МНОГОМЕРНАЯ ABC-КЛАССИФИКАЦИЯ. КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА И КАНОНИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ

В.В. Белов,
доктор технических наук, профессор кафедры вычислительной и прикладной математики Рязанского государственного радиотехнического университета

Ю.Л. Коричнева,
аспирант кафедры вычислительной и прикладной математики Рязанского государственного радиотехнического университета

Адрес: г. Рязань, ул. Гагарина, д. 59/1
E-mail: compvv@mail.ryazan.ru; koritchneva@mail.ru

Предложены канонические алгоритмы многомерной ABC-классификации, предназначенные для решения задачи сокращения информационного пространства управления товарно-материальными ресурсами хозяйствующих субъектов.

Ключевые слова: ABC-классификация, скалярная классификация, многомерная классификация, критерии качества, канонические алгоритмы.

Введение

В настоящее время для большинства отечественных предприятий производственного сектора одной из ключевых задач развития является управление оборотным капиталом. Материальной составляющей оборотного капитала являются ресурсы и запасы. В качестве методов повышения эффективности процесса управления материальными запасами и снижения объемов финансовых вливаний на контроллинг их состояния в логистической практике используются методы структуризации материальных ресурсов, иными словами, классификация. Цель классификации – повысить эффективность логистической системы *за счет более целесообразного и обоснованного распределения усилий* по различным направлениям управления товарно-материальными ресурсами. Бауэрсокс [1] называет данный подход классификацией по приоритетности, но в научной литературе он обычно определяется как *ABC*-классификация [1, 2, 3].

Классический *ABC*-метод основан на разбиении всей номенклатуры используемых материалов на три неравноценных группы *A*, *B*, и *C*– в зависимости от значения определяющего показателя (параметра, критерия). Для классификации применимы различные параметры, но чаще всего используется стоимость запасов, наряду с ней применяются: норма потребления, стоимость и сроки транспортировки. *ABC*-классификация используется и для исследования частоты определенных экономических явлений и фактов. В этом случае она называется *XYZ*-классификацией. Синонимами термина «*ABC*-классификация» являются: «первоначальный анализ», «правило 80/20» и «принцип Парето» [2, 3, 4, 5]. Это правило практическое, выведенное на основе большого множества наблюдений. Согласно этому правилу 80% выручки компании обеспечивают 20% наименований продукции, и 80% затрат приходится на 20% товарно-материальных запасов. Эта классификация показывает ранг отдельных элементов номенклатуры и позволяет выделить основные пункты, особенно важные для целенаправленных мероприятий управления. *ABC*-классификация может использоваться практически в любой области, где есть сложно классифицируемый достаточно большой набор объектов [5] и требуется их разделение с целью квалификации или дифференцированного управления. Несмотря на известные преимущества, метод таит в себе массу концептуальных недостатков. Ключевым из них использование единственного критерия в процедуре классификации. Современный менеджмент не может опираться на видение бизнес-процесса с одной стороны – однокритериальное. Для преодоления указанного недостатка было предложено использовать интегральные критерии [2], представляющие собой ту или иную свертку частных критериев. Однако практическое применение интегральных критериев показало, что результаты многомерной (через свёрку) *ABC*-классификации весьма часто оказываются трудно интерпретируемыми, – плохо согласуемыми с интуитивными представлениями аналитиков. Возникла потребность в разработке альтернативных методов многомерной *ABC*-классификации и явно обозначилась актуальность задачи создания критерия качества различных многомерных *ABC*-классификаций.

Целью настоящей статьи является изложение предлагаемых авторами критериев качества и методов многомерной (пространственной) *ABC*-классификаций учётных данных, альтернативных методу интегрального критерия.

Неформальная постановка задачи

Пусть $\mathbf{X} =< X_1, X_2, \ldots, X_m >$ – некоторый кортеж, состоящий из *m* элементов, каждый из которых характеризуется *n* количественными показателями (частными скалярными критериями). Неупорядоченную совокупность тех же элементов будем обозначать так: $\tilde{\mathbf{X}} = Set(\mathbf{X}) = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$. Элементы кортежа $\mathbf{X}$ (множества $\tilde{\mathbf{X}}$) будем называть учетными элементами.

Необходимо осуществить разделение элементов множества $\tilde{\mathbf{X}}$ на три группы таким образом, чтобы каждая из групп была сопоставима (в смысле некоторого критерия сходства) с результатами *ABC*-классификаций тех же элементов по *всем* заданным частным скалярным критериям. Такое разделение учётных элементов назовём многомерной, или пространственной *ABC*-классификацией. Критерий сходства результата пространственной классификации с совокупностью результатов частных скалярных *ABC*-классификаций будем называть критерием качества рассматриваемой многомерной *ABC*-классификации.

