Качественный анализ соотношения уровней потребления в открытой макроэкономической системе

© В.М. Трояновский, 2002

Рассматривается модель макроэкономической системы, обменивающейся продуктами с другими подобными системами. В рамках модели работники исследуемой системы имеют возможность свободно выбирать сферу приложения своего труда. В результате проведенного анализа определяется, каким образом формируется цена на собственный и импортный товар, каково соотношение уровней потребления у разных работников, при каких условиях импорт является выгодным для всех работников.

Введение

Вопросам функционирования открытой экономики, т.е. есть экономики, обменивающейся продуктами производства с другими субъектами экономической деятельности, посвящены многочисленные работы. В них изучаются различные аспекты многих взаимосвязанных проблем (см., например, [1–3]). Ниже рассматривается формирование цены на потребительский товар при наличии мощного потока аналогичного импортного товара, связь величин зарплат у работников, занятых «внутри» и «вне» данной экономической системы, а также соотношение уровней реального потребления у работников, занятых в производственных секторах рассматриваемой макроэкономической системы и в экспортно-импортной сфере. Часто уровень жизни работников этих двух групп имеет существенные различия, что порождает негативные социальные и экономические последствия этого различия. Подобная ситуация требует соответствующего теоретического исследования с тем, чтобы выяснить, является ли такая реальность результатом злой воли или она – объективная закономерность. В последнем случае, безусловно, надо иметь представление о «разумных» и «справедливых» границах неравенства между работниками различных групп.

Анализ перечисленных вопросов проводится в рамках высокоагрегированной модели, с минимальной детализацией, с использованием многих существенных упрощающих предположений. Это позволяет избежать сложного математического описания самой модели и получить результаты, которые отражали бы экономическую реальность. Ограниченный объем статьи не позволяет подробно осветить все те аспекты функционирования экономической системы и все вопросы модельного описания этого функционирования, которые традиционно обсуждаются в работах данного профиля. Несмотря на все упрощения, для получения главного результата потребовались достаточно объемные выкладки (все доказательные рассуждения вынесены в приложение).

1. Описание модели

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из трех производственных секторов. Личное потребление продукта, произведенного «внутри» системы, обозначается индексом «*g*», а «внешняя» часть системы, осуществляющая поставку импортного личного потребления – индексом «*S*». *R* – сектор воспроизводства единственного однородного ресурса, используемого всеми секторами (этот агрегированный ресурс содержит исходное природное сырье, продукты его переработки и все последующие товары, выпускаемые для нужд собственно воспроизводства и последующего производства потребительских товаров); *X* – сектор производства для общесистемного потребления, который выпускает продукт, не возвращающийся в производственный процесс, но и не используемый людьми непосредственно для личного потребления (оборона, наука и т.д.); *Y* – сектор производства агрегированного личного потребления, включающего питание, одежду, жилье, образование, здравоохранение и т.д.

Необходимость учитывать наличие сектора производства общесистемного потребления связана с тем, что трехсекторная модель и двухсекторная модель (в которой данный сектор отсутствует) ведут себя различным образом. Они по-разному описывают возможные траектории роста. В трехсекторной модели можно наблюдать эффекты, которые невозможно увидеть в двухсекторной модели и по-разному ведут себя при смене технологий. В целом, трехсекторная модель, с одной стороны, позволяет исследовать большее количество важных экономических явлений, с другой стороны, она применима для описания и анализа таких проблем, к которым невозможно подступиться в рамках двухсекторной модели (например, трехсекторная модель допускает анализ работы управляющего центра системы, который является распорядителем общесистемного потребления).

Любое моделирование – это упрощение реальности. В данной работе основной целью всех упрощающих предположений является стремление иметь дело с конечными процессами, протекающими в макроэкономической системе. Такой подход позволяет избежать рассмотрения важных, но второстепенных для данной работы проблем: сложного анализа механизмов, формирующих причинно-следственные связи в системе; оптимизационных задач, решаемых отдельными производителями и управляющим центром макроэкономической системы; непростых и совсем небыстрых переходных процессов, возникающих при реализации экономическими агентами решений их собственных оптимизационных задач. Перечислим допущения, которые имеют место в данной модели.

Время в модели присутствует только при первоначальном описании, поэтому оно выбирается дискретным. Это связано с тем, что основной анализ функционирования макроэкономической системы проводится для стационарного режима (поэтому предложение труда можно считать постоянным).

Объем общесистемного потребления и ресурса, резервируемого для будущего маневра, определяются из решения задачи более высокого уровня по отношению к задачам, решаемым производителями.

Вопрос о порядке распределения ресурса и труда между секторами рассматривается только в плане анализа уровней потребления.

