ПОДХОД Л.ВИТГЕНШТЕЙНА К ФИЛОСОФСКИМ ПРОБЛЕМАМ МАТЕМАТИКИ

а) О стиле и о целях витгенштейновских размышлений над философскими проблемами математики

Вклад Витгенштейна в философию математики до сих пор не получил должной оценки и внимания, хотя западные авторы время от времени обращаются к этой теме (5; 8; 14; 24; 32; 33). Зачастую рассуждения Витгенштейна получают в корне неадекватную интерпретацию и оценку. Это связано с тем, что они помещаются в неподходящий контекст. Когда философию математики понимают как исследование по основаниям математики, то невольно пытаются любую позицию отождествить о одной из школ в основаниях математики. Это характерно для рецензий, помещенных в (25). Так, Л.Р.Андерсон не видит у Витгенштейна ничего, кроме опровержения логицизма, и считает поэтому, что его рассуждения давно потеряли актуальность (25, с.481-490). М.Даммет называет Витгенштейна финитистом и конструктивистом (25, с.491-509), и аналогичную оценку дает П.Бернайс (25, с.510-528). Неспособностью "почувствовать" рассуждения Витгенштейна отмечена, на наш взгляд, статья Чихары (8), представляющая собой рецензию на издание (30).

Из работ, анализирующих рассуждения Витгенштейна в адекватном контексте, т.е. в связи с его общей философской концепцией, назовем статьи М.Ригли (Университет Кента, Великобритания) (32), Элис Эмброуз (Смит Колледж, Великобритания) (5), Карло Пенко (Университет Генуи, Италия) (24). П.Цифф (Университет Северной Каролины, США) пытается даже подражать стилю заметок Витгенштейна (33).

Для того чтобы правильно понимать рассуждения Витгенштейна, надо, на наш взгляд, разобраться, в чем, по Витгенштейну, состоит цель философских размышлений над математикой, и не путать ее о целью, которая ставилась исследовани-ями по основаниям математики. Период господства в философии математики основных школ по основаниям привел к укоренению Следующего взгляда на задачи философии по отношению к математике: эти задачи видели только в преодолении парадоксов те-ории множеств я вообще противоречивости. Конкретнее, надо было найти их корень, а потом запретить виновные способы рассуждения и добиться их искоренения из математических рассуждений.

Совсем иначе понимает свою задачу Витгенштейн, Свое понимание он выражал не в четком программном виде, а скорее афористически. Мы реконструировали бы его позицию таким образом. Для него, как отмечалось выше (см. с.8-9 наст.обзора), возникающие в математике проблемы являются математическими, а не философскими. Не дело философии устранять какие-то математические теории или запрещать способы рассуждения. Если развитие математики ведет по определенному пути (окажем, к использованию понятия актуальной бесконечности), то философия не должна и не может пытаться препятствовать этому, пытаться повернуть развитие математики на другие рельсы. К.Пенко отмечает, что важнейшее различие между позициями Витгенштейна и интуиционистов связано о вопросом о том, требует ли его философия математики "модификации или перестройки математической практики в духе конструктивизма? Как недавно показал фон Вригт, в этом пункте различие между Витгенштейном и интуиционистами чрезвычайно глубоко" (24, с.79).

В чем же тогда состоит задача философа? Философ должен вмешиваться тогда, когда у математиков появляются сомнения и возникают чувства дискомфорта, неуверенности, мешающее им продолжать ах профессиональную деятельность. Например, математик может начать сомневаться в том, имеют ли смысл не-конструктивные доказательства существования, над которыми он работал до того. Эти сомнения могут довести его до желания вообще бросить свою работу и т.д. В качестве другого примера можно привести опасение, что в здание математики закралось противоречие. Но при этом философия должна заниматься не проблемами, возникающими в математической теории как таковой, а проблемами» возникающими в рефлексии математика. Призвание философии в этом случае - найти причины парализующих сомнений и показать, что нет оснований для того» чтобы прерывать нормальную математическую деятельность. Задача философии математики, для Витгенштейна, является, в сущности, терапевтической: вносить успокоение в сознание математиков» устранять сомнения и нерешительность. А после этого они уже сами разберутся о противоречиями и парадоксами, появляющимися в их теориях.