1. Альтернативные представления результатов ABC-классификации

Результат скалярной *ABC*-классификации можно представить в виде кортежа $\mathbf{R} =< \mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B, \mathbf{R}_C >$, где $\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B, R_C$ – подмножества, на которое множество $\tilde{\mathbf{X}}$ разбивается в результате классификации, такие, что справедливо утверждение:

$$(\mathbf{R}_A \cap \mathbf{R}_B = \varnothing) \wedge (\mathbf{R}_A \cap \mathbf{R}_C = \varnothing) \wedge$$
$$\wedge (\mathbf{R}_B \cap \mathbf{R}_C = \varnothing) \wedge (\mathbf{R}_A \cup \mathbf{R}_B \cup \mathbf{R}_C = \tilde{\mathbf{X}}.$$

Индексы в обозначениях множеств $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{R}_B$, $\mathbf{R}_C$ символизируют тот факт, что элементы множества $\mathbf{R}_A$ образуют классификационную группу *A*, элементы множества $\mathbf{R}_B$ образуют группу *B* и элементы множества $\mathbf{R}_C$ образуют группу *C*.

Для указания того факта, что классификация осуществлена по конкретному критерию, будем использовать верхние индексы. При этом результаты скалярных *ABC*-классификаций по *n* критериям представимы в виде совокупности (системы) *n* классификационных кортежей:

$$\mathbf{R}^{[j]} =< \mathbf{R}_A^{[j]}, \mathbf{R}_B^{[j]}, \mathbf{R}_C^{[j]} >, j = 1, 2, ..., n,$$

где $\mathbf{R}_A^{[j]}, \mathbf{R}_B^{[j]}, \mathbf{R}_C^{[j]}$ – подмножества, на которое множество $\mathbf{X}$ разбивается в результате классификации по *j*-му скалярному критерию, такие что справедливо утверждение:

$$\forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\, [(\mathbf{R}_A^{[j]} \cap \mathbf{R}_B^{[j]} = \varnothing) \wedge (\mathbf{R}_A^{[j]} \cap \mathbf{R}_C^{[j]} = \varnothing) \wedge$$
$$\wedge (\mathbf{R}_B^{[j]} \cap \mathbf{R}_C^{[j]} = \varnothing) \wedge (\mathbf{R}_A^{[j]} \cup \mathbf{R}_B^{[j]} \cup \mathbf{R}_C^{[j]} = \tilde{\mathbf{X}})].$$

Для указания результата пространственной *ABC*-классификации используем другую букву в обозначении классификационного кортежа:

$$\mathbf{Q} =< \mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}_B, \mathbf{Q}_C >,$$

где $\mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}_B, \mathbf{Q}_C$ – подмножества, на которое множество $\tilde{\mathbf{X}}$ разбивается в результате пространственной классификации. Эти множества обладают свойствами результатов скалярной классификации, т.е. для них также справедливо утверждение:

$$(\mathbf{Q}_A \cap \mathbf{Q}_B = \varnothing) \wedge (\mathbf{Q}_A \cap \mathbf{Q}_C = \varnothing) \wedge (\mathbf{Q}_B \cap \mathbf{Q}_C = \varnothing) \wedge$$
$$\wedge (\mathbf{Q}_A \cup \mathbf{Q}_B \cup \mathbf{Q}_C = \tilde{\mathbf{X}}.$$

Пространственная *ABC*-классификация может осуществляться различными способами. Для указания конкретики способа пространственной классификации будем использовать верхний индекс. Обозначение $\mathbf{Q}^{[l]} =< \mathbf{Q}_A^{[l]}, \mathbf{Q}_B^{[l]}, \mathbf{Q}_C^{[l]} >$ символизирует результат пространственной классификации *l*-м способом, $l = 1, 2, ..., L$; L – количество рассматриваемых методов пространственной *ABC*-классификации.

В качестве альтернативного представления *ABC*-классификации будем использовать классификационные векторы: $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ – для скалярной классификации; $\mathbf{K} = (K_1, K_2, \ldots, K_m)$ – для пространственной классификации. Конкретику скалярного критерия и способа пространственной классификации будем отражать верхними индексами:

$$\mathbf{k}^{[j]} = (k_1^{[j]}, k_2^{[j]}, \ldots, k_m^{[j]}),\ j = 1, 2, \ldots, n;$$
$$\mathbf{K}^{[l]} = (K_1^{[l]}, K_2^{[l]}, \ldots, K_m^{[l]}),\ l = 1, 2, \ldots, L.$$

Элементы указанных векторов имеют следующую семантику: $k_i^{[j]}$ – номер группы *i*-го элемента номенклатуры в скалярной *ABC*-классификации по *j*-му скалярному критерию; $K_i^{[l]}$ – номер группы *i*-го элемента номенклатуры в пространственной *ABC*-классификации *l*-м способом; $i = 1, 2, \ldots, m$; m – количество учитываемых элементов, т.е. это мощность множества $\tilde{\mathbf{X}}$: $m = |\tilde{\mathbf{X}}|$.

При использовании альтернативного представления *ABC*-классификации будем предполагать, что названия *A*, *B*, *C* групп *ABC*-классификации отображены в числа 1, 2, 3 соответственно, поэтому элементы классификационных векторов являются числами, причём: $k_i^{[j]} \in \{1, 2, 3\}$ и $K_i^{[l]} \in \{1, 2, 3\}$.