В экспортно-импортных операциях заняты одни и те же люди, которые обеспечивают все необходимые работы с экспортируемым ресурсом и импортируемым личным потреблением. Предполагается, что у занятых в *S*-экономике есть широкие возможности маневра при выполнении экспортно-импортных операций, и поэтому потребность в труде можно определять указанным образом, не разделяя людей на экспортеров и импортеров.

Будем считать, что все производители находятся в условиях, когда, во-первых, хотят продавать все произведенное, и во-вторых, заинтересованы в расширении производства, в увеличении объемов выпуска (подробнее этот вопрос обсуждается в [4]). Данное упрощение модели сделано для того, чтобы исключить многочисленные варианты решений отдельных производителей и еще более многочисленные комбинаций вариантов решений всех производителей. Также для простоты примем допущение, что зарплата, налог, платежеспособный спрос одинаковы для всех людей во всех отраслях *g*-экономики. То же самое верно и для *S*-экономики, причем считается известным, какую часть зарплаты люди выделяют на потребление.

Предполагается, что работники имеют возможность свободно и «быстро» реализовывать свое предпочтение, связанное с выбором места работы. Данное предположение облегчает рассмотрение основных вопросов, так как позволяет исключить рассмотрение сложных и длительных переходных процессов, связанных с решением работниками одной из «своих» оптимизационных задач.

Для того чтобы не анализировать финансовую и коммерческую деятельность экспортно-импортного агента, будем считать, что он осуществляет обыкновенный бартерный обмен.

Обычно в работах, посвященных функционированию экономических систем, считается, что в краткосрочной перспективе потребители делают свой выбор, ориентируясь на текущие цены и имеющиеся у них доходы. Это естественное предположение влечет формирование определенной макродинамики [1] и приводит к некоторому «выравниванию» как поведения потребителей в результате их обучения, так и всех процессов в системе. В данной работе предполагается, что потребители достаточно опытны, а потому и достаточно дальновидны.

Перечисленные допущения носят характер именно упрощающих анализ предположений и не создают никаких дополнительных преимуществ для какого-либо из экономических агентов модели. Например, бартерный обмен собственного ресурса на импортное потребление, безусловно, облегчает анализ, а отказ от этого допущения не только усложняет его и создает предпосылки для дополнительного обогащения занятых в сфере экспортно-импортных операций, т.е. появляются предпосылки для увеличения их уровня реального дохода.

Рассмотрим взаимосвязь элементов модели (рис. 1) и определение итоговых значений этих элементов.

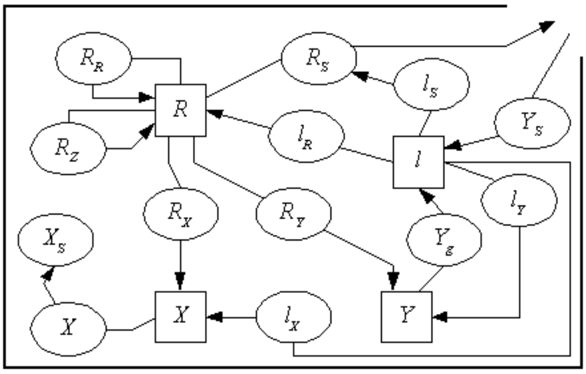

Рис. 1. Взаимосвязь элементов модели

Пусть $R(t)$, $X(t)$, $Y_g(t)$ – объемы выпусков соответствующих секторов в момент времени t; $Y_S(t)$ – объем закупок личного потребления на внешнем рынке; $R_S(t)$ – объем продукта, выделяемого для внешнеэкономических операций. Таким образом, рассматривается ситуация, при которой импортное личное потребление появляется в результате экспорта ресурса, а не какого-либо товара, производимого из этого ресурса. Для обеспечения маневра в производстве ресурсный сектор часть своего выпуска величины $R_Z(t)$ резервирует. Общесистемное потребление, для простоты, считается просто накапливаемым: объем накопления для рассматриваемого простейшего случая $X_S(t) = X_S(t-1) + X(t)$.

Функционирование каждого из секторов описывается с помощью производственных функций с постоянными пропорциями между трудовыми и ресурсными затратами. В силу этого для объемов выпусков продуктов в секторах можно записать линейные соотношения:

$R(t) = \alpha_R R_R(t-1)$, $X(t) = \alpha_X R_X(t-1)$,
$Y(t) = \alpha_Y R_Y(t-1)$, $\alpha_i = \text{const}$
для $i = R, X, Y$.

