ПРОБЛЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ: ТЕЗИС ГЁДЕЛЯ И ЕГО ОБСУЖДЕНИЕ В СОВРЕМЕННОЙ ЛИТЕРАТУРЕ

Рассмотрим теперь обсуждение существования особых математических объектов. Позиция, связанная о признанием подобного существования, называется в литературе платонизмом, или, иначе, реализмом.

Допущение существования математических объектов призвано объяснить содержательность и истинность математического знания. Оно позволяет рассматривать математические теория не как неинтерпретированные исчисления, а как содержательные утверждения, описывающие некоторую реальность. Они, истинны, если дают ее правильные описания. Особые математические объекты требуются потому, что, содной стороны, невозможно трактовать математические теории как непосредственные описания реальных объектов. В истории философии неоднократно выдвигались доводы, показывающие эту невозможность. Напомним хотя бы о том, что математические теории, в отличие даже от самых абстрактных теорий математической физики, не проверяются экспериментами. А невозможно представить себе, чтобы математическая теория была отброшена потому, что ее утверждения противоречат данным опыта и наблюдения.

С другой стороны, математические утверждения никоим образом не произвольны. Математик не свободен изобретать любые объекты с любыми свойствами и отношениями. На этот факт неоднократно обращали внимание математики и философы. Например, А.Менне замечает; "Если бы математика была лишь изобретением, то математики могли распоряжаться в ней так свободно, как, например, поэты или сочинители сказок. Но такой свободы у них нет... Скорее, тут действуют математические законы... Такие законы должны быть открыты, а не изобретены. Они имеют силу независимо от того, кто и как первым сформулировал их в языке, к даже тогда, когда они еще никому не известны" (20, с.106).

Б литературе последних лет обращение к проблемам "математического реализма" часто связано с обсуждением позиции Курта Гёделя. Б статье "В чем состоят Канторовская проблема континуума?" (25, с.258-273) Гёдель затронул вопрос: возможны ли разные теории множеств (с канторовской гипотезой континуума или с ее отрицанием) подобно тому, как недоказуемость пятого постулата Евклида открыла путь для построения разных геометрий? В этой связи Гёдель обсуждает эпистемологические различия между ситуациями в геометрии и в теории множеств. В настоящее время, замечает он, вопрос об истинности определенной геометрической теории перенесен в кость физического рассмотрения. Физика, а не математика решает сейчас, какая из геометрий истинна. Но объекты теории множеств не принадлежат физической реальности[1]. И тем не менее, " несмотря на их удаленность от чувственного опыта, у нас есть что-то вроде восприятия также и для этих объектов, ибо аксиомы теория множеств как бы сами навязываются нам в качестве истинных. Я не вижу никаких причин, почему этому виду восприятия, т.е. математической интуиции, мы должны доверять меньше, чем тем восприятиям, которые приводят нас к построению физических теорий и к ожиданию, что будущий чувственный опыт согласуется с ними, а также к вере, что вопросы, не разрешимые сейчас, имеют смысл и будут разрешены впоследствии. Парадоксы теории множеств являются математически не более серьезной проблемой, чем обман чувств для физики" (25, с. 271).

Весьма любопытно дальнейшее развитие Гёделем этой аналогии. Математическая интуиция, говорит он, необязательно должна мыслиться как способность непосредственного знания о множествах. Ведь и знание о физических объектах не явля-ется непосредственным знанием о чувственных восприятиях. В физическом знании есть еще что-то выходящее за пределы непосредственного чувственного знания, но тоже являющееся в каком-то смысле "непосредственно данным". Математическая интуиция теснейшим образом связана о этими абстрактными, но и в то же время "непосредственно данными" элементами эмпирического познания. Эти абстрактные элементы не являются чисто субъективными, "скорее, они тоже представляют какой-то элемент объективной реальности, но, в отличие от

[1] Как считает Гёдель, все встречающиеся в математике множества можно свести к множествам целых чисел, множествам рациональных чисел (пар целых чисел), множествам действительных чисел (т.е. множествам множеств рациональных чисел), множествам функций от действительных чисел (понимаемых как множества пар действительных чисел), к которым применяется операция "быть множеством, состоящим из". Ее применения итерированы. - Прим. реф.

ощущений, присутствие их в нашем знании объясняется каким-то особым видом отношения между ними и реальностью" (25, с.272). В связи с этим Гёдель ссылается, как нетрудно догадаться, на И.Канта. Он подчеркивает, что существует глубокая аналогия между понятием множества (в его понимании) и категориями чистого рассудка в смысле Канта; функцией и первого, и вторых является синтез многообразного.