2. Критерии качества пространственной ABC-классификации для случая проблемной симметричности скалярных критериев

2.1. Критерий № 1 на основе классификационных векторов

Критерием качества пространственной *ABC*-классификации может служить сумма квадратов расстояний между классификационным вектором $\mathbf{K}^{[l]}$ и классификационными векторами частных скалярных *ABC*-классификаций по учитываемым критериям. Формула критерия имеет вид:

$$C_1^{[l]} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \left(K_i^{[l]} - k_i^{[j]}\right)^2, \quad (1)$$

где $C_1^{[l]}$ – значение критерия качества пространственной *ABC*-классификации *l*-м методом; $l = 1, 2, ..., L$.

Смысл предложенного критерия таков. Сумма

$$\sum_{i=1}^{m} \left(K_i^{[l]} - k_i^{[j]}\right)^2$$

имеет семантику квадрата расстояния между векторами

$$\mathbf{K}^{[l]} = (K_1^{[l]}, K_2^{[l]}, \ldots, K_m^{[l]})$$
$$\text{и } \mathbf{k}^{[j]} = (k_1^{[j]}, k_2^{[j]}, \ldots, k_m^{[j]}),$$

порождаемых пространственной и *j*-й скалярной *ABC*-классификациями в эвклидовой метрике. Она выражает степень сходства между указанными классификациями. Сумма

$$C_1^{[l]} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \left(K_i^{[l]} - k_i^{[j]}\right)^2$$

является суммой квадратов расстояний от классификационного вектора $K^{[l]}$ до всех классификационных векторов $\mathbf{k}^{[j]}$, $j=1, 2, ..., n$ скалярных *ABC*-классификаций. Эта сумма может квалифицироваться как квадрат расстояния между вектором и системой векторов. Она характеризует степень различия/сходства пространственной классификации с системой скалярных классификаций.

2.2. Критерий № 2 на основе классификационных кортежей

В качестве альтернативного критерия качества пространственной *ABC*-классификации можно использовать показатель степени отличия заданного классификационного кортежа $\mathbf{Q}^{[l]} =< \mathbf{Q}_A^{[l]}, \mathbf{Q}_B^{[l]}, \mathbf{Q}_C^{[l]} >$ от кортежа простых объединений элементов классификационных кортежей частных скалярных *ABC*-классификаций, который мы назовём объединённым классификационным кортежем.

Для вычисления критерия необходимо предварительно осуществить *n* скалярных *ABC*-классификаций по всем учитываемым критериям, и получить систему *n* классификационных кортежей:

$$\mathbf{R}^{[j]} =< \mathbf{R}_A^{[j]}, \mathbf{R}_B^{[j]}, \mathbf{R}_C^{[j]} >, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

Далее следует выполнить объединение элементов-множеств по правилу:

$$\mathbf{U}_A = \bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{R}_A^{[j]}; \; \mathbf{U}_B = \bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{R}_B^{[j]} \setminus \mathbf{U}_A; \; \mathbf{U}_C = \bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{R}_C^{[j]} \setminus \mathbf{U}_A \setminus \mathbf{U}_B$$

и сформировать объединённый классификационный кортеж $\mathbf{U} =< \mathbf{U}_A, \mathbf{U}_B, \mathbf{U}_C >$.

Указанное правило реализует следующий принцип: если учётный элемент помещён в группу *A* хотя бы одной частной скалярной классификацией, то этот элемент помещается в группу *A* объединённого классификационного кортежа **U**; если учётный элемент помещён в группу *B* хотя бы одной частной скалярной классификацией, то этот элемент помещается в группу *B* объединённого классификационного кортежа **U**, но только в случае, если этот элемент не был помещён в группу *A* хотя бы одной скалярной классификацией; если учётный элемент помещён в группу *C* хотя бы одной частной скалярной классификацией, то этот элемент помещается в группу *C* объединённого классификационного кортежа **U**, но только в случае, если этот элемент не был помещён в группу *A* или группу *B* хотя бы одной скалярной классификацией.

В качестве показателя степени различия двух кортежей, элементами которых являются множества, можно использовать сумму максимальных мощностей разностей однопозиционных множеств. Для кортежей $\mathbf{Q}^{[l]} =< \mathbf{Q}_A^{[l]}, \mathbf{Q}_B^{[l]}, \mathbf{Q}_C^{[l]} >$ и $\mathbf{U} =< \mathbf{U}_A, \mathbf{U}_B, \mathbf{U}_C >$ этот показатель объявляем критерием № 2. Формула его вычисления имеет вид:

$$C_2^{[l]} = max\left(\left|\mathbf{Q}_A^{[l]} \setminus \mathbf{U}_A\right|, \left|\mathbf{U}_A \setminus \mathbf{Q}_A^{[l]}\right|\right) + max\left(\left|\mathbf{Q}_B^{[l]} \setminus \mathbf{U}_B\right|, \left|\mathbf{U}_B \setminus \mathbf{Q}_A^{[l]}\right|\right) + + max\left(\left|\mathbf{Q}_C^{[l]} \setminus \mathbf{U}_C\right|, \left|\mathbf{U}_C \setminus \mathbf{Q}_C^{[l]}\right|\right). \quad (2)$$

Заметим следующее:

