\mathbf{e}\equiv 0$ и $\mathbf{e}'\,\Delta\mathbf{A}_{22}\,\mathbf{e}\equiv 0$. Доказательство данного положения сводится к следующему. Поскольку $\Delta\mathbf{A}_{11}=\mathbf{A}_{11}-\mathbf{A}'_{11}$, то также и $\mathbf{e}'\,\Delta\mathbf{A}_{11}\,\mathbf{e}=\mathbf{e}'\,\mathbf{A}_{11}\,\mathbf{e}-\mathbf{e}'\,\mathbf{A}'_{11}\,\mathbf{e}$. Но поскольку как множества матрицы $\mathbf{A}_{11}$ и транспонированная к ней $\mathbf{A}'_{11}$ равны между собой, т.е. $\{\mathbf{A}_{11}\}=\{\mathbf{A}'_{11}\}$, то также тождественно равны и суммы этих множеств: $\mathbf{e}'\,\mathbf{A}_{11}\,\mathbf{e}\equiv\mathbf{e}'\,\mathbf{A}'_{11}\,\mathbf{e}$. Но это значит, что: $\mathbf{e}'\,\Delta\mathbf{A}_{11}\,\mathbf{e}=\mathbf{e}'\,\mathbf{A}_{11}\,\mathbf{e}-\mathbf{e}'\,\mathbf{A}'_{11}\,\mathbf{e}\equiv 0$. Аналогично и для другой матрицы главной диагонали: $\mathbf{e}'\,\Delta\mathbf{A}_{22}\,\mathbf{e}\equiv 0$.

- Блоки $\Delta\mathbf{A}_{12}=\mathbf{A}_{12}-\mathbf{A}'_{21}$ и $\Delta\mathbf{A}_{21}=\mathbf{A}_{21}-\mathbf{A}'_{12}$, находящиеся вне главной диагонали, являясь в общем случае *прямоугольными* матрицами, *внешне зеркально симметричны* по отношению к друг к другу, что проявляется в следующем *матричном* равенстве:

$$\Delta\mathbf{A}_{12}=-(\Delta\mathbf{A}_{21})'$$

и, наоборот:

$$\Delta\mathbf{A}_{21} = -(\Delta\mathbf{A}_{12})'$$

Или то же самое, но словами: «Блок сальдовой матрицы $\Delta\mathbf{A}_{12}$ равен транспонированной матрице $\Delta\mathbf{A}_{12}$, взятой с противоположным знаком и, наоборот».

Доказательство следует из сопоставления этих блоков:

$$\Delta\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{12} - \mathbf{A}'_{21} \text{ и } \Delta\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{21} - \mathbf{A}'_{12},$$

Если транспонировать левое равенство, то в соответствии с правилами транспонирования матриц, которые были рассмотрены выше, получим:

$$(\Delta\mathbf{A}_{12})' = (\mathbf{A}_{12})' - (\mathbf{A}'_{21})'$$

или

$$(\Delta\mathbf{A}_{12})' = \mathbf{A}_{12} - \mathbf{A}_{21}$$

или

$$-(\Delta\mathbf{A}_{12})' = \mathbf{A}_{21} - \mathbf{A}'_{12}$$

Но отсюда следует, что: $\Delta\mathbf{A}_{12} = -(\Delta\mathbf{A}_{21})'$. Аналогично доказывается и обратное.

В таком же отношении зеркально симметричного равенства находятся и суммы элементов этих матриц:

$$\mathbf{e}'\,\Delta\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{e} = -\,\mathbf{e}'\,\Delta\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{e}$$

и, наоборот:

$$\mathbf{e}'\,\Delta\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{e} = -\,\mathbf{e}'\,\Delta\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{e}$$

Иными словами: «Сумма элементов блока сальдовой матрицы $\Delta\mathbf{A}_{12}$ равна сумме элементов матрицы $\Delta\mathbf{A}_{21}$, взятой с противоположным знаком и, наоборот».