Насколько серьезна эта цель? Чтобы судить об этом, ми позволим себе следующую длинную выписку; "Как бы то ни было, и сегодня нельзя переоценить психологического эффекта, производимого антиномиями на многих математиков, В 1946 г., спустя почти полстолетия после того, как антиномия Рассела повергла в отчаяние Дедекинда и Фреге, один из выдающихся ученых нашего времени (Г.Вейль. - З.С.) сделал следующее признание: "Мы меньше, чем когда-либо, уверены в первичных основах (логики к) математики. Как все и вся в мире сегодня, мы переживаем "кризис". Он продолжается почти пятьдесят лет. На первый взгляд, он не мешает нашей ежедневной работе; однако я могу признаться, что на самом деле он оказал сильное влияние на мою математическую деятельность: он направлял мои интересы в область» казавшуюся мне относительно "безопасной", и постоянно подрывал во мне энтузиазм и решимость, необходимые для всякой исследовательской работы"[1)].

Мы так подробно останавливаемся на этом моменте, потому что тут, на наш взгляд, лежит источник частого непонимания рассуждений Витгенштейна, Некоторые авторы даже решаются упрекать его в непонимании логики и в путанице (8; 25, с.485-486). А дело в том, что Витгенштейн говорит не об исчислениях, теоремах и проч., а о понимании, укореняющемся в связи о ними в сознании математиков и логиков. Образы, ассоциации и смыслы» связываемые о некоторыми исчислениями, математическими процедурами или теориями, подчиняются совсем иным законам, нежели сами исчисления и теоремы. И проблемы философии для Витгенштейна появляются именно на этом уровне.

Эти образы и понимания не всегда можно внятно и явно списать. Данным обстоятельством отчасти объясняются некото-

[1)] Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теория множеств.-М., 1966, с.15, рые особенности стиля рассуждений Витгенштейна. Последние являются, как правило, рассуждениями на примерах, Витгенштейн разрабатывает их детально, не ленясь производить перемножение трехзначных чисел или выписывать периоды рациональных дробей. Это нужно, чтобы мы успели вдуматься в то, что мы на самом деле делаем, когда производим математические операции.

Оказанное выше требует немедленного пояснения, чтобы не возникло неправильного понимания. Мы только что оказали, что Витгенштейн рассуждает не о теоремах или теориях, а об образах и ассоциациях, с ними связывающихся. Но ведь сам Витгенштейн постоянно подчеркивает, что он не занимается образами, представлениями и проч. Вот одно характерное высказывание; "Снова и снова я повторю; я контролирую "деловые бумаги" математика; его душевные процессы, радости, депрессии, инстинкты, как бы они т были важны в других отношениях, меня не занимают" (29, с.295). Нет ли тут противоречия? Нам кажется, что нет. Цель Витгенштейна - показать математикам, что в их "деловых бумагах", т.е, в их теориях и вычислениях, вовсе не содержатся те образы и представления, которые вызывают у них затруднения и мешают нормальному продолжению данной "языковой игры". Любимов словечко Витгенштейна - "проза". Последнюю он противопоставляет вычислениям и исчислениям, которые я составляют подлинную математику. Но о ними постоянно связывают какую-то "прозу", т.е. интерпретации и ассоциации, и в этом лежат причины затруднений, о которыми должен бороться философ.

В качестве наиболее часто упоминаемых в текстах Витгенштейна (28, 29, 30, 31) источников тех затруднений математиков, которые требуют вмешательства философии, фигурируют следующие два.

Во-первых, это попытка трактовать математику как своего рода естественную науку, в частности, понимать ее предложения по аналогии о эмпирическими. Витгенштейн часто полемически выступает против расселовского сравнения логики и математики с зоологией, которая изыскивает, какие на белом свете есть виды животных, и стирается правильно юс описать (ср., например, 31, с.225).

Во-вторых, это тенденций к обобщению, приводящая к игнорированию специфики отдельных случаев. Данная тенденция свойственна математике. Но она может приводить к серьезным затруднениям в том, что касается пониманию того, что мы делаем (30, с.13-22), "Я могу как философ говорить о математике, - объясняет Витгенштейн, - потому что я хочу рассмотреть только затруднения, возникающие из-за слов обыденного языка, таких, как "доказательство", "число", "последовательность", "порядок" и т.д, (30, с.14), Затруднения, возникающие в связи со специальными математическими терминами, продолжает он, "не столь навязчивы, и их не так трудно устранить" (30, с.15)[1], Затруднения, о которых он собирается говорить, "возникают из тенденции уподоблять друг другу выражения, имеющие в языке разные функции... Поэтому я буду подчеркивать различия там, где обычно замечают сходство - хотя и это» конечно, может привести к неправильному пониманию" (30, с.15).