1) элементы **U** обладают свойствами обычного классификационного кортежа, представляющего результат *ABC*-классификации:

$$(\mathbf{U}_A \cap \mathbf{U}_B = \varnothing) \wedge (\mathbf{U}_A \cap \mathbf{U}_C = \varnothing) \wedge (\mathbf{U}_B \cap \mathbf{U}_C = \varnothing) \wedge$$
$$(\mathbf{U}_A \cup \mathbf{U}_B \cup \mathbf{U}_C = \tilde{\mathbf{X}};$$

2) формула для вычисления элементов множества

$$\mathbf{U}_C = \bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{R}_C^{[j]} \setminus \mathbf{U}_A \setminus \mathbf{U}_B$$

имеет концептуальный характер, при этом она полностью эквивалентна структурно более простой формуле

$$\mathbf{U}_C = \tilde{\mathbf{X}} \setminus \mathbf{U}_A \setminus \mathbf{U}_B.$$

Последняя формула является следствием очевидного равенства

$$\bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{R}_C^{[j]} \cup \mathbf{U}_A \cup \mathbf{U}_B = \tilde{\mathbf{X}}$$

и общего свойства множеств:

$$(\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}) \to (\mathbf{M}_1 \setminus \mathbf{M}_2 = \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_2),$$

где $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ – произвольные множества.

3. Критерии качества пространственной ABC-классификации для случая проблемной асимметричности скалярных критериев

3.1. Формальное представление проблемной асимметричности скалярных критериев

Учитываемые критерии назовём проблемно асимметричными, если они не являются равноценными по степени влияния на результативность актуального (обычно производственно-хозяйственного) процесса. Асимметричность критериев формально выразим вектором весовых коэффициентов $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, элементы которого таковы, что справедливо утверждение:

$$(\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \; 0 < w_j < 1) \wedge (\sum_{j=1}^{n} w_j = 1).$$

Указанные весовые коэффициенты могут быть получены с помощью матрицы парных сравнений по схеме, используемой в методе анализа иерархий Саати [6].

Альтернативное представление проблемной асимметричности критериев может состоять в следующем. Учитываемые критерии распределяются по трём категориям посредством скалярной *ABC*-классификации, в которой в качестве классифицирующего критерия используется вектор весовых коэффициентов $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Результат этой классификации представим кортежем $\mathbf{J} =< \mathbf{J}_A, \mathbf{J}_B, \mathbf{J}_C >$, элементами которого являются множества номеров критериев. Критерии в зависимости от попадания в ту или иную классификационную группу называются соответственно *A*–, *B*– и *C*–критериями.

3.2. Критерий № 3 на основе классификационных векторов

Критерием качества пространственной *ABC*-классификации в случае проблемной асимметричности учитываемых критериев может служить взвешенная сумма квадратов расстояний между классификационным вектором $\mathbf{K}^{[l]}$ и классификационными векторами частных скалярных *ABC*-классификаций по учитываемым критериям. Формула критерия имеет вид:

$$C_3^{[l]} = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(K_i^{[l]} - k_i^{[j]} \right)^2 . \qquad (3)$$

Заметим, что критерий $C_3^{[l]}$ концептуально аналогичен критерию $C_1^{[l]}$, отличие состоит только в использовании весовых коэффициентов при вычислении суммы квадратов расстояний от вектора $\mathbf{K}^{[l]}$ до векторов $\mathbf{k}^{[j]}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

3.3. Критерий № 4 на основе классификационных кортежей

В качестве альтернативного критерия качества пространственной *ABC*-классификации в случае проблемной асимметричности учитываемых критериев можно использовать показатель степени отличия заданного классификационного кортежа $\mathbf{Q}^{[l]} =< \mathbf{Q}_A^{[l]}, \mathbf{Q}_B^{[l]}, \mathbf{Q}_C^{[l]} >$ от кортежа ранговых объединений элементов классификационных кортежей частных скалярных *ABC*-классификаций, который мы назовём рангово-объединённым классификационным кортежем.

Рангово-объединённый классификационный кортеж обозначим так: $\mathbf{G} =< \mathbf{G}_A, \mathbf{G}_B, \mathbf{G}_C >$. Отличие кортежа **G** от объединённого классификационного кортежа **U**, использованного при формировании критерия $C_2^{[l]}$, состоит в более сложной процедуре объединения результатов частных скалярных *ABC*-классификаций, представленных системой классификационных кортежей

$$\mathbf{R}^{[j]} =< \mathbf{R}_A^{[j]}, \mathbf{R}_B^{[j]}, \mathbf{R}_C^{[j]} >, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

