

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ФОНД ПОДГОТОВКИ КАДРОВ
ИННОВАЦИОННЫЙ ПРОЕКТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ**

Субпроект «Создание центра повышения квалификации преподавателей по экономике»

Государственный Университет – Высшая Школа Экономики

Программа дисциплины

Актуарная математика и теория риска

Москва
2004

Программа дисциплины «Актуарная математика и теория риска» составлена в соответствии с требованиями (федеральный компонент) к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки дипломированного специалиста (бакалавра, магистра) по циклу «Общие гуманитарные и социально-экономические дисциплины» государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования второго поколения, а также требованиями, предъявляемыми НФПК к новым и модернизированным программам учебных курсов, разработанным в рамках субпроекта «Создание центра повышения квалификации преподавателей по экономике» Инновационного проекта развития образования.

Программа подготовлена при содействии НФПК – Национального Фонда подготовки кадров в рамках субпроекта «Создание центра повышения квалификации преподавателей по экономике» Инновационного проекта развития образования.

Автор: к. ф.-м. н. А.Г.Шоломицкий, доцент кафедры Математической экономики и эконометрики ГУ – ВШЭ

(ФИО, ученая степень, ученое звание, вуз)

I. Организационно-методический раздел

1. Цель курса

Данный курс подготовлен в рамках Инновационного проекта развития образования, основной целью которого является повышение качества преподавания социально-экономических наук в России посредством совершенствования системы повышения квалификации преподавателей экономических дисциплин вузов с учетом передового мирового опыта. В соответствии с этой общей целью, настоящий курс предназначен для распространения в нашей стране знаний в области актуарной математики и теории риска. Эти области – сравнительно новые для финансово-экономического образования в России. Подготовка квалифицированных специалистов в области актуарной математики и теории риска, потребность в которых диктуется экономическими сдвигами последних лет, такими, например, как развитие рынка страхования и негосударственного пенсионного обеспечения, нормативной базы в этих областях, перспективами перехода на МСФО, видится актуальной задачей экономического и финансового образования.

2. Задачи курса:

- дать слушателям по возможности широкое представление об основных принципах и методах актуарной математики и теории риска на уровне современного состояния ее теории и практических стандартов;
- систематически изложить математическую теорию моделирования страховых и пенсионных систем, продемонстрировать практическое применение ее результатов для оценки риска;
- дать представление о связи актуарных расчетов с нормами регулирования и контроля платежеспособности западных стран;
- ознакомить слушателей с современными тенденциями развития прикладной теории риска, такими, как моделирование денежных потоков и динамический финансовый анализ, взаимопроникновение методов страховой и финансовой математики;
- сформировать у слушателей представление об актуальных научных, прикладных и образовательных проблемах, стоящих перед развитием актуарного дела в России.

3. Методическая новизна курса (новые методики, формы работы, авторские приемы в преподавании курса)

Методика чтения данного курса, как и любого курса для преподавателей, должна быть ориентирована на пробуждение у слушателей творческого интереса к предмету и желания углубиться в данную область. При этом необходимо учитывать, что слушатели часто будут людьми, уже накопившими определенный опыт преподавания, имеющими сложившиеся интересы и взгляды. Поэтому преподавание может вестись в значительной степени в форме диалога. В преподавании курса широко используются обзорные лекции с акцентом на самостоятельную работу слушателей. Предполагается выполнение слушателями домашних заданий. Программой курса предусмотрен компьютерный практикум, предполагающий выполнение упражнений и домашних заданий в MS Excel (решение задач по актуарной математике), а также при помощи созданной автором программы CFRM. Цель занятий с последней программой состоит в том, чтобы дать слушателям возможность самостоятельного знакомства с практическими возможностями, приемами и методами моделирования и анализа актуарных рисков (анализ чувствительности, тестирование на шоки, сценарное моделирование и пр.) с помощью актуарных моделей денежных потоков (на примере актуарной модели пенсионного плана). Некоторая часть аудиторного времени будет посвящена дискуссиям и обмену опытом.

4. Место курса в системе социогуманитарного образования.

Учебные курсы для студентов, построенные на основе настоящего курса, могут входить в качестве обязательных или спецкурсов (курса по выбору) в программы подготовки по специальностям «Математические методы анализа экономики», «Экономическая теория», «Финансы и фондовый рынок», «Страхование» и др. на уровне магистратуры или бакалавриата. Данная группа курсов является в значительной степени самостоятельным, т. к. на их основе может быть построена специальная подготовка специалистов актуарного профиля. Кроме того, отдельные разделы курса могут использоваться преподавателями при подготовке спецкурсов.