В дальнейшем мы рассмотрим на примерах, какие затруднения производятся двумя названными тенденциями.

б) Витгенштейн о теоремах существования и о проблеме существования математических объектов.

Витгенштейн старается заставить читателей и слушателей своих лекций обратить серьезное внимание на то, что доказа-

[1] В задачу философии, подчеркивает он также, вовсе не входит прояснение и уточнение специальных математических понятий. "Философская ясность понятий оказывает на развитие математики такое же воздействие, как солнечный свет на рост картофельных побегов. (В темном подвале они вырастают до метра)" - (29, с.381).

тельства бывают разными (29, с.229). Слово "доказательство" в атом отношения подобно таким словам, как "народ", "король", "религия". Доказательства, по его мнению, связаны отношением семейного сходства. Ко нет никакого общего свойства, принадлежащего всем доказательствам без исключения и составляющего их сущность. Более того, "каждое новое доказательство в математике расширяет понятие доказательства" (31, с. 10), "никакая черта доказательства не является несущественной" (31, с.115). Высказывается мнение, что доказательства существования должны состоять в построении того объекта, существования которого доказывается» иначе они не имеют смысла. Данное мнение защищал, например, Г.Вейль. Но действительно ля доказательства существования <u>должны</u> быть построениями? Откуда такое долженствование? Защитники этого мнения убеждены, что знают, в чем состоит сущность математического существования, и поэтому могут судить, какими должны быть доказательства существования. "Если бы была такая вещь, как существование... то тогда, может быть, можно было говорить, что каждое доказательство существования должно делать то-то и то-то. Вейль говорит так, как будто у него есть ясная идея существования, независимого от доказательства, как будто какая-то "естественная история доказательств" обнаружила, что только доказательства такого-то вида доказывают существование... Каждое доказательство существования отличается от другого, и каждая "теорема существования" имеет свой смысл, соответствующий тому, может или не может быть построено то, существование чего доказывается" (31, с.117). "В действительности, существование -это то, что доказывается теоремами, называемыми теоремами существования" (29, с.374). Итак, отрицание неконструктивных доказательств существования опирается на своего рода "натурализм" в понимания математических объектов. Как будто это что-то определенное, от нас независимое, и мы, выяснив, что это такое, отбираем доказательства, которые доказывают подлинное существование. Интуиционисты и конструктивисты, говорит Витгенштейн, не понимают, что нельзя нигде подсмотреть я определить сущность математического существования. Они просто дают свое определение, но почему мы обязаны именно ему отдавать предпочтение?

Идея о том, что для понимания любого математического утверждения надо обращаться к его доказательству, является одной из центральных в Витгенштейновских рассуждениях о математике. Как нам кажется, Витгенштейн приписывал ей не-малое "терапевтическое" действие. В самом деле, можно долго мучаться, пытаясь представить себе, что же доказано, если доказано, например, что каждое множество может быть вполне упорядоченным. Витгенштейн хочет навести на следующую мысль: нельзя абсолютизировать формулировку теоремы и рассматривать ее как описание некоторого независимого факта. "Если ты хочешь знать, что означает выражение "непрерывность функции", посмотри на доказательство ее непрерывнос-ти; оно покажет тебе, что было доказано" (29, с.369-370). Но не надо для этого всматриваться в результат, особенно в расселовской записи, подчеркивает он.

Витгенштейн часто приводит пример ложной аналогии, затемняющей соотношение математического доказательства и доказанного факта. Это - нахождение полярной экспедицией Северного полюса, Северный Полюс существовал до того, как экспедиция смогла достичь его. Смысл утверждений о нем не зависит от того, как и когда экспедиция нашла его. Но о математическими фактами дело обстоит вовсе не так! Они не существуют независимо от доказательства. Их доказательство и есть смысл утверждений о них. "Посмотри на доказательство и реши, - говорит Витгенштейн,- что оно доказывает" (29, с.373).