Во множество $\mathbf{G}_A$, включаются только те учётные элементы, которые оказываются помещёнными в группу *A* хотя бы одним *A*–критерием. Во множество $\mathbf{G}_B$, включаются не вошедшие в $\mathbf{G}_A$ учётные элементы, которые оказываются помещёнными в группу *B*, хотя бы одним *A*–критерием, а также элементы из групп *A* и *B* скалярных *ABC*-классифика-ций по *B*–критериям. Во множество $\mathbf{G}_C$, включаются не вошедшие в $\mathbf{G}_A$ и $\mathbf{G}_B$ учётные элементы, которые оказываются помещёнными в группу *C*, хотя бы одним *A*– или *B*–критерием, а также элементы из групп *A*, *B* и *C* скалярных *ABC*-классификаций по *C*–критериям. Формально это правило выражается так:

$$\mathbf{G}_A = \bigcup_{j \in \mathbf{J}_A} \mathbf{R}_A^{[j]} ;$$

$$\mathbf{G}_B = \bigcup_{j \in \mathbf{J}_A} \mathbf{R}_B^{[j]} \cup \bigcup_{j \in \mathbf{J}_B} \mathbf{R}_A^{[j]} \bigcup_{j \in \mathbf{J}_B} \mathbf{R}_B^{[j]} \setminus \mathbf{G}_A ;$$

$$\mathbf{G}_C = \bigcup_{j \in \mathbf{J}_A} \mathbf{R}_C^{[j]} \cup \bigcup_{j \in \mathbf{J}_B} \mathbf{R}_C^{[j]} \bigcup_{j \in \mathbf{J}_C} \mathbf{R}_A^{[j]} \bigcup_{j \in \mathbf{J}_C} \mathbf{R}_B^{[j]} \bigcup_{j \in \mathbf{J}_C} \mathbf{R}_C^{[j]} \setminus \mathbf{G}_A \setminus \mathbf{G}_B .$$

Заметим следующее:

1) элементы **G** обладают свойствами обычного классификационного кортежа, представляющего результат *ABC*-классификации:

$$(\mathbf{G}_A \cap \mathbf{G}_B = \varnothing) \wedge (\mathbf{G}_A \cap \mathbf{G}_C = \varnothing) \wedge (\mathbf{G}_B \cap \mathbf{G}_C = \varnothing) \wedge$$
$$\wedge (\mathbf{G}_A \cup \mathbf{G}_B \cup \mathbf{G}_C = \tilde{\mathbf{X}} ;$$

2) формула для вычисления $\mathbf{G}_C$ отражает предлагаемую концепцию объединения результатов скалярных классификаций; в то же время, она полностью эквивалентна структурно более простой формуле:

$$\mathbf{G}_C = \tilde{\mathbf{X}} \setminus \mathbf{G}_A \setminus \mathbf{G}_B .$$

Доказательство последней формулы аналогично доказательству формулы для вычисления $\mathbf{U}_C$. Заметим, что замена

$$\mathbf{G}_C = \bigcup_{j \in \mathbf{J}_A} \mathbf{R}_C^{[j]} \cup \bigcup_{j \in \mathbf{J}_B} \mathbf{R}_C^{[j]} \bigcup_{j \in \mathbf{J}_C} \mathbf{R}_A^{[j]} \bigcup_{j \in \mathbf{J}_C} \mathbf{R}_B^{[j]} \bigcup_{j \in \mathbf{J}_C} \mathbf{R}_C^{[j]} \setminus \mathbf{G}_A \setminus \mathbf{G}_B$$

на $\mathbf{G}_C = \tilde{\mathbf{X}} \setminus \mathbf{G}_A \setminus \mathbf{G}_B$ приводит к важному выводу: группа *C*–критериев не влияет на результат объединения частных скалярных классификаций, т.е. выполнять скалярные классификации по *C*–критериям необязательно, достаточно классификаций по *A*–и *B*–критериям. Эти группы критериев определяют $\mathbf{G}_A$ и $\mathbf{G}_B$ – первые два элемента кортежа **G**, а последний элемент $\mathbf{G}_C$ может быть найден как дополнение объединения $\mathbf{G}_A$ и $\mathbf{G}_B$ до множества всех учётных элементов $\tilde{\mathbf{X}}$. Таким образом группа *C*–критериев может быть категорирована как несущественная.

Формула для вычисления критерия № 4 полностью совпадает с формулой критерия № 2, отличие состоит только в использовании элементов кортежа **G** вместо элементов кортежа **U**:

$$C_4^{[l]} = max\left(\left|\mathbf{Q}_A^{[l]} \setminus \mathbf{G}_A\right|, \left|\mathbf{G}_A \setminus \mathbf{Q}_A^{[l]}\right|\right) + max\left(\left|\mathbf{Q}_B^{[l]} \setminus \mathbf{G}_B\right|, \left|\mathbf{G}_B \setminus \mathbf{Q}_A^{[l]}\right|\right) +$$
$$+ max\left(\left|\mathbf{Q}_C^{[l]} \setminus \mathbf{G}_C\right|, \left|\mathbf{G}_C \setminus \mathbf{Q}_C^{[l]}\right|\right) . \qquad (4)$$

4. Канонические алгоритмы пространственной ABC-классификации для случая проблемной симметричности скалярных критериев

4.1. Алгоритм № 1 на основе классификационных векторов

Канонический алгоритм № 1 ориентирован на минимизацию критерия № 1 качества пространственной *ABC*-классификации.

