Функции распределения экономических показателей торговых предприятий

© 2011 М.А. Пилюгин
кандидат экономических наук, доцент
Уфимский государственный авиационный технический университет
E-mail: victisha@yandex.ru

Для практического использования моделей аналитической оценки результатов коммерческой деятельности предприятий торговли необходимо знать функции распределения выручки по отдельным товарам ассортимента. Специфика этих функций заключается в том, что реальная функция распределения является усеченной и слева и справа. В статье рассматриваются методы преобразования классических функций: экспоненциального, Рэлея, Вейбулла - в усеченные.

Ключевые слова: усеченная функция распределения случайного значения выручки, классическая функция распределения, распределение экспоненциальное, Рэлея, Вейбулла, параметры функций распределения.

Экономические показатели торговых предприятий формируются по результатам реализации отдельных товаров их ассортимента. Результаты носят случайный характер, поэтому для определения показателей следует применять теорию случайных величин.

Распространенным показателем торговой деятельности являются выручка и прибыль. Они оцениваются за какой-то отрезок времени: за день, за неделю, месяц, квартал и т.д. Для определенности будем рассматривать выручку.

Случайная величина выручки характеризуется той или иной функцией распределения. Выбор функции производят основываясь на статистике продаж.

У функций распределения случайной величины выручки есть специфика: они имеют усеченный характер, усечение бывает и слева (т.е. выручка не бывает меньше некоторой величины), и справа (она не бывает больше определенного значения).

При анализе и оценке выручки торговых предприятий наиболее часто применяются такие функции распределения, как экспоненциальное, Рэлея и Вейбулла. Использовать их в классическом виде не удается, требуется их смещение и усечение. В данной статье излагаются методы их преобразования.

Экспоненциальное распределение в классическом виде может быть записано так:

$$f(w) = \lambda e^{-\lambda w}, \qquad (1)$$

где λ - параметр функции распределения.

Графическое изображение функции показано на рис. 1.

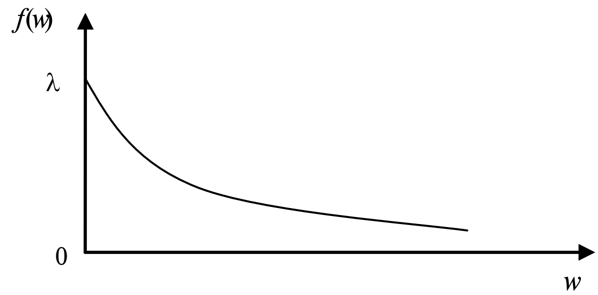

Рис. 1. Экспоненциальное распределение выручки

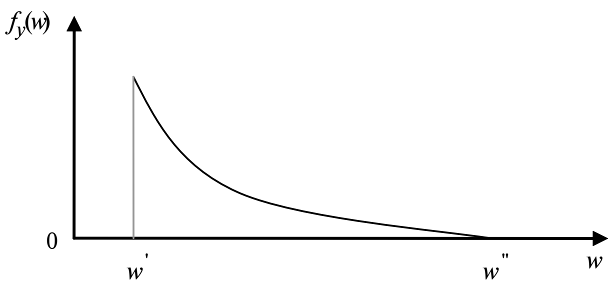

Рис. 2. Смещенное и усеченное распределение выручки экспоненциальное

Если выручка не может быть меньше некоторой минимальной w' и не может быть больше определенной максимальной w'', то графически ее функция распределения будет иметь вид рис. 2.

Данное распределение $f_y(w)$ характеризуется тремя параметрами: λ, w', w''. Оно получается преобразованием функции (1). Аналитически

$$f_{yc}(w) = a(e^{-\lambda(w-w')} - e^{-\lambda(w''-w')}), \qquad (2)$$

где a - некоторая постоянная величина. Она является функцией λ, w', w''.

Определить ее можно из очевидного условия

$$\int_{w'}^{w''} f_{ус}(w)dw = 1. \qquad (3)$$

В (3) подставим (2):

$$\int_{w'}^{w''} a(e^{-\lambda(w-w')} - e^{-\lambda(w''-w')})dw = 1.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$a\left[\left(1-e^{-\lambda(w''-w')}\right) - \lambda(w''-w')e^{-\lambda(w''-w')}\right] = \lambda.$$

Отсюда

$$a = \lambda\left[\left(1-e^{-\lambda(w''-w')}\right) - \lambda(w''-w')e^{-\lambda(w''-w')}\right]^{-1}. \qquad (4)$$

Исследуем эту зависимость. Если $w''-w' \to 0$, то $a \to \infty$; в этом случае $f_{ус}(w)$ вырождается в дельта-функцию. Это логично.