Интересный анализ концепции Гёделя дан Ж.Ладриером (15). Последний считает, что "платонизм" Гёделя имеет больше общего не с позицией Платона, а с концепцией Канта, поскольку математическая интуиция для Гёделя связана не с созерцанием математического объекта, а с его конструированием. В связи о этим Ладриер отмечает, что "термин "интуиция", используемый Гёделем, чтобы говорить о нашем познании математических объектов, выбран очень неудачно. Интуиция связывается о представлением о непосредственности, данности... Нужно уточнить, что речь у него идет о знании, являющемся результатом всей структурирующей деятельности познания в целом, а не просто присутствия некоей непосредственно наблюдаемой сущности" (15, с.295).

Тезис Гёделя об аналогии между физическим и математическим познанием, между чувственным восприятием физических объектов и интуицией математических объектов привлек внимание целого ряда исследователей. Так, Пенелопа Мэдди (Университет Нотр-Дам, Индиана, США) на основе подобной аналогии между математическими и физическими науками формулирует позицию "теоретико-множественного реализма", или "платонизма" (18, 19). "Центральным для этой концепции является убеждение, что математические утверждения либо истинны, либо ложны, что их истинностные значения зависят от свойств независимо существующих математических объектов (а не от структуры человеческого интеллекта, особенностей языка и пр.) и не зависят от нашей способности (или неспособности) определить, каковы именно эти истинностные значения" (19, с.495).

Чтобы отстоять подобную реалистическую позицию, требуется разрешение целого ряда затруднений. Например, известно, что физические объекты воздействуют на наши органы чувств и таким образом дают информацию о себе. Могут ли математические объекты быть в данном отношении подобны физическим? Отвечая на этот вопрос, Гёдель утверждал, что наше восприятие физических объектов далеко не так просто, как иногда представляют. В самом деле, мы непосредственно имеем ощущения и восприятия, а воспринимаем физический объект. Как это происходит? Единственное объяснение заключается в том, что в самом акте восприятия должен быть заложен абстрактный элемент, не порождаемый опытом, но и не вносимый интеллектом. Конечно, отмечает Мэдди, эти рассуждения Гёделя далеки от определенности. "Но его подход представляет определенный прогресс, ибо указывает, что лучшего понимания математической интуиции можно достигнуть через анализ и роль абстрактного элемента чувственного опыта" (18, с.169). Мэдди пытается продвинуться дальне по этому пути. Конечно, восприятие причинно обусловлено воспринимаемым объектом, но акт восприятия характеризуется в то же время определенными установками (beliefe) относительно воспринимаемого предмета. Откуда берутся эти установки? Ответ помогают найти психологические исследования, и прежде всего работы Ж.Пиаже. Выяснено, например, что способность различать фигуру и фон врождена человеку и некоторым животным, В процессе психологического развития у ребенка формируются механизмы, на основе которых складывается установка (perceptual belief) на восприятие фигуры, размеров и расстояний, и еще более сложные механизмы, связанные с различением и отождествлением объектов. Эта последняя способность формируется только тогда, когда у ребенка накоплен значительный опыт восприятия. Способность восприятия физических объектов формируется у ребенка между одним месяцем и двумя годами. Сложность здесь заключается в том, что ребенок должен научиться идентифицировать последовательностъ образов как относящихся к одной и той же вещи. По мере формирования данной способности в головном мозгу складываются особые "детекторы" - объединения нервных клеток, ответственные за соответствующую установку.

В ходе психического развития ребенка приобретается также установка на восприятие множеств физических объектов. Исследования Пиаже показывают, что способность воспринимать множества формируется между 7 и II годами (одновременно с установкой на восприятие чисел) на основе многочисленных манипуляций с группами физических объектов. Мэдди решается допустить в мозгу особые детекторы и для множеств, и для геометрических фигур. Модернизируя Канта, она пишет; "То, что у треугольника три стороны, в некотором смысле "вмонтировано" в детектор треугольников как особый механизм, стимулирующий движение глаз от одного угла треугольника к другому... Грубо говоря, сама форма детектора треугольника гарантирует убеждение субъекта в том, что "любой треугольник имеет три стороны" (18, с.185).