Коэффициент α_i показывает, в какое количество продукта i преобразуется единица сырья, $\alpha_R > 1$ (что означает включение в первый сектор сырьевых отраслей и возможность расширения производства). Обозначим через R_i объем исходного ресурса, направляемого в сектор i. Величины ресурса, выделяемого каждому сектору, равны: $R_i(t) = \gamma_i(t)\, R(t)$, $\sum_i \gamma_i(t) \le 1$ для $\forall t$. Коэффициенты трудозатрат β_i каждого из секторов считаются известными и постоянными, что позволяет определять потребность в труде: $l_i(t) = \beta_i R_i(t)$, $i = R, X, Y, S$.

Дальнейший анализ уровней потребления работающих, который проводится ниже, связан с двумя аспектами поведения людей: с их решением работать в g- или S-экономике и с их решением покупать свое или импортное личное потребление. Надо подчеркнуть, что речь идет именно об анализе определенной ситуации, а не о ее оптимизации, поскольку такая задача является самостоятельной объемной работой.

2. Описание характера величин удельных личных потреблений

Пусть y_g и y_s – удельные личные потребления в g- и S-экономиках (т.е. величины личного потребления одного работника);

$L(t)$ – общее предложение трудовых ресурсов; $L_i(t)$ – предложение труда в t, т.е. на интервале $(t, t+1)$, в секторе i g-экономики; l_i – численность занятых на интервале $(t, t+1)$, в секторе i g-экономики; $l_g(t)$, $l_S(t)$ – общие численности занятых в g- и S-экономиках на интервале $(t, t+1)$ соответственно; C_{gY} – цена, по которой продается (всем желающим) личное потребление, произведенное в g-экономике, C_{SY} – цена импортного личного потребления, поступившего в S-экономику; $\omega_g(t)$ – деньги одного занятого в g-экономике, которые в момент t выделяются на личное потребление. В S-экономике одним человеком в t выделяется на личное потребление $\omega_S(t)$.

Затраты на потребление определяют удельное потребление, от которого зависит предложение труда, т.е. при наличии возможности выбирать в рамках системы между работой «внутри» и «вне», люди сравнивают уровни потребления в g- и S-экономике, решая вопрос о выборе места работы. Как будет показано в дальнейшем, сравнение уровней потребления возможно на основании сравнения уровня зарплат.

Будем считать, что работники, делая выбор между g- и S-экономиками, ориентируются на соотношение зарплат $\pi = \omega_S / \omega_g$:

$$L(t) = \sum_i L_i(t) = \Gamma(\pi) l(t).$$

Величина $\Gamma(\pi)$ определяет склонность трудоспособных людей работать «внутри» системы, т.е. задает долю людей, готовых при данном соотношении зарплат π работать в каком-либо из секторов R, X, Y. Качественный вид функции $\Gamma(\pi)$, которая становится известной в результате соответствующих социологических исследований, представлен на рис. 2. Предполагается, что эта функция имеет следующие естественные свойства. Во-первых, $\Gamma(\pi) \in (0;1)$, $(\partial\Gamma/\partial\pi) \le 0$. Во-вторых, она меняется лишь на некотором «внутреннем» интервале $(\pi_b; \pi_e)$, причем имеют место соотношения $1 < \pi_b < 2$. Наконец, вне указанного интервала, т.е. на концах допустимой области определения π (задается эта область просто: $\pi > 0$), значения $\Gamma(\pi)$ следующие:

$$\Gamma(\pi) = \begin{cases} \Gamma_M = \text{const} \sim 1-0, & \pi < \pi_b, \\ \Gamma_m = \text{const} \sim 0+0, & \pi > \pi_e. \end{cases}$$

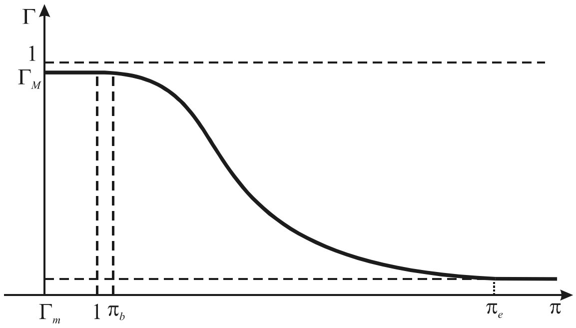

Рис. 2. Качественный характер зависимости доли Г трудоспособного населения, желающего работать в *g*-экономике, при данном соотношении зарплат π

Пусть ε_g и ε_S – соответственно, доли затрат от ω_g и ω_S, выделяемые на приобретение личного потребления, произведенного g-экономикой. Тогда условие равновесия спроса и предложения на личное потребление в g- и S-экономиках дает:

$\varepsilon_g \omega_g l_g + \varepsilon_S \omega_S l_S = C_{gY} Y_g$,

$(1 - \varepsilon_g) \omega_g l_g + (1 - \varepsilon_S) \omega_S l_S = C_{SY} Y_S$,

$\varepsilon_g, \varepsilon_S \in [0; 1]$.

