

Динамическая задача оптимального распределения объемов работ по периодам проекта

© 2011 О.В. Павлов

Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)
E-mail: pavlov@ssau.ru

В статье рассматривается динамическая задача оптимального распределения объемов работ по периодам проекта. Проблема формулируется как задача оптимального управления дискретной системой. С использованием дискретного принципа максимума Понтрягина находится оптимальное решение в аналитическом виде. Приводится исследование влияния параметров обучения на оптимальное распределение объема работ по периодам проекта.

Ключевые слова: проект, обучение, оптимальное распределение работ, дискретный принцип максимума Понтрягина, аналитическое решение, параметры обучения.

Введение

Во время выполнения проекта, при многократном повторении производственных операций происходит процесс обучения исполнителей проекта (агентов). При этом квалификация исполнителей, а следовательно и их производительность труда, растет. Затраты агентов при выполнении проекта из-за роста квалификации уменьшаются во времени. Возникает динамическая задача поиска оптимального распределения объемов работ по периодам, при фиксированном времени и фиксированном суммарном объеме работ с целью минимизации затрат агента.

1. Постановка и решение динамической задачи оптимального распределения работ по периодам

Траектория объемов работ исполнителя описывается дискретным уравнением:

$$x_t = x_{t-1} + u_t, \quad t = 1, n,$$

где x_t - суммарный объем работ за t периодов;
 u_t - объем работ в период t ;
 n - число периодов проекта.

В начальный период суммарный объем работ равен 0:

$$x_0 = 0.$$

Проект будет успешно реализован, если за n периодов будет выполнен суммарный объем работ R :

$$x_n = R.$$

Объем работ в период t ограничен максимально возможной величиной, которую может выполнить агент:

$$0 \leq u_t \leq Q^{\max}, \quad t = 1, n.$$

В качестве критерия оптимального распределения работ по периодам используется мини-

мизация суммарных затрат при выполнении проекта:

$$J = \sum_{t=1}^n \beta \frac{u_t^2}{r_t} \rightarrow \min,$$

где r_t - квалификация исполнителя в период t ;

β - размерный коэффициент, переводящий трудоемкость работ в денежное выражение.

Во время выполнения проекта происходит процесс обучения исполнителей. Квалификация исполнителя r_t в процессе обучения растет от начального уровня r_0 до конечного r_n . Для описания обучения в процессе выполнения проекта используются экспоненциальные кривые научения, имеющие замедленно-асимптотический характер. В литературе¹ описаны несколько видов кривых научения, все они зависят от трех параметров:

$$r_t = f(r_0, r_n, \gamma),$$

где γ - скорость научения исполнителя.

Модель принятия решений центром запишется в виде

$$\begin{cases} J = \sum_{t=1}^n \beta \frac{u_t^2}{r_t} \rightarrow \min, & (1) \\ 0 \leq u_t \leq x^{\max}, \quad t = 1, n, & (2) \\ x_t = x_{t-1} + u_t, \quad t = 1, n, & (3) \\ x_0 = 0, & (4) \\ x_n = R. & (5) \end{cases}$$

Управляющей функцией в модели (1-5) являются объемы работ u_t в периоды t , $t = 1, n$,

на которые наложено ограничение (2). Сформулированная задача (1-5) является задачей оптимального управления дискретной системой. Задача состоит в нахождении такого управления u_t , подчиненного ограничению (2), которое переводит дискретную систему (3) из начального состояния (4) в конечное (5), минимизируя критерий оптимальности (1).

Решим задачу оптимального управления (1)-(5) с помощью дискретного принципа максимума Понтрягина². Для этого запишем гамильтониан

$$H_t = \Psi_t [x_{t-1} + u_t] - \beta \frac{u_t^2}{r_t}, \quad (6)$$

где Ψ_t - сопряженная переменная.