Если

$$w''-w' \to \infty, \qquad (5)$$

то $a = \lambda[1-0-\infty\cdot 0]^{-1}$.

Здесь имеет место неопределенность $\infty \cdot 0$. После раскрытия она принимает значение 0, поэтому в случае (5) $a \to \lambda$. Следовательно, при условии (5) функция (2) переходит в смещенную функцию

$$f_{СМ} = \lambda e^{-\lambda(w-w')}. \qquad (6)$$

Графически данная функция изображается в виде рис. 3.

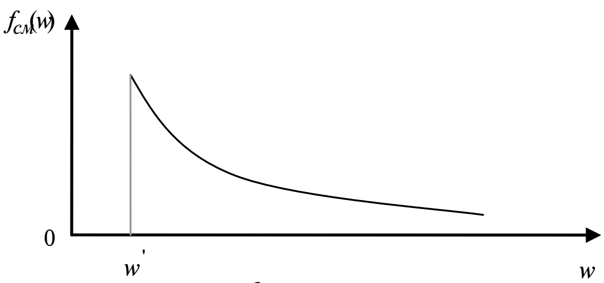

Рис. 3. **Функция (6)**

Искомую усеченную функцию получим подстановкой (4) в (2):

$$f_{ус}(w) = \frac{\lambda(e^{-\lambda(w-w')} - e^{-\lambda(w''-w')})}{1-\left[1+\lambda(w''-w')\right]e^{-\lambda(w''-w')}}. \qquad (7)$$

Усеченное экспоненциальное распределение выручки может найти применение при оценке экономических показателей торговли товарами, которые чаще реализуются по низким ценам, а с ростом цены реализуемость снижается.

Классическая функция ***распределения Рэлея*** имеет вид

$$f(w) = \lambda^2 w e^{\frac{-\lambda^2 w}{2}}.$$

Смещенная функция запишется так:

$$f_{см}(w) = \lambda^2 (w-w')e^{\frac{-\lambda^2(w-w')}{2}}, \qquad (8)$$

где w' - минимально возможная выручка предприятия;

λ - параметр распределения Рэлея.

Функция (8) существует в пределах от w' до ∞. Она изображена на рис. 4.

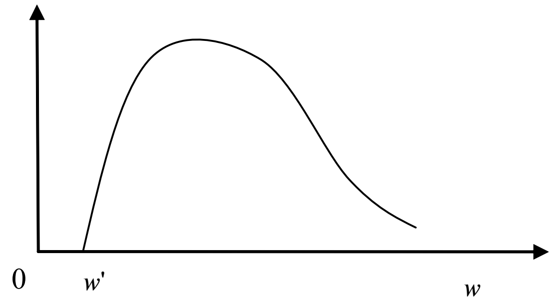

Рис. 4. **Смещенная функция распределения Рэлея**

Реальная величина выручки может находиться в диапазоне от w' до $w'' < \infty$, где w'' принимает конечное значение, поэтому нужно (8) преобразовать в усеченное распределение $f_{ус}(w)$. Она должна удовлетворять следующим условиям:

1) $f_{ус}(w=w') = 0$;

2) $f_{ус}(w=w'') = 0$;

3) $\int_{w'}^{w''} f_{ус}(w) = 1$. (9)

Первому условию удовлетворяет функция:

$$f_{ус}(w) = A\left[\lambda^2(w-w')\cdot e^{\frac{-\lambda^2(w-w')^2}{2}} - B(w-w')\lambda^2\right], \qquad (10)$$

где A, B = const.

Подставляя $w = w'$, убеждаемся, что первое условие выполняется.

Далее, подставив $w = w'$, получим уравнение для определения $B = \text{const}$:

$$f_{ус}(w'') =$$

$$= A\left[\lambda^2 (w'' - w') \cdot e^{\frac{-\lambda^2 (w''-w')^2}{2}} - B(w'' - w')\lambda^2\right] = 0.$$

Так как $A \neq 0$, можно записать

$$(w'' - w')\lambda^2 \cdot (e^{\frac{-\lambda^2 (w''-w')^2}{2}} - B) = 0,$$

отсюда

$$B = e^{\frac{-\lambda^2 (w''-w')^2}{2}}, \qquad (11)$$

и функция (10) примет вид

$$f_{ус}(w) =$$

$$= A\left[\lambda^2 (w-w') \cdot e^{\frac{-\lambda^2 (w-w')}{2}} - e^{\frac{-\lambda^2 (w''-w')^2}{2}} \cdot (w-w')\lambda^2\right]. \qquad (12)$$

Подставив $w = w''$, заметим, что $f_{ус}(w'') = 0$. Второе условие (9) также удовлетворяется.