Отметим, что попытка всех потребителей броситься покупать там, где дешевле, вызовет лишь рост цены из-за увеличения массы денег, предлагаемых за определенный объем товара. Таким образом, цены C_{gY} и C_{SY} зависят от ε_g, ε_S (принятое ранее допущение о дальновидном поведении потребителей означает, в частности, что они знают об этой зависимости).

Естественно считать, что желание работников – максимизировать свое личное удельное потребление, т.е. получить

$$y_g = \max_{\varepsilon_g}\left(\frac{\varepsilon_g\omega_g}{C_{gY}} + \frac{(1-\varepsilon_g)\omega_g}{C_{sY}}\right),$$

$$y_s = \max_{\varepsilon_S}\left(\frac{\varepsilon_S\omega_S}{C_{gY}} + \frac{(1-\varepsilon_S)\omega_S}{C_{sY}}\right).$$

Из условия равенства спроса и предложения получается, что

$$C_{gY} = \frac{\varepsilon_g\omega_g l_g + \varepsilon_S\omega_S l_S}{Y_g},$$

$$C_{SY} = \frac{(1-\varepsilon_g)\omega_g l_g + (1-\varepsilon_S)\omega_S l_S}{Y_S},$$

после подстановки цен в выражения для удельных потреблений найдем:

$$y_g(\varepsilon_g, \varepsilon_S) = \frac{\varepsilon_g Y_g}{\varepsilon_g l_g + \pi\,\varepsilon_S l_S} + \frac{(1-\varepsilon_g)Y_S}{(1-\varepsilon_g)l_g + \pi(1-\varepsilon_S)l_S},$$

$$y_S(\varepsilon_g, \varepsilon_S) = \frac{\pi\,\varepsilon_S Y_g}{\varepsilon_g l_g + \pi\,\varepsilon_S l_S} + \frac{\pi(1-\varepsilon_S)Y_S}{(1-\varepsilon_g)l_g + \pi(1-\varepsilon_S)l_S},$$

$$\pi = \frac{\omega_S}{\omega_g}.$$

Важно, что для $\forall\varepsilon \in (0; 1)$ при $\varepsilon_g = \varepsilon_S = \varepsilon$ будет:

$$y_g(\varepsilon, \varepsilon) = \frac{Y_g + Y_S}{l_g + \pi\, l_S},\quad y_S(\varepsilon, \varepsilon) = \frac{\pi(Y_g + Y_S)}{l_g + \pi\, l_S}.$$

Пусть $\varepsilon^* = Y_g / (Y_g + Y_S)$. Ясно, что

$$\varepsilon^* \begin{cases} < 0{,}5 \text{ при } Y_S > Y_g, \\ = 0{,}5 \text{ при } Y_S = Y_g, \\ > 0{,}5 \text{ при } Y_S < Y_g. \end{cases}$$

Каждый из указанных случаев в принципе не исключен, хотя обеспечение личного потребления в основном за счет импорта (первый случай) представляется достаточно экстравагантным.

Для нас существенным является следующий факт. Функции $y_g(\varepsilon_g, \varepsilon_S)$, $y_S(\varepsilon_g, \varepsilon_S)$ непрерывны всюду на единичном квадрате, кроме вершин (0; 0) и (1; 1). Это следует из того, что эти функции везде, кроме указанных вершин, ведут себя как элементарные функции, непрерывность которых известна. Что же касается двух выделенных точек, видно, что пределы по разным направлениям для y_S и y_g для каждой их этих величин различны. Покажем это на примере величины y_g, рассмотрев пределы по двум разным направлениям для одной из указанных вершин:

$$\lim y_g(\varepsilon_g, 0) = \lim\left(\frac{Y_g}{l_g} + \frac{(1-\varepsilon_g)Y_S}{(1-\varepsilon_g)l_g + \pi\, l_S}\right) = $$
$$= \frac{Y_g}{l_g} + \frac{Y_S}{l_g + \pi\, l_S} \quad \text{при } \varepsilon_g \to 0,$$

$$\lim y_g(0, \varepsilon_S) = \lim\left(\frac{Y_S}{l_g + (1-\varepsilon_S)\pi\, l_S}\right) = $$
$$= \frac{Y_S}{l_g + \pi\, l_S} \quad \text{при } \varepsilon_S \to 0.$$