1.8.Обратная матрица и ее приложения

В матричной алгебре операция деления как таковая отсутствует, но вместо нее определена операция обращения матрицы.

Определение. Квадратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ называется обратной к матрице $\mathbf{A}$, если произведение обратной матрицы на исходную, как справа, так и слева, равно единичной матрице, т.е.: $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Это определение справедливо только для квадратной матрицы, но не всякая квадратная матрица может иметь обратную к ней, а только та, которая удовлетворяет определенным условиям невырожденности (см. подробней Сирл, Госман).

Общим условием невырожденности квадратной матрицы является ненулевое значение определителя матрицы. Последний вычисляется с помощью различных и достаточно сложных вычислительных процедур и представляет собой число, ненулевое значение которого позволяет заключить, что матрица является невырожденной или несингулярной (Гильберт) и поэтому для нее существует обратная к ней матрица. В противном случае — при нулевом значении определителя — матрица является вырожденной и обратная к ней матрица не существует.

Операция обращения матрицы используется при решении систем линейных уравнений и широко применяется в экономико-математическом моделировании.

Так, система линейных уравнений изображается средствами матричной алгебры в следующем, самом общем и совершенно компактном виде: $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{A}$ — квадратная матрица коэффициентов линейных уравнений размером $m \times m$; $\mathbf{x}$ — вектор столбец неизвестных размером $m \times 1$; $\mathbf{b}$ — вектор-столбец свободных членов уравнений размером $m \times 1$. Если матрица $\mathbf{A}$ невырожденная, то существует обратная к ней матрица $\mathbf{A}^{-1}$ и система линейных уравнений имеет решение, которое получается следующим образом.

Умножим обе части матричного уравнения системы на обратную матрицу: $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$. Поскольку по определению обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{E}$, а в свою очередь, $\mathbf{E}\,\mathbf{x} = \mathbf{x}$, то вектор неизвестных $\mathbf{x}$ определяется из матричного уравнения: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$.

Заметим, что сами процедуры решения систем линейных уравнений, с числом неизвестных более трех, весьма громоздки и число их вариантов значительно, но все алгоритмы, по существу, содержатся в представленной выше компактной записи решения систем линейных уравнений через обратную матрицу.

Классическим примером матричного моделирования является модель межотраслевого баланса, предложенная лауреатом Нобелевской премии В.В. Леоньтьевым, постановка которой сводится к записи следующей системы линейных уравнений:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x}$$

где **A** — квадратная матрица коэффициентов прямых межотраслевых материальных затрат размером $m \times m$, преобразующая вектор валового выпуска продукции **x** размером $m \times 1$ в вектор промежуточного продукта: $\mathbf{A}\,\mathbf{x}$ = пп — вектор промежуточного продукта также размером $m \times 1$; **y** — вектор конечной продукции или конечного спроса размером $m \times 1$.

Задача, которую поставил В. Леоньтьев заключалась в следующем: необходимо при известной по статистике прошлых лет матрице коэффициентов прямых затрат **A** и заданном конечном спросе **y** найти вектор валового выпуска продукции **x**. Ее решение сводится к следующим преобразованием матричного уравнения межотраслевого баланса:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} \quad \to \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \to \quad (\mathbf{A} - \mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Из последнего преобразования уравнения межотраслевого баланса находим решение-вектор неизвестного валового выпуска:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\,\mathbf{y}$$

В этом уравнении обратная матрица $(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}$ имеет определенный экономический смысл — это матрица так называемых коэффициентов полных затрат, которая преобразует вектор конечного спроса **y** в вектор валового выпуска продукции **x**.

Теперь, зная вектор валового выпуска продукции по отраслям экономики, нетрудно уже определить необходимые для его производства внутриотраслевые промежуточные затраты в соответствии со следующим векторно-матричным уравнением: $\mathbf{A}\,\mathbf{x}$ = пп — вектор промежуточного продукта.