Оптимальное управление должно доставлять максимум гамильтониану. Максимизируем гамильтониан по управлению u :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \Psi_t - 2\beta \frac{u_t}{r_t} = 0.$$

Решая полученное уравнение, определим оптимальное управление

$$u_t^{opt} = \frac{\Psi_t r_t}{2\beta}. \quad (7)$$

Запишем уравнение для сопряженной переменной:

$$\Psi_{t-1} = \frac{\partial H}{\partial x} = \Psi_t. \quad (8)$$

Из уравнения (8) следует, что сопряженная переменная постоянна:

$$\Psi_{t-1} = \Psi_t = C = const.$$

Таким образом, выражение (7) примет вид

$$u_t^{opt} = \frac{C r_t}{2\beta}. \quad (9)$$

Запишем траекторию суммарного объема работ по уравнению (3) в периоды $t = 1, 2, \dots, n$:

$$x_1 = u_1 = \frac{C r_1}{2\beta},$$

$$x_2 = x_1 + u_2 = \frac{C}{2\beta} (r_1 + r_2),$$

$$x_3 = x_2 + u_3 = \frac{C}{2\beta} (r_1 + r_2 + r_3).$$

Конечное значение суммарного объема работ за n периодов запишется:

$$x_n = \frac{C}{2\beta} (r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n) = \frac{C}{2\beta} \sum_{t=1}^n r_t.$$

С учетом конечного условия (5) получим

$$x_n = \frac{C}{2\beta} \sum_{t=1}^n r_t = R. \quad (10)$$

Из уравнения (10) найдем выражение для константы C :

$$C = \frac{2\beta}{\sum_{t=1}^n r_t} R. \quad (11)$$

Подставим (11) в выражение (9), получим окончательную формулу для оптимального управления:

$$u_t^{opt} = \frac{r_t}{\sum_{t=1}^n r_t} R, \quad t = 1, n. \quad (12)$$

Таким образом, оптимальный объем работ для агента в периоде определяется отношением квалификации агента в этом периоде к сумме квалификаций агента за все периоды проекта.

Оптимальная траектория объемов работ запишется:

$$x_t^{opt} = x_{t-1}^{opt} + \frac{r_t}{\sum_{t=1}^n r_t} R, \quad t = 1, n. \quad (13)$$

Минимальные суммарные затраты определяются выражением

$$J^{\min} = \beta \frac{R^2}{\sum_{t=1}^n r_t}.$$

2. Исследование влияния параметров обучения на оптимальное распределение работ по периодам

Для исследования влияния параметров обучения на оптимальное распределение работ по периодам используется кривая научения следующего вида³:

$$r_t = r_n - (r_0 - r_n) e^{-\gamma t}, \quad t = 1, n.$$

Для перехода к дискретной модели сделаем замену:

$$e^{-\gamma t} = \frac{1}{(1 + \gamma)^t}.$$

Дискретная модель кривой научения примет следующий вид:

$$r_t = r_n - (r_0 - r_n) \frac{1}{(1 + \gamma)^t}, \quad t = 1, n. \quad (14)$$

На первом этапе проводилось исследование влияния начальной квалификации исполнителя на оптимальное распределение работ по периодам. Моделирование проводилось для следующих данных: количество периодов $n = 24$ мес., суммарный объем работ $R = 100\,000$ шт., скорость обучения $\gamma = 0,2$, конечное значение квалификации исполнителя $r_n = 0,98$. Расчеты проводились для трех исполните-

лей с разным уровнем начальной квалификации $r_0 = 0,1; 0,4; 0,7$. Расчет траекторий квалификаций исполнителей проводился по формуле (14), оптимальных управлений - по формуле (12), оптимальных траекторий объемов работ - по формуле (13). Результаты расчетов представлены на рис. 1-3.

Из анализа рисунков сделаны следующие выводы:

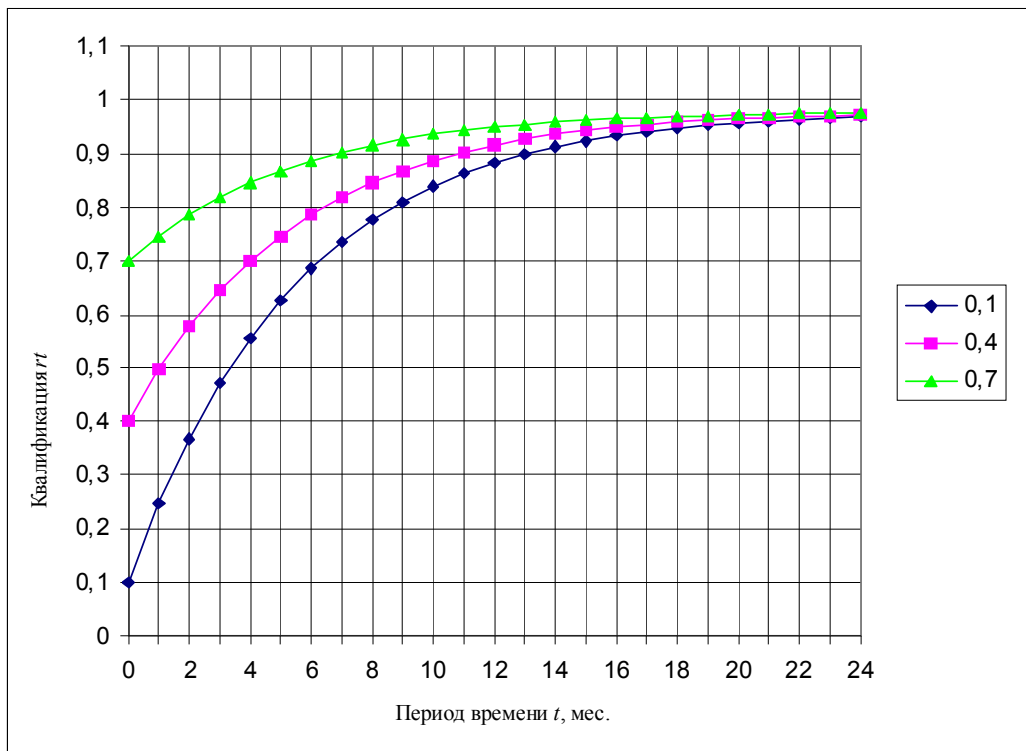


Рис. 1. Влияние начальной квалификации на траектории квалификации исполнителей

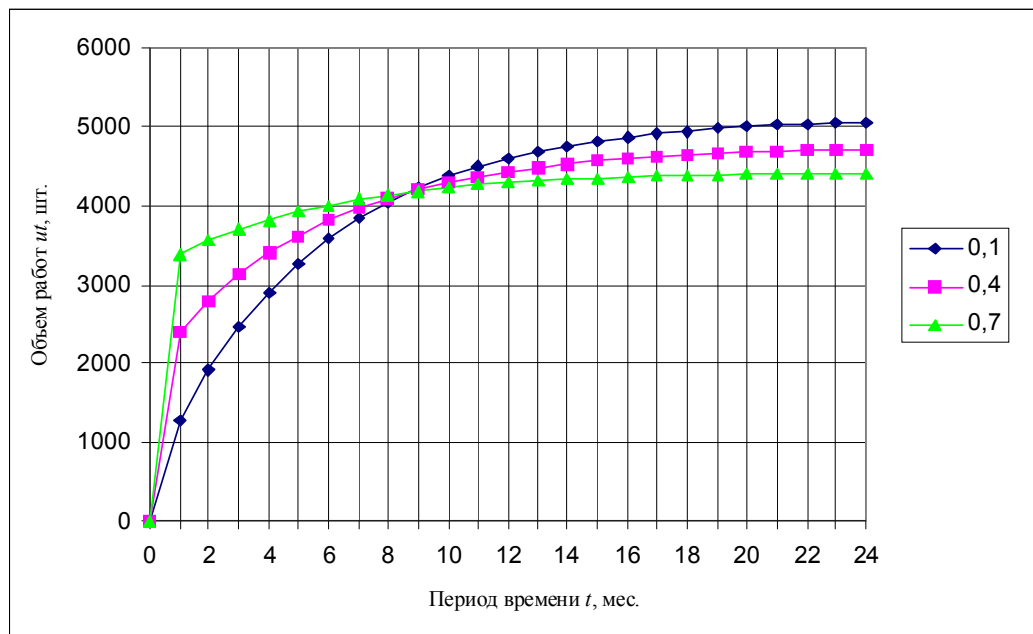


Рис. 2. Влияние начальной квалификации на оптимальное распределение работ для исполнителей