Курс ориентирован на преподавателей экономических и финансовых дисциплин. Для его освоения требуется математическая подготовка в объеме, соответствующем программе факультета экономики ГУ–ВШЭ. Повышенная математическая подготовка (в объеме, скажем, программ технических ВУЗов или, тем более, математических факультетов университетов) приветствуется.

5. Требования к уровню освоения содержания курса.

Слушатели данного курса должны:

- четко представлять себе основные идеи современной теории риска и актуарной математики;
- представлять себе область задач, возможности и потребности практического применения методов актуарной математики;
- иметь навыки решения и самостоятельного составления задач по темам курса;
- представлять себе возможности дальнейшей самостоятельной научной работы со студентами в данной области.

II. Содержание курса

1. Новизна курса (научная, содержательная; сравнительный анализ с подобными курсами в России и за рубежом)

В нашей стране актуарное дело находится еще в самой ранней стадии развития. Курсы и кафедры актуарной специализации создаются в последние годы во многих ВУЗах, однако качество обучения не всегда высоко. Как правило, программы курсов актуарной математики в экономических ВУЗах повторяют программы начальных ступеней образования западных обществ актуариев (в частности, британского Institute и американского Society of Actuaries). Они зачастую, во-первых, недостаточно адаптированы к российским условиям и потребностям практики, во-вторых, будучи лишь начальными курсами, не включают ряда важных разделов. С другой стороны, в ряде ВУЗов (в частности, на механико-математических факультетах МГУ, НГУ и др. университетов) читаются курсы, посвященные таким «продвинутым» разделам теории риска, как теория индивидуального риска, теория коллективного риска, теория разорения. Некоторые курсы такого плана были подготовлены в рамках Инновационного проекта развития образования. Относительно многих из них, насколько мне известно, можно сказать, что они отличаются определенной фрагментарностью и теоретичностью. Это связано с малодоступностью западной литературы, а также с тем, что в нашей стране накоплено еще мало самостоятельного образовательного и, самое главное, практического исследовательского опыта в актуарной области. Предлагаемый курс основан на осмыслении тех аспектов

западного опыта, которые кажутся наиболее актуальными для потребностей актуарного образования и практики в нашей стране. В него включены такие новые, еще малознакомые отечественным специалистам разделы, как актуарные методы для пенсионных схем (методы финансирования, построение и регулирование пенсионных планов на Западе, актуарное оценивание обязательств, в том числе по нормам МСФО), практически-ориентированное моделирование денежных потоков (построение моделей, методы анализа рисков, включая компьютерные занятия с учебной программой CFRM, реализующей модель денежных потоков пенсионной программы), обзор теории выбора в условиях риска и мер риска.

В целом, курс соответствует международным стандартам подготовки актуариев. Он основан на признанном в мире учебнике Американского общества актуариев (Society of Actuaries): N. L. Bowers et al. Actuarial Mathematics. – Society of Actuaries, Itasca, Illinois, 1986, 1997 (2nd ed.), переведенном на русский язык: Н. Бауэрс и др. Актуарная математика. – М.: Янус-К, 2001.

2. Разделы курса

- I. Введение в актуарную математику.
- II. Актуарные расчеты в страховых и пенсионных схемах.
- III. Модели теории риска в страховании.
- IV. Стохастические модели: построение и анализ.

3. Темы и краткое содержание

Раздел I. Введение в актуарную математику.

1. *Сложные проценты и процентные ставки.* Простой процент. Сложный процент. Дисконтирование. Непрерывное начисление. Ренты. Оценка доходности. Переменная доходность (сценарии).
2. *Модель смертности.* Характеристики смертности. Таблицы смертности. Особенности российской статистики смертности. Сила смертности. Смертность для нецелых лет: актуарные предположения. Закон Гомпертца.
3. *Актуарные таблицы службы.* Вопросы составления и сглаживания актуарных таблиц. Составление таблиц смертности. Центральные нормы смертности.
4. *Аннуитеты.* Стандартные аннуитеты, переменные аннуитеты, аннуитеты с различным периодом выплат и общего вида. Актуарные современные стоимости (APV). Международные актуарные обозначения для APV аннуитетов.