В связи с проблемой математического существования интересна витгенштейновская критика данного Фреге и Расселом определения натурального числа как класса эквивалентных множеств. Само стремление дать определение числа, утверждает он, вытекает из неправильного представления о том, что такое значение олова. Считается, что существительное должно обозначать какой-то предмет или определенный мысленный образ В математических рассуждениях, в отличив от обеденных, числа ведут себя как существительные. (Воля в обыденной жизни мы скажем; "У меня пять яблок, у тебя три яблока, у меня больше яблок, чем у тебя", то в арифметике этому будет соответствовать утверждение "пять больше трех".) Поэтому начинаются поиски того предмета, который соответствует числу и является его значением. Поскольку ничего подходящего найти не удается, то формалисты пытаются отождествить число и цифру, т.е. знак. Но, замечает Витгенштейн, число и его знак, очевидно, не тождественны. О последнем можно сказать то, чего нельзя оказать о числах, и наоборот.

Где же выход? Витгенштейн заявляет, что затруднение связано я о тем, что математика окружена для нас особым ореолом значительности. Поэтому он предлагает говорить не о математике, а о шахматах. Попробуем вместо вопроса: "О чем арифметика?"- спросить себя: О чем шахматы? Что такое шахматная фигура? Очевидно, что это не кусочек дерева или слоновой кости, а нечто большее, для чего фигурка выступа-ет только знаком. В то же время в данном случае мы хорошо понимаем, что она не является знаком какого-то идеального объекта. Шахматная фигура, знаком которой выступает данная фигурка определяется через ее роль в системе правил шахмат-ной игры[1)].

Комментируя эти рассуждения Витгенштейна, Ригли пишет: "Витгенштейн говорит тем самым, что математические формулы сами по себе не обозначают и не означают, но имеют значение,

[1)] В статье С.А.Крипке (14) понятие "следования правилу" рассматривается как центральное для витгенштейновской философии математики.

лишь поскольку с ними обращаются согласно правилам" (32, с.53). Витгенштейн постоянно использует термин calculus, который в зависимости от контекста надо понимать как "исчисление" или "вычисление". "Математика целиком состоит из вычислений", - писал Витгенштейн (29, с.468). Комментируя это высказывание, Ригли пишет: "Вычисление" ость процедура манипулирования с математическими формулами по определенным правилам. Для Витгенштейна "вычислять" - значит оперировать по правилам исчисления, поэтому любая работа в математике - будь то алгебра или анализ, или элементарная геометрия - становится вычислением" (32, с.53), Отсюда делается вывод, что в математике вообще нет предложений, "ибо у нее нет предмета; это не наука о чем-то. Математические предложения, вроде ... $e^{1\Pi}$ - -1, не являются предложениями, это просто элементы символической игры, они не имеют смысла" (32, с,52-53). Напомним, что для Витгенштейна предложения, или суждения, - это то, что может быть истинным либо ложным,

Итак, математические предложения не истинны и не ложны. Но Витгенштейн не ограничивался подобной констатацией, а рассматривал отношения между математическими формулами я истинными эмпирическими констатациями вроде "три яблока я четыре яблока вместе дают семь яблок". Рассмотрение этой связи возвращает нас к вопросу о том, как доказательства определяют смысл доказываемых утверждений.

в) Витгенштейн об отличии математических предложений от эмпирических и об отношения между ними

Витгенштейновское рассуждение о том, что доказательство определяет смысл доказываемого, имеет, на первый взгляд, парадоксальные следствия. В самом деле. Если это так, то; 1) мы никак не можем доказать того, что хотим доказать, ибо результат доказательства будет иметь смысл, отличный от того, какой имело предположение, пока оно не было доказано; 2) окажется, что невозможны разные доказательства одного и того же математического положения. Следует ли отсюда, что рассуждения Витгенштейна противоречат математической практике? Элис Эмброуз предпринимает попытку защитить его от этих обвинений (5). Решающим моментом тезиса Витгенштейна, что доказательство конституирует смысл доказываемого, говорят она, является проведение различия между эмпирическими и математическими предложениями. Когда мы убеждаемся, что некоторое эмпирическое предложение истинно (или ложно), это не влияет на его смысл, а просто добавляет какую-то внеязыковую информацию. Совсем по-иному обстоит дело о математическими предложениями. Тут доказательство влияет на словоупотребление. Узнав, что единорогов и кентавров не существует, мы вое равно можем осмысленно говорить о них. Но когда мы узнаем, что о помощью циркуля и линейки угол нельзя разделить на три равные части, то фраза: "Я разделил этот угол на три равные части с помощью циркуля и линейки"- будет не ложной, а бессмысленной. Естественная реакция на нее: "Бы что-то путаете или не понимаете смысла данной задачи". Следовательно, доказательства влияют на использование языка; они создают новые языковые правила. А раз так, то доказательство не может не влиять на смысл доказываемого.