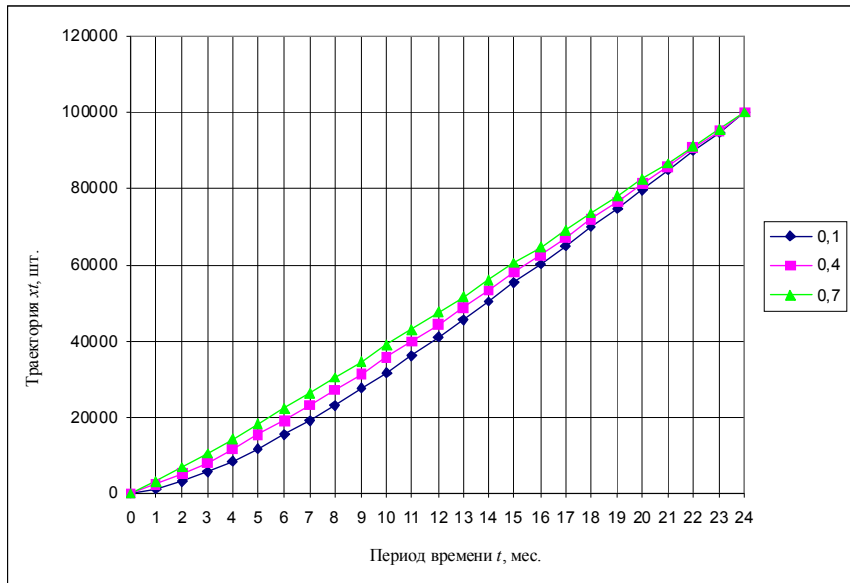


Рис. 3. Влияние начальной квалификации на оптимальные траектории суммарных объемов работ исполнителей

1. Оптимальное распределение работ по периодам зависит от начальной квалификации исполнителя. Чем больше квалификация, тем больший объем работ приходится на начальные периоды проекта. Для исполнителя с низкой квалификацией оптимальной стратегией являются небольшие объемы работ в первые периоды, а затем, с ростом квалификации, увеличение объема работ в последние периоды проекта.

2. Чем меньше начальная квалификация агента, тем больше прирост объемов работ по периодам. Максимальный прирост объемов работ происходит в начальные периоды времени.

На втором этапе проводилось исследование влияния скорости обучения исполнителя на оптимальное распределение работ по периодам. Моделирование проводилось для исходных данных: количество периодов $n = 24$ мес., суммарный объем работ $R = 100\,000$ шт., начальная квалификация исполнителя $r_0 = 0,1$, конечная квалификация исполнителя $r_n = 0,98$. Расчеты проводились для трех исполнителей с разной скоростью обучения $\gamma = 0,1; 0,3; 0,5$. Результаты расчетов представлены на рис. 4-6.