5. *Страхование жизни.* Стандартные виды страхования жизни. Традиционные виды полисов страхования жизни. Международные актуарные обозначения для *APV* выплат по полисам страхования жизни.
6. *Нетто-премии и взносы.* Общие принципы расчета. Актуарный принцип эквивалентности активов и обязательств. Актуарный базис. Консервативный базис.

Раздел II. Актуарные расчеты в страховых и пенсионных схемах.

7. *Пенсионное обеспечение.* Виды пенсий. Виды пенсионных схем. Размеры пенсий. Расчет индивидуальных взносов. Пенсионные схемы, применяемые в российских НПФ.
8. *Резервы нетто-премий.* Гибкие виды страхования жизни и пенсионного страхования. Универсальное страхование жизни, переменные аннуитеты, SPDA, unit-linked insurance, cash balance пенсионные планы и др. инновации. Связь актуарных методов расчетов для них с задачами финансовой математики.
9. *Методы финансирования (фондирования) пенсионных планов с установленными выплатами.* Классификация методов фондирования. Индивидуальные и групповые методы. Методы «накопленных прав» и «проектируемых пособий». Методы финансирования в западных актуарных нормах.
Пример: оценка обязательств компаний согласно МСФО 19. Применение projected unit-credit метода.
10. *Построение пенсионных планов.* Примеры расчетов и моделирования. Модель Трубриджа: стационарная популяция. Сравнение планов с различными методами финансирования. Корпоративные пенсионные программы: актуарные аспекты западного и российского опыта.

Раздел III. Модели теории риска в страховании.

11. *Модель индивидуального риска.* Общая характеристика модели. Нормальная аппроксимация.
Пример: расчет тарифов по Методике (I) Росстрахнадзора.
Анализ применимости нормальной аппроксимации.
12. *Модель коллективного риска.* Классическая теория риска Лундберга – Крамера. Вероятность разорения за бесконечное время. Подстроечный коэффициент и неравенство Лундберга.
Пример: вычисление вероятности разорения за бесконечное время в случае показательного распределения единичного убытка.

13. *Модель коллективного риска (конечный горизонт времени)*. Анализ распределения суммарного страхового убытка. Производящая функция моментов этого распределения. Приближенные и рекуррентные формулы. Моделирование методом Монте-Карло. Распределение единичного убытка. Сложная пуассоновская модель. Смешивание. Распределение Пойа для числа убытков. Сложная смешанно-пуассоновская модель.
- Пример с реальными данными: моделирование страховых убытков в добровольном медицинском страховании.

Раздел IV. Стохастические модели: построение и анализ.

14. *Моделирование риска случайными процессами: примеры страховых и инвестиционных моделей*. Модель де Финетти. «Парадокс теории риска». Модели с динамическим управлением (обратными связями).

Пример: оптимальная стратегия выплаты дивидендов страховой компанией. Винеровский процесс. Модель страхования с инвестициями.

Модели инвестиционных рисков, используемые для актуарного анализа. ARMA модели.

Пример: модель Уилки для моделирования инвестиционных рисков.

Другие долгосрочные модели инвестиционных рисков.

15. *Модели денежных потоков*. Общие принципы построения, методы анализа. Динамический финансовый анализ. Тестирование денежных потоков. Метод сценариев. Анализ чувствительности, ситуационный («что-если») анализ, стресс-тестинг.

Пример: анализ рисков в пенсионной схеме (учебная программа CFRM).

16. *Принципы оценки риска и выбора при неопределенности* (обзор).

4. Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы.

В задачах 1 – 3 используется некоторая актуарная таблица службы.

- Пенсия в размере 100 должна выплачиваться некоторому лицу в течение 5 лет в начале каждого месяца, пока данное лицо живо. Пусть возраст пенсионера $x=68$, актуарная норма доходности $i=0,06$. Найти актуарную современную стоимость пенсии на дату первой выплаты, если
 - пенсионные накопления в случае смерти пенсионера наследуются;
 - пенсионные накопления не наследуются.