Так, когда была доказана основная теорема алгебры, было введено новое исчисление, построена новая область языка. Это воспринимается как открытие какой-то независимо от нас существующей истины, но в действительности является созданием новой сферы языка, в которой прежние символы получают новое использование и, следовательно, новый смысл. Доказательства тем самым выступают как основания для нового использования языка (которое, конечно, согласуется с прежним использованием).

Что касается разных доказательств одной и той же теоремы, то на это затруднение можно ответить так; они действительно будут доказательствами одного и того же не тогда, когда в конце у них стоит одна и та же формула, а только тогда, когда этими доказательствами вводятся одни и те же правила, т.е. создается одна и та же сфера использования языка. При этом очень важна роль решения. Два доказательства могут считаться доказательствами одного и того же, если в результате их мы решаем ввести одни и те же языковые правила. Например, корни уравнения $x2 + 2x + I = 0$ можно вычислять разными способами, но в любом случае мы будем говорить, что у него есть два совпадающих корня, равных минус единице. Такой способ выражения соответствует основной теореме алгебры. И если мы всегда следуем ему (говоря о разных, но совпадающих корнях), то различные способы доказательства того, что данное уравнение имеет такие-то корни, становятся доказательствами одного и того же. Таким образом, математические предложения - это не просто формулы. Они выступают еще и как правила использования языка.

Надо обратить особое внимание на случай, когда одни и те же олова (например, "куб", "число", "прямая") встречаются в математических теориях и в обыденной жизни или эмпирических науках. В этих случаях математические предложения будут выступать как правила для употребления соответствующих слов в обычном языке. Витгенштейн неоднократно повторяет, что "связь геометрии о предложениями обыденной жизни, в которых речь идет о черточках» границах цветовых пятен, гранях, углах и проч., состоит вовсе не в том, что геометрия говорит о подобных, но только идеальных гранях, углах и проч. Эта связь состоит в отношении предложения и его грамматики .. Применяемая геометрия есть грамматика высказываний о пространственных предметах" (29, с.319), Геометрические предложения являются постулатами о видах и способах описания фактов и тем самым - предложениями синтаксиса. Аналогично, "арифметические предложения ничего не говорят о числах, но определяют, какие предложения о числах имеют смысл, а какие - нет" (31, с.51), Итак, математические теория не описывают какой-то идеальной реальности, соответствие которой делает математические предложения истинными. Таковой реальности нет, а математические предложения не являются предложениями в собственном смысле слова. Но математические теоремы указывают на допустимые словосочетания и, когда входящий в них термин начинает использоваться за пределами математики, то определяют, какие фразы с этим термином осмыслены, а какие нет. Геометрия не описывает кубы, существующие в реальности, и не является наукой, изучающей и описывающей идеальные кубы. Она определяет смысл олова "куб". В самом деле, если нам скажут;"У этого куба тринадцать ребер",- то мы, не рассматривая куб, можем сказать; "Этого не может быть. Либо у него двенадцать ребер, либо это вовсе не куб".

Таким образом, отношение математических теорий к реальности состоит в их применимости, А это связано с тем, как устроена реальность. Если бы предметы, которые мы пересчитываем, в процессе счета растворялись или сливались о другими, то используемая сейчас арифметика не стала бы от этого ложной, до была бы просто неудобной и неприменимой. При желании мы можем построить арифметику, в которой дважды два будет равно пяти. Она будет не ложной, а только бесполезной. Ее нельзя применять таким же образом, как и принятую сейчас арифметику. Но что значит, спрашивает Витгенштейн, "таким же образом"? Как это определить?