✦ ***Теорема 1.***

Если расстояние между вектором $\mathbf{K}^{[l]} = (K_1^{[l]}, K_2^{[l]}, \ldots, K_m^{[l]})$, $l \in \{1,2,\ldots,L\}$ и системой векторов $\mathbf{k}^{[j]} = (k_1^{[j]}, k_2^{[j]}, \ldots, k_m^{[j]})$, $j = 1,2,\ldots,n$ характеризуется суммой квадратов расстояний

$$C_1^{[l]} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \left(K_i^{[l]} - k_i^{[j]} \right)^2 , \ l \in \{1,2,\ldots,L\},$$

то это расстояние минимально, если выполняется система равенств:

$$K_i^{[l]} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} k_{i,j} , \ i = 1, 2, \ldots, m .$$

Доказательство.

Рассмотрим сумму $C_1^{[l]}$ как функцию искомых значений элементов вектора $\mathbf{K}^{[l]}$, $l \in \{1,2,\ldots,L\}$, и для поиска минимума указанной суммы составим систему уравнений:

$$\frac{\partial}{K_i^{[l]}} C_1^{[l]}(K_1^{[l]}, K_2^{[l]}, \ldots, K_m^{[l]}) = 0 , \ i = 1, 2, \ldots, m .$$

Очевидно:

$$\frac{\partial}{K_i^{[l]}} C_1^{[l]}(K_1^{[l]}, K_2^{[l]}, \ldots, K_m^{[l]}) = \sum_{j=1}^{n} 2\left(K_i^{[l]} - k_i^{[j]} \right),$$

поэтому рассматриваемая система уравнений принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(K_i^{[l]} - k_i^{[j]} \right) = 0 , \ i = 1, 2, \ldots, m .$$

Далее с учетом

$$\sum_{j=1}^{n} \left(K_i^{[l]} - k_i^{[j]} \right) = \sum_{j=1}^{n} K_i^{[l]} - \sum_{j=1}^{n} k_i^{[j]} = nK_i^{[l]} - \sum_{j=1}^{n} k_i^{[j]}$$

получаем систему:

$$nK_i^{[l]} - \sum_{j=1}^{n} k_i^{[j]} = 0 , \ i = 1, 2, \ldots, m .$$

Откуда $K_i^{[l]} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} k_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. ✦

К сожалению, указанная система равенств в общем случае не может выполняться по причине целостности значений элементов вектора $\mathbf{K}^{[l]}$. Эта специфика приводит к следующему условию оптимальности пространственной *ABC*-классификации по предлагаемому критерию:

$$K_i^{[l]} = \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} k_{i,j} \right], \ i = 1, 2, \ldots, m , \qquad (5)$$

где квадратные скобки $[\bullet]$ символизируют операцию округления до ближайшего целого значения.

Изложенное означает, что алгоритм пространственной *ABC*-классификации кортежа $\mathbf{X} =< X_1, X_2, \ldots, X$, состоящего из *m* элементов, каждый из которых характеризуется *n* скалярными критериями, оптимальный по первому критерию, должен состоять из следующих шагов.

1. Осуществим *n* скалярных *ABC*-классификаций множества $\tilde{\mathbf{X}} = Set(\mathbf{X})$ по каждому из *n* скалярных критериев. Результаты скалярных *ABC*-классификаций представим в виде совокупности *n* классификационных векторов:

$$\mathbf{k}^{[j]} = (k_1^{[j]}, k_2^{[j]}, \ldots, k_m^{[j]}) , \ j = 1,2,\ldots,n ;.$$

2. Оптимальную по первому критерию пространственную *ABC*-классификацию представим в виде классификационного вектора

$$\mathbf{K}_{Opt}^{[1]} = (K_1^{[1]}, K_2^{[1]}, \ldots, K_m^{[1]}),$$

элементы которого вычисляются по формуле (5).

4.2. Алгоритм № 2 на основе классификационных кортежей

Канонический алгоритм № 2 ориентирован на минимизацию критерия № 2 качества пространственной *ABC*-классификации. Поскольку базой для сравнения альтернативных пространственных классификаций по этому критерию служит классификационный кортеж, составленный из простых объединений элементов классификационных кортежей частных скалярных *ABC*-классификаций, то именно этот кортеж и определяет оптимальный алгоритм пространственной *ABC*-классификации. Указанное означает, что алгоритм пространственной *ABC*-классификации кортежа $\mathbf{X} =< X_1, X_2, \ldots, X_m >$, состоящего из *m* элементов, каждый из которых характеризуется *n* скалярными критериями, оптимальный по второму критерию, должен состоять из следующих шагов.