2. Полис страхования жизни имеет следующие условия: срок страхования – 6 лет; в случае дожития до окончания срока страхования застрахованный получает 10; в случае смерти застрахованного до окончания срока страхования выплачивается сумма 50 (в конце года смерти). Премии вносятся равными платежами в начале каждого года действия полиса. Возраст застрахованного $x=45$, актуарная норма доходности $i=0,05$.
- Найти годовую нетто-премию.
 - Найти резервы нетто-премий на начало каждого года страхования.
 - Как изменится ответ п. (а), если выплата страхового возмещения в случае смерти производится в момент смерти?
 - Как изменится ответ, если в условие задачи добавить следующее условие: в случае дожития до конца срока страхования застрахованное лицо получает, кроме суммы 10, сумму внесенных им брутто-премий (считать, что брутто-премии на 12% больше нетто-премий, т.е. нагрузка составляет 12%).
3. Работник некоторого предприятия, находящийся в возрасте $x=48$, поступил на работу на данное предприятие в возрасте $x=30$, и в настоящее время его месячная зарплата равна 9000 рублей. На предприятии имеется пенсионная программа с установленными выплатами, пенсионный возраст в которой $R=60$. Пенсии по старости назначаются в размере, равном 30% зарплаты за последний год перед выходом на пенсию. Рассчитать актуарные накопленные обязательства по следующим актуарным методам:
- «традиционному» методу накопленных прав (unit-credit);
 - методу накопленных прав с проектированием (прогнозированием) (projected unit-credit);
 - методу нормального возраста вхождения (entry age normal) с пенсионными взносами, равными постоянной доле от зарплаты;
 - методу индивидуальных равномерных премий (individual level premium) с пенсионными взносами, равными постоянной доле от зарплаты.
- Использовать следующие актуарные предположения: актуарная норма доходности $i=0,07$; рост зарплаты предполагается равным 2% в год до возраста 56, затем уменьшение на 1% в год.
4. Фирма, продающая некоторое оборудование, сопровождает его следующей 5-летней гарантией: в случае, если оборудование отказывает в течение этого

срока, то доля цены, возвращаемая покупателю, пропорциональна сроку, остающемуся до истечения срока гарантии. Так, если оборудование отказало, проработав 3 года, то покупателю возвращается 40% цены. Какую долю в цене оборудования составляет нетто-премия за эту гарантию? Из статистических наблюдений известно, что вероятности поломки оборудования в первом и последнем годах 5-летнего срока гарантии равны 0,2, а в остальных годах – 0,1. Считать, что внутри каждого года момент поломки распределен равномерно. Процентная ставка с непрерывным начислением равна 0,05.

5. Опишите страхование как модель перераспределения риска и приведите пример, иллюстрирующий уменьшение риска для всех сторон при взаимном страховании.
6. Опишите теоретическую структуру страховой премии. Что такое рисковая надбавка и зачем она нужна?
7. Некоторая фирма предлагает отправителям застраховать срочные почтовые отправления на таких условиях: при утере отправления выплачивается 1000, при доставке с нарушением сроков 50. Из статистических наблюдений известно, что из 10000 отправок в среднем 256 доставляются с нарушением сроков, а 23 теряются. Если фирма предполагает застраховать 100 отправок, какую нетто-премию она должна взимать, чтобы обеспечить покрытие страховых убытков с вероятностью 0,95? Тот же вопрос, если предполагается застраховать 1000 отправок.
8. Две страховые компании, страхующие однородные и независимые между собой риски, принимают решение об объединении. Покажите, что резерв, необходимый для покрытия страховых убытков объединенной компании с вероятностью, не меньшей 0,95, меньше, чем сумма таких резервов для обеих компаний в отдельности. Объясните этот факт.
9. В классической модели Лундберга найдите выражения для подстроечного коэффициента и для вероятности разорения за бесконечное время в том частном случае, когда распределение единичного убытка – показательное.

10. Опишите причины неоднородностей в страховой статистике, приводящие к необходимости использовать модели со смешиванием.

5. Примерная тематика рефератов, курсовых работ.

1. История развития актуарной математики в мире и в России.
2. Актуарные нормы в регулировании деятельности страховых компаний на Западе и в России.
3. Актуарные нормы в регулировании негосударственного пенсионного обеспечения на Западе и в России.
4. Актуарные нормы МСФО.
5. Тестирование денежных потоков и его применение в актуарном оценивании.
6. Стохастические модели пенсионных планов с установленными выплатами.
7. Связь актуарной и финансовой математики.
8. Проблемы построения моделей в целях оценки платежеспособности страховых компаний.
9. Моделирование государственной пенсионной системы и пенсионной реформы в России.
10. Модели финансовых рисков и выбора портфелей для страховых компаний и пенсионных фондов.