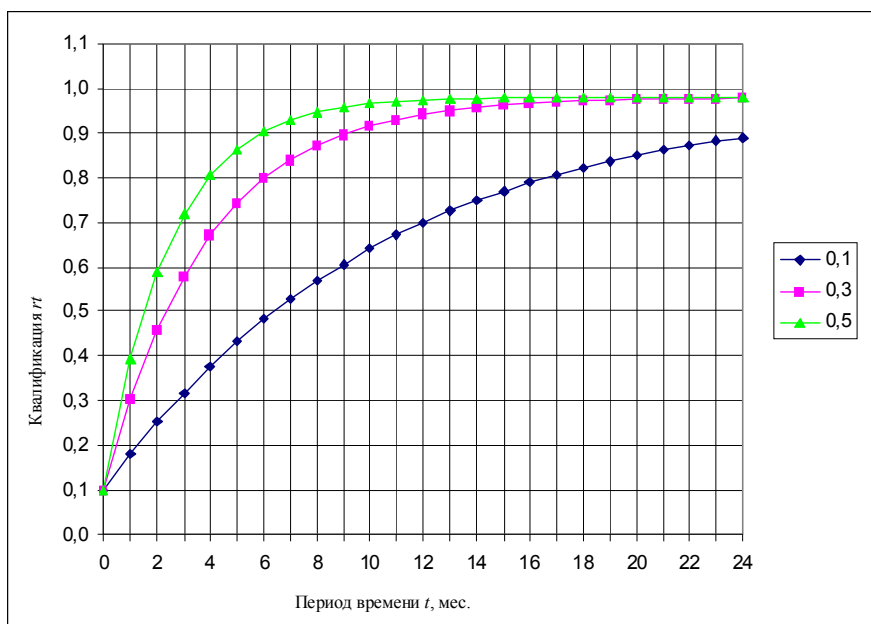


Рис. 4. Влияние скорости обучения на траектории квалификации исполнителей

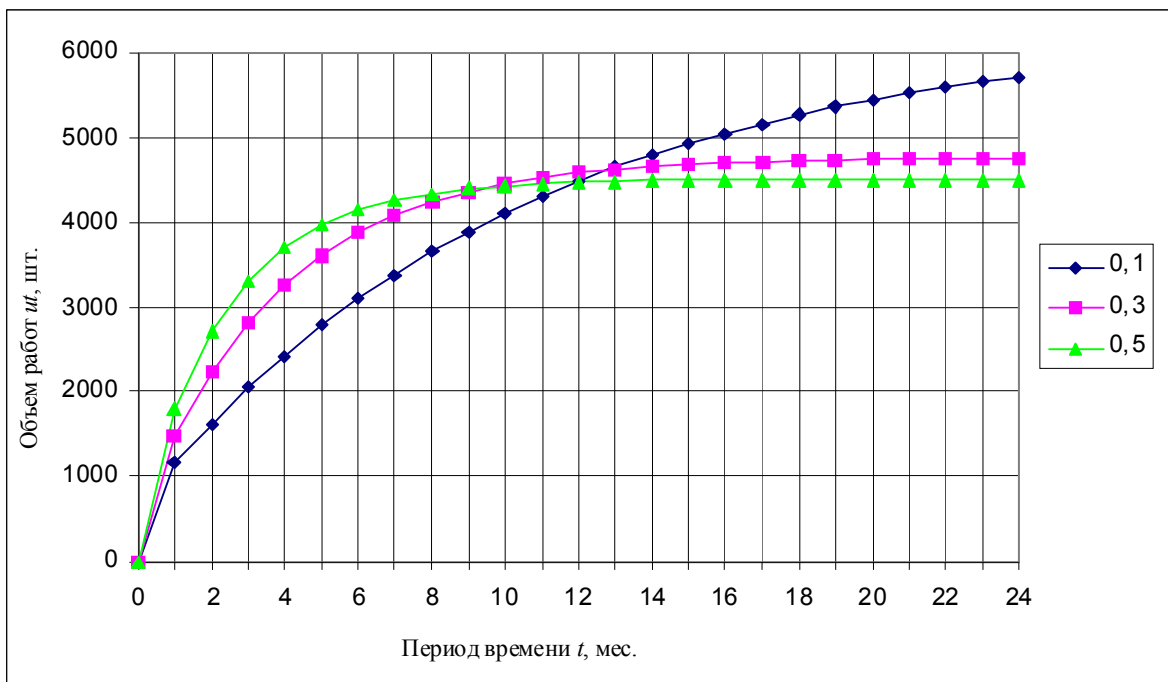


Рис. 5. Влияние скорости обучения на оптимальное распределение работ для исполнителей