Чтобы определить значение A, необходимо решить уравнение

$$\int_0^{x_m} A\left[\lambda^2 x \cdot e^{\frac{-\lambda^2 x^2}{2}} - \lambda^2 x e^{\frac{-\lambda^2 (x'')^2}{2}}\right] dx = 1. \qquad (13)$$

Здесь проведена замена $x = w - w'$.

Выполним интегрирование

$$\int_0^{x_m} (\lambda^2 x \cdot e^{\frac{-\lambda^2 x^2}{2}} - \lambda^2 x e^{\frac{-\lambda^2 (x'')^2}{2}}) dx =$$

$$= 1 - e^{\frac{\lambda^2 (x'')^2}{2}} (1 + \frac{\lambda^2 (x'')^2}{2}). \qquad (14)$$

Подставив правую часть (14) в (13), получим

$$A = \frac{1}{1 - 1 - e^{\frac{\lambda^2 (x'')^2}{2}} (1 + \frac{\lambda^2 (x'')^2}{2})}. \qquad (15)$$

Таким образом, формула усеченного распределения Рэлея выручки продаж имеет вид

$$f_{ус}(w) = \frac{1}{1 - e^{\frac{-\lambda^2 (w''-w')^2}{2}} \left[1 + \frac{\lambda^2}{2}(w'' - w')^2\right]} \times$$

$$\times\left[\lambda^2 (w - w') \cdot e^{\frac{-\lambda^2}{2}(w-w')^2} - \lambda^2 (w - w') e^{\frac{-\lambda^2}{2}(w''-w')^2}\right]. \qquad (16)$$

Усеченная функция Рэлея (16) имеет вид рис. 5.

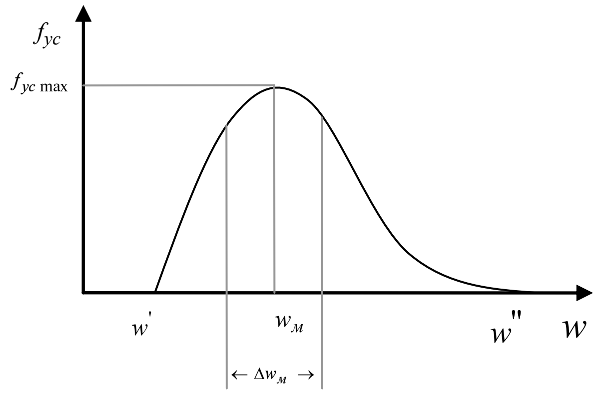

Рис. 5. Усеченная функция Рэлея

Функция одномодальная, при $w = w_м$ значение $f_{ус}$ принимает максимальное значение. Следовательно, реализация товаров такова, что существенная часть выручки w имеет место от $w_м - \frac{\Delta w_м}{2}$ до $w_м + \frac{\Delta w_м}{2}$.

В реальной практике функцией (16) возможно описание выручки многих торговых предприятий.

Функция ***распределения Вейбулла*** аналитически может быть записана:

$$f(w) = \mu k\, w^{k-1} e^{-(\mu w)^k}. \qquad (17)$$

Аргумент *w* в этой функции может принимать значения от 0 до ∞.

Функция двухпараметрическая, параметр μ определяет масштаб, *k* - форму распределения. В реальной жизни выручка w имеет конечное значение, т.е. она не меньше некоторой положительной величины w', поэтому распределение (17) нужно записать в виде смещенной функции

$$f_{см}(w) = \mu k (w - w')^{k-1} e^{-\mu (w-w')^k}. \qquad (18)$$

В этой модели w может находиться в пределах от w' до ∞. В реальности выручка не бывает больше некоторой w'', поэтому для практического применения целесообразно преобразовать функцию (18) в усеченную $f_{ус}(w)$. Усеченная функция должна удовлетворять условиям:

1) $f_{ус}(w')$=0; 2) в точке $w = w'$ производные $\frac{d^i f_{ус}}{dw} = 0$ при $i \le k-2$;

3) $f_{ус}(w'') = 0$; 4) $\int\limits_{w'}^{w''} f_{ус}(w)dw = 1$.

Первое и третье условия следуют из усеченного характера функции распределения; второе условие присуще функции распределения Вейбулла: само распределение существует при $k \ge 3$ и первая, вторая, ..., до (*k* - 2)-й производные при $w = w'$ равны нулю. Четвертое условие - известная связь между дифференциальной и интегральной функциями распределения.

Найдем функцию $f_{ус}(w)$.

Первому и второму условиям удовлетворяет функция вида

$$f_{ус}(w) = A\left|\mu k \left(\mu^{k-1}(w-w')^{k-1}\right) e^{-\mu^k (w-w')^k} - B[\mu (w-w')^{k-1}]\right|. \qquad (19)$$

Здесь *A* и *B* - некоторые положительные величины.