6. Примерный перечень вопросов к зачету (экзамену) по всему курсу повышения квалификации преподавателей.

1. Изложите кратко пункты лекции по теме «Сложные проценты, процентные ставки, ренты».
2. Как бы Вы ответили на вопрос студента о том, почему в актуарных расчетах всегда используется правило сложных процентов (а не, например, простых процентов)? Какие экономические аргументы можно привести в пользу естественности правила сложного процента?
3. Как бы Вы построили изложение материала, касающегося актуарного моделирования смертности, показателей смертности, таблиц смертности? Приведите основные формулы, примеры, задачи.
4. Придумайте и решите две задачи по теме «традиционные виды страхования жизни». Первая задача должна быть относительно простой (и стандартной), вторая – более сложной.

5. Изложите классификацию методов финансирования пенсионных планов. О каких практических вопросах Вы бы упомянули в этой связи?
6. Как бы Вы объяснили студентам методологические и содержательные различия между расчетами в страховании жизни и рисковом страховании? О чем здесь следует упомянуть, на чем стоит сделать ударение?
7. Расскажите о модели индивидуального риска. Придумайте и решите задачу.
8. Расскажите о модели коллективного риска для моделирования страховых убытков. Какими преимуществами она обладает по сравнению с моделью индивидуального риска?
9. Изложите Ваш план лекции об общих принципах оценивания риска в экономике и о мерах риска. Какие примеры Вы бы привели на лекции по этой теме?
10. Расскажите об основных принципах построения и анализа динамических стохастических моделей денежных потоков. Каковы потенциальные области применения такого рода моделей?

III. Распределение часов курса по темам и видам работ

№ п/п	Наименование тем и разделов	ВСЕГО (часов)	Аудиторные занятия (час)	Самостоятельная работа
1	Раздел I. Введение в актуарную математику.	12	8	4
2	Раздел II. Актуарные расчеты в страховых и пенсионных схемах.	15	10	5
3	Раздел III. Модели теории риска в страховании.	12	8	4
4	Раздел IV. Стохастические модели: построение и анализ.	9	6	3
	ИТОГО:	48	32	16

IV. Форма итогового контроля

Итоговый контроль предполагается проводить в форме коллоквиума, на котором слушатели будут представлять самостоятельно те или иные темы курса, лекции (в конспективном изложении), задачи и примеры, а также темы научной работы студентов.

V. Учебно-методическое обеспечение курса

1. Рекомендуемая литература (основная)

Н. Бауэрс и др. *Актуарная математика*. – М.: Янус-К, 2001.

2. Рекомендуемая литература (дополнительная)

Х. Гербер (Н. Gerber) *Математика страхования жизни*. – М.: Мир, 1995 (пер. с англ.).

А. В. Михайлов, О. В. Харченко *Моделирование и актуарный расчет корпоративных пенсионных программ*. – М.: Просвещение, 2003.

В. И. Ротарь и В. Е. Бенинг *Введение в математическую теорию страхования*. – *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 1994, 1, 5, 698 – 779.

А. Г. Шоломицкий *Финансирование накопительных пенсий: актуарные методы и динамические модели*. – *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2002, 9, 3, 544 – 577.

А. Г. Шоломицкий *Выбор при неопределенности и моделирование риска*. – Учебник, подготовленный в рамках Инновационного проекта развития образования, 2003.

A. Anderson *Pension mathematics for actuaries, 2nd ed.* – Winsted, Connecticut: Actex Publications, 1992.

C. D. Daykin et al. *Practical Risk Theory for Actuaries*. – Chapman and Hall, 1994 (рус. пер. готовится к изданию в издательстве ТВИП).

J. Grandell *Aspects of risk theory*. – Springer-Verlag, 1991.

C. L. Trowbridge *Fundamentals of pension funding*. – Trans. Society of Actuaries, 1952, IV, 17 – 43.

C. Starmer *Developments in non-expected utility theory: the hunt for a descriptive theory of choice under risk*. – *J. of Economic Literature*, XXXVIII, 332 – 382.

3. Перечень обучающих, контролирующих компьютерных программ, кино- и телефильмов, мультимедиа и т.п.

Обучающая компьютерная программа CFRM. Программа создана автором в рамках Инновационного проекта развития образования. Предназначена для обучения принципам динамического моделирования денежных потоков и динамического финансового анализа на примере модели пенсионного плана с актуарным управлением.