Убеждения такого рода имеют нелингвистическую природу. Мэдди называет их "интуитивными установками". Она могут формироваться даже тогда, когда у субъекта еще нет языковых средств для их выражения. Лишь позднее он будет искать для них адекватных языковых формулировок. Результаты формулировки интуитивных установок в языке Мэдди называет интуициями. Утверждения о множествах как бы обладают некоторой силой, заставляющей нас - как выражался Гёдель - считать их истинными, если они являются удачными языковыми формулировками для соответствующих интуитивных установок. Вообще говоря, результаты подобного языкового оформления могут быть и ложными, если, например, языковое выражение подобрано неудачно или неверны исходные интуитивные установки. Позиция Мэдди выгодно отличается от многих рассмотрений математической интуиции тем, что она не фетишизирует интуицию и не приписывает ей таинственного источника или чудодейственной силы: "Статус интуиций, тот факт, что они как бы обладают особой силой, заставляющей нас их принимать, являются некоторыми свидетельствами в их пользу, но достаточные опровергающие свидетельства всегда могут перевесить эти исходные преимущества" (18, с,187-188). Таким образом, Мэдди видит в интуиции заслуживающее доверяя, но в принципе опровержимое основание знания - основание, которое само может быть подвергнуто теоретической критике я пересмотру.

Как интуиция множества объектов, описанная таким образом, относится к математической теория множеств? Она образует основания этой теории, но ни в коем случае не исчерпывает ее содержания. Не опровергаются ли данные рассуждения тем фактом, что могут быть различные, даже несовместимые формулировки теории множеств? Мэдди считает, что данное обстоятельство не представляет затруднений. Различные варианты теории множеств опираются на одну и ту же интуицию относительно множеств. Различия проявляются только в "теоретической надстройке" над интуицией.

Мэдди развивает действительно присутствующий у Гёделя кантианский мотив - утверждение о существования некоторых познавательных структур, оформляющих наш физический опыт, которые, будучи взяты в чистом виде, могут стать лоточником математического опыта. Но при этом она переносит рассуждение из плоскости трансцендентальной философии в плоскость эмпирического рассмотрения, использующего проверяемые психологические данные.

Принципиальная ограниченность подхода Мэдди для понимания природы математики лежит, на наш взгляд, не в ее попытках обосновать математический реализм, а в другом. Пытаясь установить контакт между математикой я реальностью, она выделяет самый нижний этаж математического знания - интуицию, формирующуюся в практическом взаимодействии человека о объектами окружающего мира, но при этом, по-видимому, забывает, что в теория множеств "необходимо четко отделять все вопросы, связанные с идеей кардинального числа (и, в частности, о понятием бесконечности), от вопросов, ведущих только к понятиям принадлежности и включения. Эти последние наиболее интуитивны и, по-видимому, никогда не вызывали споров"[1]. Подход Мэдди не дает никаких указаний на решение многочисленных проблем, возникающих, в частности, в связи с понятием бесконечности.

В следующей своей работе (19) Мэдди продолжает защиту теоретико-множественного реализма. Она исследует природу натуральных чисел, чтобы решить проблему: следует ля наряду о существованием множеств признать и существование чисел? Тут мы оказываемся перед дилеммой; с одной стороны, если распространить тезис реализма и на числа, то математический универсум окажется "перенаселенным", и будет уместно вспомнить о "бритве Оккама", о другой стороны, теоретико-множественная редукция чисел вызывает серьезные возражения. Например, П.Бенацерраф выступает против этой редукции, доказывая несводимость чисел от противного (7). Пусть существует последовательность объектов, к которым сводится последовательность натуральных чисел. Эти объекты должны были бы обладать всеми свойствами натуральных чисел (иначе - как можно сводить к ним числа?) и какими-то еще свойствами (иначе - чем бы они отличались от чисел?). Эти дополнительные свойства никак не связаны со свойствами чисел, поэтому нет никаких оснований предпочесть данную последовательность какой-то другой, обладающей помимо свойств натуральных чисел иными дополнительными свойствами. Нельзя решить, какая из последовательностей выражает "сущность" натуральных чисел. Как известно, имеются разные теоретико-множественные представления натуральных чисел, обладающие разными свойствами. Если бы одно из них было "подлинным" определением чисел, должны бы-

[1] Бурбаки Н. Теория множеств: Пер. с фр. - М., 1965, с 325

ли быть основания для выделения его из всех других. Поскольку же подобных оснований не находится, числа не являются ни множествами, ни еще чем-то, что отлично от чисел.