г) Витгенштейн об иррациональных числах: подход к проблеме беоконечности

"Причина того, почему философы обивают математику с правильного пути, - заметил как-то Витгенштейн, - состоит в том, что в логике, в отличие от естественных наук, нельзя заниматься обоснованием общих утверждений частными случаями. Здесь каждый отдельный случай имеет свое значение, но вое исчерпывается о этим конкретным случаем и отсюда нельзя извлечь никакого общего вывода (то есть просто никакого вывода)" (29, с.369), Для грамматики, часто повторяет Витгенштейн, нет несущественных различий.(Слово "грамматика" тем самым понимается им очень широко. Даже математика превращается в грамматику некоторых эмпирических предложений).

Данные высказывания, как нам кажется, служат ключом к пониманию многочисленных рассуждений Витгенштейна о различиях между натуральными, рациональными и иррациональными числами. Он особенно часто останавливался на принципиальных различиях между периодическими и непериодическими бесконечными дробями. Зачем? Или он пытается выступать против тенденций развития самой математики, стремящейся к единой трактовке всех чисел? Нет, подобная цель ему чужда. Однако он полагает, что это направление может привести к некоторым затруднениям, если будет сопровождаться укоренением неявного убеждения, что рациональные и иррациональные числа имеют одну и ту же "природу" и что, например, утверждения о равенстве действительных чисел имеют один и тот же смысл.

Затруднения связаны о оборотом "и так далее до бесконечности" и его грамматикой. Когда мы продолжаем "до бесконечности" периодическую дробь, то, едва определив период, мы можем делать предсказания относительно этого бесконечного продолжения. Например, мы можем оказать, что в десятичном разложении 1/3 нигде не встретится двойка. Как это возможно? Откуда подобное знание того, что происходит в бесконечности? Ответ нашелся бы без труда, но нам мешает убеждение, что продолжение в бесконечность иррационального числа -это принципиально то же самое. Отсюда происходит серьезная путаница. Когда мы говорим о продолжении процесса "до бесконечности" и при этом предсказываем, что будет в бесконечности, то начинаем представлять себе дело так, как будто где-то этот процесс уже завершился, и божественный разум может обозреть его целиком в любом случае, а мы - только тогда, когда имеем дело о периодическими дробями. Величайшее заблуждение состоит в том, что еще не осуществленное разложение (например, числа П до 183922371 - го знака) рассматривается как уже существующее. Такта образом, игнорирование специфики различных использований слов "и так далее до бесконечности" способно породить иллюзию, что невычисленные члены последовательности уже имеются и подразумеваются, хотя и не перечисляются.

Вообще, замечает Витгенштейн, некоторые способы выражений в определенные периоды становятся вредными» но потом их использование нормализуется. Так, выражение "мнимые чис-ла" в XVIII в. могло сбить с толку, а теперь никто не обращает на него внимания. Но в настоящее время к ошибочным представлениям может вести выражение "бесконечное продолжение", хотя эта ошибочность и не отражается на самих математических вычислениях. Мы начинаем относиться к бесконечному как к чему-то очень большому. "Но бесконечность вообще не связана о размером" (31, с.189). "Представление о бесконечности как о чем-то огромном производят очень сильное впечатление на некоторых людей, и их интерес связан именно с такой ассоциацией... Все это никак не отражается на вычислениях... Без такой ассоциация с чем-то огромным никто бы я внимания не стал обращать на бесконечность" (31, с. 194). Слово "бесконечность", говорит Витгенштейн, имеет разные использования, которые не надо путать или отождествлять. Например, оказать, что в бесконечном разложении 1/7 нет шестерки - значит сказать, что ее нет в периоде - <u>и это все</u>. Иррациональные числа же являются <u>процессами</u>. Мы не можем оказать, какая цифра стоит на 183922371-м месте в десятичном разложении П не потому, что наш разум слабее божественного, а потому, что этого разложения просто еще пока (предположим) нет, оно не осуществлено, В этой связи Витгенштейн обсуждает определение иррациональных чисел дедекиндовыми сечениями и указывает, что подобное определение навевает образ иррационального числа как уже готового, законченного. Иррациональные числа все тут» как точки на прямой. Мы рассекаем эту прямую (как будто кекс, замечает Витгенштейн), и смотрим что получилось в разрезе.