1. Осуществим *n* скалярных *ABC*-классификаций множества $\tilde{\mathbf{X}} = Set(\mathbf{X})$ по каждому из *n* скалярных критериев. Результаты скалярных *ABC*-классификаций представим в виде совокупности *n* классификационных кортежей:

$$\mathbf{R}^{[j]} =< \mathbf{R}_A^{[j]}, \mathbf{R}_B^{[j]}, \mathbf{R}_C^{[j]} > , \ j = 1,2,\ldots,n ,$$

2. Оптимальную по второму критерию пространственную *ABC*-классификацию представим в виде классификационного кортежа $\mathbf{Q}^{[2]} =< \mathbf{Q}_A^{[2]}, \mathbf{Q}_B^{[2]}, \mathbf{Q}_C^{[2]} >$, элементы которого вычисляются по формуле:

$$\mathbf{Q}_A^{[2]} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{R}_A^{[j]} ; \ \mathbf{Q}_B^{[2]} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{R}_B^{[j]} \setminus \mathbf{Q}_A^{[2]} ; \ \mathbf{Q}_C^{[2]} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{R}_C^{[j]} \setminus \mathbf{Q}_A^{[2]} \setminus \mathbf{Q}_B^{[2]} .$$

5. Канонические алгоритмы пространственной ABC-классификации для случая проблемной асимметричности скалярных критериев

5.1. Алгоритм № 3 на основе классификационных векторов

Канонический алгоритм № 3 ориентирован на минимизацию критерия № 3 качества пространственной *ABC*-классификации. К сожалению, как и в случае проблемной симметричности скалярных критериев, синтезировать алгоритм, обращающий в ноль минимизируемый критерий, не удаётся.

✦ ***Теорема 2.***

Если расстояние между вектором $\mathbf{K}^{[l]} = (K_1^{[l]}, K_2^{[l]}, \ldots, K_m^{[l]})$, $l \in \{1, 2, \ldots, L\}$ и системой векторов $\mathbf{k}^{[j]} = (k_1^{[j]}, k_2^{[j]}, \ldots, k_m^{[j]})$, $j = 1, 2, \ldots, n$ характеризуется суммой квадратов расстояний

$$C_3^{[l]} = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(K_i^{[l]} - k_i^{[j]} \right)^2, \ l \in \{1, 2, \ldots, L\},$$

$$\text{причём } \sum_{j=1}^{n} w_j = 1,$$

то это расстояние минимально, если выполняется система равенств:

$$K_i^{[l]} = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot k_{i,j}, \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Доказательство.

Рассмотрим сумму $C_3^{[l]}$ как функцию искомых значений элементов вектора $\mathbf{K}^{[l]}$, $l \in \{1, 2, \ldots, L\}$, и для поиска минимума указанной суммы составим систему уравнений:

$$\frac{\partial}{K_i^{[l]}} C_1^{[l]}(K_1^{[l]}, K_2^{[l]}, \ldots, K_m^{[l]}) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Очевидно:

$$\frac{\partial}{K_i^{[l]}} C_1^{[l]}(K_1^{[l]}, K_2^{[l]}, \ldots, K_m^{[l]}) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot 2 \cdot \left(K_i^{[l]} - k_i^{[j]} \right),$$

поэтому рассматриваемая система уравнений принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \left(K_i^{[l]} - k_i^{[j]} \right) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Далее с учетом

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \left(K_i^{[l]} - k_i^{[j]} \right) = \sum_{j=1}^{n} w_j K_i^{[l]} - \sum_{j=1}^{n} w_j k_i^{[j]} = K_i^{[l]} \sum_{j=1}^{n} w_j - \sum_{j=1}^{n} w_j k_i^{[j]}$$

и $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ получаем систему:

$$K_i^{[l]} - \sum_{j=1}^{n} w_j k_i^{[j]} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Откуда $K_i^{[l]} = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot k_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. ✦

Конечно же, указанная система равенств в общем случае не может выполняться по причине целостности значений элементов вектора $\mathbf{K}^{[l]}$. Эта специфика приводит к следующему условию оптимальности пространственной *ABC*-классификации по рассматриваемому критерию:

$$K_i^{[l]} = \left[\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot k_{i,j} \right], \ i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (6)$$

Изложенное означает, что алгоритм пространственной *ABC*-классификации кортежа $\mathbf{X} =< X_1, X_2, \ldots, X_m >$, состоящего из m элементов, каждый из которых характеризуется n скалярными критериями, оптимальный по третьему критерию, должен состоять из следующих шагов.

Предполагаем заданной характеристику проблемной асимметричности скалярных критериев в виде вектора весовых коэффициентов $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$.

1. Осуществим n скалярных *ABC*-классификаций множества $\tilde{\mathbf{X}} = Set(\mathbf{X})$ по каждому из n скалярных критериев. Результаты скалярных *ABC*-классификаций представим в виде совокупности n классификационных векторов: $\mathbf{k}^{[j]} = (k_1^{[j]}, k_2^{[j]}, \ldots, k_m^{[j]})$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

2. Оптимальную по третьему критерию пространственную *ABC*-классификацию представим в виде классификационного вектора $\mathbf{K}_{Opt}^{[3]} = (K_1^{[3]}, K_2^{[3]}, \ldots, K_m^{[3]})$, элементы которого вычисляются по формуле (6).

5.2. Алгоритм № 4 на основе классификационных кортежей

Канонический алгоритм № 4 ориентирован на минимизацию критерия № 4 качества пространственной *ABC*-классификации. Поскольку базой для сравнения альтернативных пространственных классификаций по этому критерию служит классификационный кортеж, составленный из ранговых объединений элементов классификационных кортежей частных скалярных *ABC*-классификаций, то именно этот кортеж и определяет оптимальный алгоритм пространственной *ABC*-классификации. Указанное означает, что алгоритм пространственной *ABC*-классификации кортежа $\mathbf{X} =< X_1, X_2, \ldots, X_m >$, состоящего из m элементов, каждый из которых характеризуется n скалярными критериями, оптимальный по четвёртому критерию, должен состоять из следующих шагов.