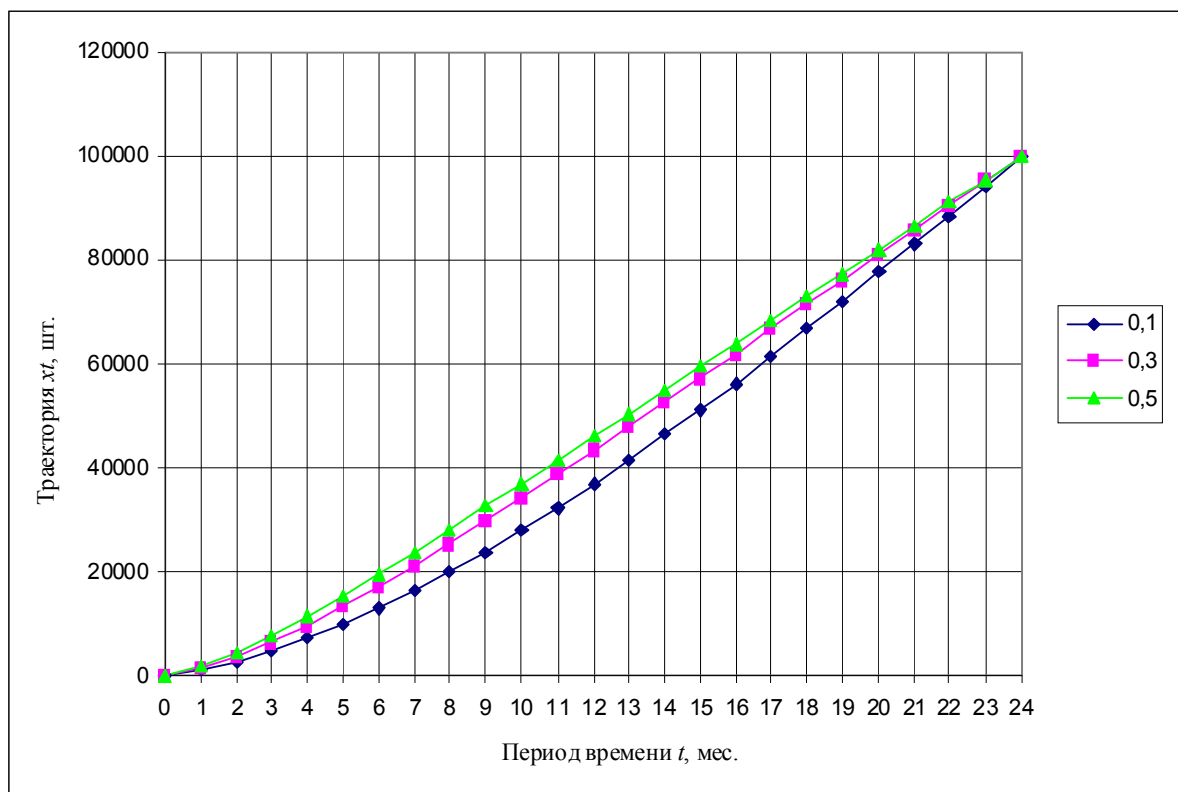


Рис. 6. Влияние скорости обучения на оптимальные траектории суммарных объемов работ исполнителей

Из анализа рисунков сделан вывод: оптимальное распределение работ по периодам зависит от скорости обучения исполнителя. Чем меньше скорость обучения, тем больший объем работ приходится на конечные периоды проекта. Для исполнителя с маленькой скоростью обучения оптимальной стратегией являются небольшие объемы работ в первые периоды, а затем, с ростом квалификации, увеличение объемов работ в последних периодах проекта.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе представлена математическая модель принятия оптимального решения по распределению объемов работ по периодам. Задача оптимального распределения объемов работ по периодам формулируется как задача оптимального управления дискретной системой.

С использованием дискретного принципа максимума Понтрягина найдено оптимальное управление объемом работ в аналитическом виде. Показано, что оптимальный объем работ для агента в периоде определяется отношением квалификации агента в этом периоде к сумме квалификаций агента за все периоды проекта.

Приводится исследование влияния параметров обучения на оптимальное распределение объе-

ма работ по периодам проекта. В результате исследования сделаны следующие выводы:

1. Оптимальное распределение работ по периодам зависит от начальной квалификации исполнителя. Чем больше квалификация, тем больший объем работ приходится на начальные периоды проекта. Для исполнителя с низкой квалификацией оптимальной стратегией являются небольшие объемы работ в первые периоды, а затем, с ростом квалификации, увеличение объема работ в последних периодах проекта.

2. Оптимальное распределение работ по периодам зависит от скорости обучения исполнителя. Чем меньше скорость обучения, тем больший объем работ приходится на конечные периоды проекта. Для исполнителя с маленькой скоростью обучения оптимальной стратегией являются небольшие объемы работ в первые периоды, а затем, с ростом квалификации, увеличение объемов работ в последних периодах проекта.

¹ См.: Новиков Д.А. Закономерности итеративного обучения. М., 1998; Новиков Д.А. Модели обучения в процессе работы // Управление большими системами. 1997. Вып. 19. С. 5-22.

² Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М., 1973.

³ Новиков Д.А. Закономерности итеративного обучения.

Поступила в редакцию 07.03.2011 г.