В том же ключе Витгенштейн анализирует общие арифметические предложения типа "Для всякого x, Ax". Он подчеркивает, что грамматика подобных предложений различна, в зависимости от того, пробегает ли x по конечным или бесконечным областям. Существует тенденция понимать общие предложения в обоих случаях аналогичным образом, но это приводит к ошибочным представлениям. Ошибочность выявляется, когда мы обращаем внимание на употребление предложения, и прежде всего на то, что является критерием его истинности. "Прежде чем говорить обо "всех этих объектах" или "совокупности этих объектов", я обязан хорошенько поразмыслить над тем, каким условиям должно удовлетворять в этом случае употребление слов "все" и "совокупность" (29, с.457).

Бытует ложное представление, что процедура верификации бесконечных общих предложений в принципе аналогична верификации конечных и состоит в последовательной проверке единичных предложений A(1), A(2), A(3), ».. и т.д. "до бесконечности" (не собственные ли представления, выдвигавшиеся им в предшествующий период его философской эволюции, критикует здесь Витгенштейн?). Идея тут состоит в том, что проверка бесконечных предложений отличается от проверки конечных только невозможностью практически осуществить бесконечный перебор. При этом "то, что называется "логической невозможностью", смешивается о физической невозможностью" (29, с.452). То есть здесь опять присутствует представление, что бесконечное - это что-то чрезвычайно большое и что трудность, связанная о проверкой бесконечного числа единичных предложений, в принципе не отличается от затруднения при проверке чрезвычайно большого, но ограниченного числа высказываний, и упирается в нехватку времени, бумаги и проч.

Рассуждение Витгенштейна не следует понимать так, что он предлагает что-то изменять в математических теориях, ограничивать действие закона исключенного третьего я т.п. Он хочет привлечь внимание к тому, что лежит у всех перед глазами - использованию оборота "и так далее до бесконечности", и предлагает задуматься над тем, насколько разным бывает это использование. Бессмысленно вырабатывать какое-то общее представление о бесконечности, игнорирующее специфику различных употреблений.

д) Витгенштейн о противоречиях и противоречивых системах

Вопрос о противоречиях в логических и математических системах тоже, по-видимому, требует "терапевтического" вмешательства философии, ибо он может вносить большое смятение в умы математиков. Приведенное выше признание Вейля показывает, что Витгенштейн не заблуждался относительно своевременности подобного успокаивающего воздействия философии.

К противоречию, говорит он, "относятся как к какой-то тайной болезни» непрерывно подтачивавшей здоровье, хотя (или, скорее, именно в силу того, что) она не видна" (29, с.303). Таким образом, главная причина озабоченности по поводу противоречий состоит в страхе, что противоречие, как некий червь, сидя в системе, непрерывно грызет ее изнутри и сводит на нет результаты всей работы с этой системой, даже когда противоречие еще не выявлено и никто не подозревает о нем.

Поэтому Витгенштейн утверждает, что скрытого противоречия не существует. На первый взгляд, это утверждение парадоксально, но только на первый взгляд. Противоречие, еще не выведенное в системе, не существует в "царстве идей" и не ведет оттуда свою разрушительную работу. Пока его не вывели, его нет (подобно тому, как нет такого десятичного разложения иррационального числа, которого никто еще не построил), Такое противоречие не может, естественно, повлиять на результаты нашей работы о данной системой.

Возьмем простой пример. Пусть дала система из двух правил; I) В первую очередь здоровайтесь со старшими и 2) В первую очередь здоровайтесь о дамами. Для определенной группы случаев данная система дает противоречивые результаты. Но пока мы не столкнулись с подобным случаем» мы вполне можем ориентироваться на данную систему правил. Когда же противоречие выявится - систему можно будет усовершенствовать, уточнив и ограничив правила. "Когда противоречия по-являются, тогда и наступает время элиминировать их" (30, с.210). В этой связи Витгенштейн выступает против убеждения, что из противоречия следует все, что угодно. Рассуждения Витгенштейна вызвали отповедь со стороны Чихары (8). Последний обвиняет Витгенштейна в логических ошибках и утверждает, что если в системе в принципе выводимо противоречие, то, даже при элиминации обнаруженной противоречивой формулы, в системе все равно будет выводиться вое, что угодно. Однако, как нам кажется, возражения Чихары бьют мимо цели. То, что противоречия могут элиминироваться некоторыми перестройками системы без того, чтобы затрагивалась основная масса полученных в ней результатов, неоднократно подтверждалось в истории науки. Следует отметить также, что в современной логике идут интенсивные разработки логических систем, в которых противоречия могут локализоваться и из них не следует всего, что угодно (так называемые "паранепротиворечивые логики").