В (18) условие $f_{ус}(w') = 0$ очевидно удовлетворяется.

Обозначим первое слагаемое в квадратных скобках φ_1, второе - φ_2.

Возьмем первые производные:

$$\frac{d\varphi_1}{dw} = k\mu^k \left\{ e^{-\mu^k (w-w')^k} \left[(k-1)\left(w-w'\right)^{k-2}\right) - k\mu^{2k}(w-w')^{3k-2}\right] \right\},$$

$$\frac{d\varphi_2}{dw} = B\mu^k (k-1)(w-w')^{k-2}.$$

Очевидно, в точке $w = w'$ первые производные функций φ_1 и φ_2 равны нулю.

Следовательно, второе условие для первой производной удовлетворяется. Аналогично можно проверить его для последующих производных. Это условие требует, чтобы при $i \le k-2$ разность

$$\frac{d\varphi_1^i}{dw^i} - \frac{d\varphi_2^i}{dw^i} = 0.$$

Из третьего условия определим значение *B*.

Из анализа (19) следует

$$\varphi(w'') = A\left[\varphi_1(w'') - \varphi_2(w'')\right] = 0.$$

Отсюда

$$k\mu(\mu(w''-w'))^{k-1} e^{-\mu^k (w''-w')k} = B\mu(w''-w')^{k-1},$$

$$B = k\mu e^{-\mu^k (w''-w')^k}. \qquad (20)$$

Из четвертого условия можно определить *A*:

$$A\mu^k k \int\limits_{w'}^{w''} (w-w')^{k-1}\left[e^{-\mu^k (w-w')^k} - \right.$$

$$-e^{-\mu^k (w''-w')^k}\Bigg]dw = 1 .$$

Проинтегрировав, получим

$$A\left[1-e^{-\mu^k(w''-w')^k} - \mu^k(w''-w') - e^{-\mu^k(w''-w')}\right] = 1.$$

Отсюда

$$A = \left\{1-\left[1+\mu^k(w''-w')^k\right]e^{-\mu^k(w''-w')}\right\}^{-1} .$$

Подставив в (19) значения A и B, получим, что усеченная функция распределения Вейбулла имеет вид

$$f_{yc}(w) =$$

$$= \frac{\mu k(\mu^{k-1}(w-w')^{k-1})\left[e^{-\mu^k(w-w')^k} - e^{-\mu^k(w''-w')^k}\right]}{1-\left[1+\mu^k(w''-w')^k\right]e^{-\mu^k(w''-w')^k}}. \qquad (21)$$

Исследуем поведение функции $f_{yc}(w)$, описываемой выражением (21), в зависимости от значений ее параметров. Величины w' и w'' определяют положение распределения выручки. Величина k определяет форму распределения.

Примеры графического представления $f_{yc}(w)$ при некоторых значениях μ и k приведены на рис. 6.

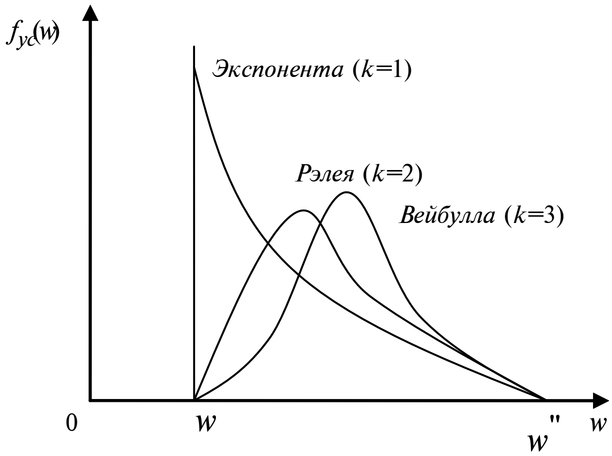

Рис. 6. Усеченные распределения при разных параметрах формы k

Функция (21) является более общей, из нее вытекает усеченное распределение Рэлея (16) при k=2 и $\mu = \lambda : \sqrt{2}$, из нее же получается усеченное экспоненциальное распределение (17) при k=1 и $\mu = \lambda$.

Функция (21), как и (16), одномодальна; для нее характерно то, что доля случаев продаж в области низких цен возрастает опережающе в сравнении с увеличением самой цены.

1. Справочник по вероятностным расчетам / Г.Г. Абезгауз [и др.]. М., 1966.

2. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М., 1962.

3. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М., 1961.

4. *Зельдович Я.Б., Мышкин А.Д.* Элементы прикладной математики. М., 1972.

5. Статистические методы обработки результатов наблюдений / под ред. Р.М. Юсупова. М., 1984.

Поступила в редакцию 05.06.2011 г.