Пытаясь ответить на подобные возражения, Мэдди призывает к принципу онтологической экономии и защищает утверждение, что "числа являются свойствами множеств объектов, аналогично тому, как длины суть свойства Физических объектов; поэтому теория чисел есть часть теории множеств, а именно, та часть, где речь идет непосредственно о числовых свойствах конечных множеств" (19, с,502). Однако известно, что Г.Фреге критиковал утверждение, что числа суть свойства. Из всех его возражений единственно серьезным Мэдди считает следующее: условия тождества для свойств более сильны, чем условия равенства для множеств, откуда вытекает, что свойства, определяющие одинаковые объемы, не обязательно тождественны. Так» свойства множества из К элементов, заданного одним способом, не будут тождественны свойствам того же множества, во заданного другим способом. Мэдди предлагает решить это затруднение» воспользовавшись аналогией из физических наук. Мы умеем отождествлять величины, получающиеся в результате измерений длины предмета, выполненных разными способами и инструментами. Проблема, поднятая Фреге, аналогична вопросу, является ли, окажем, длина, измеренная одной линейкой, той же, что и длина, измеренная другой линейкой. И вопрос об отождествлении свойств множеств может быть решен простым введением условия вроде "закономерного совпадения объемов". Итак, существуют различные способы и разные шкалы для измерения некоторых свойств физических объектов. Точно так же, существуют различные способы измерения числовых свойств множеств.

Следует ли включать термины для этих последних свойств в формальный язык теории множеств? Этот вопрос, полагает Мэдди, не является принципиальным для концепции теоретико-множественного реализма. Он представляет собой частную формулировку проблемы универсалий и затрагивает математику не больше, чем физические науки. Числа имеют тот же онтологический статус, что и длины, скорости и массы - каким бы он ни был.

Тезис Гёделя обсуждает и Чарлз Д.Парсонс (Оксфорд, США), по мнению которого аналогия между восприятием физического объекта я математической интуицией подводят к самой сердцевине проблемы математической интуиции (23), Из этой аналогия следует, что интуиция, как и восприятие, может быть de re (т.е. интуицией объекта) и de dicto (т.е. интуитивным ухватыванием содержания некоторого суждения или его истинности). Гёдель, как считает Парсонс, не различает эти виды интуиции, но законен лишь второй ее вид. В самом деле: "Как математическая интуиция может созерцать некоторые объекты, если в математике Вообще нет индивидуализируемых объектов?" (23, с.I46)[1), Математические объекты - это просто нечто, удовлетворяющее определенным общим принципам. Они лишены индивидуальной специфики, и нет никаких оснований для предпочтения одной реализации - другой. В математике мы воспринимаем не объект, а его тип (например, что некая последовательность есть последовательность штрихов, т.е. относится к типу последовательности, где один элемент следует за другим).

Подчеркивается, что способность воспринимать объект через его тип проявляется не только в математической интуиции. Она присуща восприятию вообще. Так, мы видим в книге <u>слово</u>, а не его конкретный экземпляр. Поэтому, как утверждает Парсонс, универсалия воспринимается как объект, данный в восприятии, что характерно для человеческого познания вооб-

[1) Это мнение разделяет не только Парсонс. Так, Майкл Джибин (Массачусетский университет, США) убежден, что, "хотя возможно, что существует математическая интуиция в смысле ясного, отчетливого я» может быть, непосредственного восприятия некоторых математических истин, она не предполагает интуиция объектов" (12, с.136).

ще. В этом смысле математическая интуиция не представляет ничего исключительного.

Более сложен случай, когда делается высказывание, распространяемое на неопределенное множество типов. Здесь задействуется уже не просто восприятие, а воображение. На воображении, например, основывается утверждение, что любую последовательность штрихов всегда можно продолжить. Парсонс отмечает, что для воображения подобного рода существенна роль временной транзитности. Благодаря ей мы представляем, что после того, как мы добавили к последовательности еще один штрих, все остается по-прежнему и данную операцию можно повторить. Эти рассуждения заставляют вспомнить учение Канта об основной арифметической интуиции. Но Парсонс не развивает их в данном направлении.

По его мнению, сфера влияния математической интуиции чрезвычайно ограниченна. Так, объектами интуиции являются конечные множества объектов и множества этих множеств. Может быть, отсюда следует, что натуральные числа, рассматриваемые как результат пересчета объектов, сами являются объектами интуиции. Но теория множеств в целом» как и принцип математической индукции, лежит вне сферы возможностей интуиции (23, с. 165).

Подход, идейно близкий к подходу Ч.Парсонса, развивает М.Резник (Университет Северной Каролины, США)[1] хотя при этом он, в отличие от Мэдди и Парсонса, и не обращается

непосредственно к тезису Гёделя. В статье "Математика как наука об образцах" (26) предпринимается попытка преодолеть затруднения платонизма, изменив понимание математического объекта. Затруднения возникают, если понимать последний как

[1] О выступлениях Ч.Парсонса и М.Резника на УП Международном конгрессе по логике, методологии и философии науки см. раздел Об итогах УН Международного конгресса..." в журнале; Вопр. философии, М,, 1984» № I, с.47, 69.