Э.Тьюринг, посещавший лекции Витгенштейна (30), вступил о ним в полемику, отраженную в издании данных лекций. Тьюринг заявил, что опасность противоречий выявляется, когда мы начинаем применять противоречивую систему. Если наша логика и математика противоречивы, то могут, например, обрушиваться мосты, сделанные по расчетам. Витгенштейн отвечал, что если мосты обрушатся, то это будет объясняться тем, что мы опирались на неправильные физические законы. Подобный ответ вызывает возмущение Чихары. Тут, как он считает, воя слабость рассуждений Витгенштейна видна как на ладони. Но подобное заключение может объясняться только недопониманием мысли Витгенштейна, который рассуждает здесь вполне как философ здравого смысла» прекрасно понимающий, что проблемы противоречий, над которыми бьются в логике и основаниях математики, чрезвычайно далеки от практических применений математики и от проблем устойчивости мостов. Отвечая Тьюрингу, Витгенштейн предлагает подумать над тем, что противоречия и парадоксы, подобные парадоксу Рассела, не повлияли на устойчивость мостов ни до, ни после их обнаружения (30, с.218).

Витгенштейн различает вопрос о противоречиях в описаниях, приказах, заданиях и проч. вне логики и математики, и внутри них. Мы стараемся избегать противоречий во внелогической сфере, потому что не знаем, как вести себя в случае противоречивых описаний, как реагировать на противоречивые приказы и т.п, Сталкиваясь с противоречиями» мы, действительно, испытываем затруднения. Но это, подчеркивает Витгенштейн, объясняется вовсе не злокозненной природой противоречия самого по себе, а тем, что правила нашего линг-вистяческого поведения (то, что позднее он назовет правилами "языковых игр") не предусматривают никакой определенной реакции на противоречивые сообщения.

Но почему у нас не может быть других правил, задает вопрос Витгенштейн. Почему считается невозможной другая логика? Возражение Тьюринга, что противоречивую систему нельзя применять, Витгенштейн опровергает, пытаясь показать как можно сделать противоречие безвредным, Пусть в нашей системе формулируется, окажем» парадокс лжеца. Считается, что отсюда можно вывести вое, что угодно; что можно, например, сделать такое заключение: "Я лгу, следовательно, я не лгу, следовательно, я лгу, следовательно, 2x2=369" (30, с.218). В этом случае мы как будто имеем два способа умножения; обычный» приводящий к привычным результатам, и новый, о котором не подозревали раньше, - выведение произвольного результата из противоречия. Но в этом случае, говорит Витгенштейн, надо просто договориться о том» чтобы не выводить из противоречия результатов умножения или же не называть эту операцию умножением. В других случаях могут понадобиться более сложные приемы для того, чтобы не могли использовать противоречивые системы. С рассуждениями Витгенштейна согласуется предположение, что в каких-то случаях никаких особых приспособлений и оговорок вообще не понадобится, и противоречивые системы будут более удобны для применения, чем непротиворечивые.

"Если, - говорит Витгенштейн, - мы занимаемся физикой или зоологией и описываем какое-то животное, то мы не хотим, чтобы это описание было противоречивым. Если мы считаем математику и логику чем-то вроде физики ... - то мы думаем; "В логике не должно быть противоречий" ... "Логика и математика не дают нам никаких истин, если они противоречивы". Но Рассел фактически превратил предложения логики и математики в тавтологии, что ничуть не лучше. И точно так же их можно сделать противоречиями, ибо мы видим, что логика может содержать противоречия. Логика без противоречий - это просто особенность нашего использования наших выражений. Кто-то оказал бы, что если в исчислении есть противоречия, то оно неприменимо. Но это зависит от того, какого применения вы хотите" (30, с.214),

Мы видим по этому отрывку, что в основе рассуждений Витгенштейна лежит его убеждение в том, что логика и математика не являются описаниями какой-то независимой от нас реальности, что их предложения не истинны и не ложны. Поэтому, считает он, возможны самые различные логики и математики.