Предполагаем заданной характеристику проблемной асимметричности скалярных критериев в виде вектора весовых коэффициентов $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ и результата *ABC*-классификации элементов этого вектора в виде кортежа $\mathbf{J} =< \mathbf{J}_A, \mathbf{J}_B, \mathbf{J}_C >$, элементами которого являются множества номеров критериев, попавших соответственно в группы *A, B* и *C*.

1. Осуществим $n_{AB} = |\mathbf{J}_A| + |\mathbf{J}_B|$ скалярных *ABC*-классификаций множества $\tilde{\mathbf{X}} = Set(\mathbf{X})$ по каждому из скалярных критериев, номера которых принадлежат множествам $\mathbf{J}_A$ и $\mathbf{J}_B$. Результаты скалярных *ABC*-классификаций представим в виде совокупности n_{AB} классификационных кортежей:

$$\mathbf{R}^{[j]} =< \mathbf{R}_A^{[j]}, \mathbf{R}_B^{[j]}, \mathbf{R}_C^{[j]} >, \; j = j_1, j_2, \ldots, j_{nAB}, \text{ где}$$
$$j_1, j_2, \ldots, j_{nAB} \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

2. Оптимальную по четвёртому критерию пространственную *ABC*-классификацию представим в виде классификационного кортежа $\mathbf{Q}^{[4]} =< \mathbf{Q}_A^{[4]}, \mathbf{Q}_B^{[4]}, \mathbf{Q}_C^{[4]} >$, элементы которого вычисляются по формуле:

$$\mathbf{Q}_A^{[4]} = \bigcup_{j \in \mathbf{J}_A} \mathbf{R}_A^{[j]}; \; \mathbf{Q}_B^{[4]} = \bigcup_{j \in \mathbf{J}_A} \mathbf{R}_B^{[j]} \cup \bigcup_{j \in \mathbf{J}_B} \mathbf{R}_A^{[j]} \bigcup_{j \in \mathbf{J}_B} \mathbf{R}_B^{[j]} \setminus \mathbf{Q}_A^{[4]};$$
$$\mathbf{Q}_C^{[4]} = \tilde{\mathbf{X}} \setminus \mathbf{Q}_A^{[4]} \setminus \mathbf{Q}_B^{[4]}.$$

Заключение

Новые теоретические результаты, представленные в статье:

1. Предложены альтернативные формы представления результатов *ABC*-классификации — в виде классификационных кортежей и векторов.

2. Предложено четыре альтернативных показателя качества пространственной (многомерной) *ABC*-классификации, отражающих сходство классификационных векторов (1), (2) и кортежей (3), (4) пространственной и совокупности частных скалярных *ABC*-классификаций, для случаев одинаковой и различной проблемной значимости скалярных критериев, используемых для характеристики учётных элементов конкретной предметной области.

3. Предложено четыре алгоритма пространственной *ABC*-классификации, названные каноническими, — оптимальные по предложенным показателям качества многомерного группирования учётных элементов для случаев одинаковой и различной проблемной значимости частных скалярных критериев.

Область применения изложенных результатов

Изложенные результаты могут использоваться в качестве методологической платформы реализации средств сокращения информационного пространства в логистической практике для повышения эффективности управления товарно-материальными ресурсами за счет целесообразного и обоснованного распределения усилий по различным направлениям контроля ситуации и выработки управляющих мероприятий.

Опыт применения и сравнительный анализ

Решение задачи многомерной *ABC*-классификации по предлагаемым каноническим алгоритмам, сопоставление полученных результатов и сравнение с результатом *ABC*-классификации на основе свёртки частных критериев осуществлено по учётным данным товарно-материальных запасов предприятия наукоемкого производства, занимающегося выпуском среднесерийного, мелкосерийного и штучного технологического оборудования, имеющего отлаженный механизм поставки материалов, комплектующих и сопутствующих товаров в цеха точно в срок. Результаты достаточно интересны и могут служить предметом самостоятельной публикации. ■

Литература

1. Бауэрсоскс Д.Дж., Клосс Д.Дж. Логистика: Интегрированная цепь поставок / Пер. с англ. Н.Н. Барышниковой, Б.С. Пинскера. — 2-е изд. — М.: ЗАО «Олимп-Бизнес», 2008. — 640 с.
2. Стерлигова А.Н. Управление запасами широкой номенклатуры: с чего начать // Логинфо. — 2003. — № 12. С. 50 — 55.
3. Чейз Р.Б., Эквилайн Н.Дж., Якобс Р.Ф. Производственный и операционный менеджмент: Пер. с англ. — 8-е изд. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. — 704 с.
4. Landford J. Logistics. Principles and Applications — USA: McGraw Hill Inc, 1995. — P. 390.
5. Gulyassy F., Hoppe M., Isermann M., Köhler O. Materials planning with SAP. — Galileo Press GmbH, 2009. — P. 564.
6. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1989. — 316 с.