конкретную вещь, не существующую, однако, в пространство и времени. При этом делается допущение, что подобные объекты, взятые сами по себе, изолированно, обладают тема свойствами, которые приписываются им математической теорией. После этого философы безуспешно ломают голову над тем, в чем заключается существование подобных объектов и как в них могут корениться свойства, которые потом надлежит открыть математикам. Вместо подобного подхода в рассматриваемой статье утверждается, что математическими объектами являются "образцы" (patterns). Что это такое, поясняется на следующем примере. Допустим, детектив анализирует несколько убийств, совершенных на протяжении некоторого промежутка времени, и замечает, что все они выполнены одним и тем же почерком, т.е. следуют одному и тому же образцу. Повторяются орудие убийства, приемы, обстоятельства. Выделив этот "образец" в чистом виде, детектив может вывести отсюда новое знание: о личности или физической силе убийцы, и т.п.

Математика является наукой не об отдельных математических объектах и присущих им свойствах, а о структурах, или образцах. Говорить о существовании, например, числа "13" и о свойствах его самого по себе бессмысленно. "Объекты математики, т.е. сущности, именуемые ее константами и являющиеся не областями квантификации, суть не более чем бесструктурные точки или положения в структурах. Они не имеют никакой определенности и никаких свойств вне структуры. Более того, различные математические результаты, создающие впечатление, будто математические объекты, например, числа, обладают какой-то внутренней структурой (например, являются множествами), в действительности относятся к связям внутри данной структуры" (26, с.530). Подобная точка зрения, по мнению автора, открывает пути для объяснения математического познания. Он выдвигает предположение о том, что математическое познание опирается на способность распознавания образца, задействованную в самом нашем восприятии. На сходную познавательную способность указывает также лингвистическое и музыкальное познание. Так, человек способен уловить структуру предложения или структуру музыкальной фразы и порождать по выявленному образцу новые предложения или музыкальные фразы, и даже создавать новые, до известной степени отличные от старых (например, музыкальным размером) образцы. Резник верит, что на этом пути можно объяснить также знание об "образцах" бесконечности, но более конкретно это не показывается.

Принципиальным для данной концепции является вопрос о критериях тождества образцов и позиций в них. Рассматривая различные отношения между структурами (конгруенция, вхождение как часть), автор приходит к выводу, что тождество имеет смысл только по отношению к элементам внутри структуры. А сами структуры лучше исключить из области данного отношения. Подобное заключение, по-видимому, связано с желанием сохранить специфику и, так сказать, "индивидуальность" различных структур. С этой точки зрения решается вопрос о те-оретико-множественной редукция чисел. Конечно, арифметика применяется при построении теория множеств, а теория множеств может использоваться при построении арифметики. Но Резник не видит никакого смысла в том, чтобы объявить структуру натуральных чисел и операции "следования за" по сути тождественными структуре некоторой совокупности множеств. Ведь специфика чисел заключается в том, что они являются позициями в определенном образце, поэтому замена данного образца на другой не может объяснить или показать "природу" чисел. (Здесь становится достаточно очевидным отличие концепции Резника от учения о математических структурах, предлагаемого Бурбаки. Поэтому мы и предпочли перевести его термин немного непривычным словом "образец" вместо "структура".)

Чтобы не создавалось искаженного представления, будто платонизм принят в современной литературе повсеместно, мы процитируем в заключение этого параграфа Чарлза Чихару: "Что же можно сказать о гёделевской защите реальности математических объектов? Какого рода данные о математическом опыте мы имеем? Можно ли их сравнить, например, о данными о броуновском движении молекул (которые явились решающими свидетельствами в защиту реального существования молекул. - З.С.)? В чем состоит упоминаемый Гёделем опыт того, что аксиомы как бы сами навязываются нам как истинные? Как много людей имеют этот опыт? И при каких условиях? Сказать по правде, есть что-то подозрительное в доводах в защиту существования множеств, опирающихся на столь неопределенные и не поддающиеся никакой проверке свидетельства. Они похожи на апелляцию к столь же расплывчатому "мистическому опыту" для оправдания веры в бога" (9, с.215). Платонизм возродился в современной литературе, говорит Чихара, потому что он получил поддержку со стороны столь выдающихся логиков, как К.Гёдель, Г.Крайзел и У.Куайн. Но это возрождение совершенно беспочвенно.

Тем не менее нам кажется, что для современной ситуации в философии математики характерно то, что даже такая радикально "реалистическая" позиция, как гёделевская, вызывает большое внимание и находит защитников. Это связано, не в последнюю очередь, с реакцией на "формализм" в понимании математических теорий.