Доопределим функции y_S, y_g в вершинах (0; 0) и (1; 1), исходя из экономического смысла этих величин, а именно:

$$y_g(0;0) = \frac{Y_S}{l_g + \pi\, l_S}, \quad y_g(1;1) = \frac{Y_g}{l_g + \pi\, l_S},$$
$$y_S(0;0) = \frac{\pi Y_S}{l_g + \pi\, l_S}, \quad y_S(1;1) = \frac{\pi Y_g}{l_g + \pi\, l_S}.$$

Слова «доопределить, исходя из экономического смысла» означают следующее. При ε_g и ε_S равных нулю (единице), все покупают только в S-экономике (g-экономике), и общий закупленный объем личного потребления в этом случае должен быть равен Y_S (соответственно, Y_g). Теперь имеем:

$$y_g(0;0)\, l_g + y_S(0;0)\, l_S = Y_S,$$
$$y_g(1;1)\, l_g + y_S(1;1)\, l_S = Y_g.$$

При любом другом определении $y_g(\varepsilon_g, \varepsilon_S)$, $y_S(\varepsilon_g, \varepsilon_S)$ в указанных вершинах получить Y_S, Y_g нельзя.

Можно убедиться, что при $\varepsilon_g = \varepsilon_S = 0$ (т.е. все покупают только в S-экономике) имеем:

$$y_g(0,0) = \frac{Y_S}{l_g + \pi l_S} < \frac{(Y_g + Y_S)}{l_g + \pi l_S} = y_g^*(\varepsilon^*, \varepsilon^*).$$

А когда все покупают только произведенное в g-экономике, т.е. при $\varepsilon_g = \varepsilon_S = 1$, имеем

$$y_g(1,1) = \frac{Y_g}{l_g + \pi\, l_S} < y_g^*(\varepsilon^*, \varepsilon^*).$$

Для y_S имеем:

$$y_S(1,1) = \frac{\pi\, Y_g}{l_g + \pi\, l_S} < y_S^*(\varepsilon^*, \varepsilon^*),$$

$$y_S(0,0) = \frac{\pi\, Y_S}{l_g + \pi l_S} < \frac{\pi(Y_g + Y_s)}{l_g + \pi l_S} = $$
$$= y_S^*(\varepsilon^*, \varepsilon^*) = \pi\, y_g^*.$$

Таким образом, в вершинах единичного квадрата (0; 0) и (1; 1) функции y_g, y_S имеют значения меньшие, чем потенциально возможные. Это обстоятельство сейчас окажется важным.

Характер поверхностей $y_g(\varepsilon_g, \varepsilon_S)$ и $y_S(\varepsilon_g, \varepsilon_S)$ можно увидеть, проанализировав сечения $\varepsilon_g = \varepsilon_f$ внутри единичного квадрата (ε_f – фиксированные величины: $\varepsilon_f \in (0;1)$), затем сечение $\varepsilon_S = \varepsilon_f$, а потом исследовав функции на экстремум.

Теорема 1. *Каждая из поверхностей $y_g(\varepsilon_g, \varepsilon_S)$, $y_S(\varepsilon_g, \varepsilon_S)$ имеет вид седла, т.е. различное направление выпуклости по ортогональным направлениям.*

Результат, полученный в этой теореме, связан с характером таких величин как удельное личное потребление людей, занятых во «внутренней» и «внешней» экономической деятельности. Следствием выявленного характера поведения поверхностей $y_g(\varepsilon_g, \varepsilon_S)$, $y_S(\varepsilon_g, \varepsilon_S)$ является связь цен личного потребления C_{gY}, C_{SY} в g- и S-экономиках.

Из условия равновесия спроса и предложения, выписанного ранее, имеем:

$$C_{gY} = \frac{\varepsilon_g \omega_g l_g + \varepsilon_S \omega_S l_S}{Y_g},$$

$$C_{SY} = \frac{(1-\varepsilon_g)\omega_g l_g + (1-\varepsilon_S)\omega_S l_S}{Y_S}.$$

При $\varepsilon_g = \varepsilon_S = \varepsilon^* = Y_g / (Y_g + Y_S)$ получается $C^*_{gY} = C^*_{SY} = (\omega_g l_g + \omega_S l_S)/(Y_g + Y_S)$. Обозначим последнюю величину просто C^*. Если же ε_g, ε_S отклоняются от $\varepsilon^* = Y_g/(Y_g + Y_S)$, то ситуация с ценами оказывается другой.

Теорема 2. *В общем случае, из которого есть одно определенное исключение, рассматриваемое в следующей теореме, при* ε_g, $\varepsilon_S \neq \varepsilon^*$ *имеем* $C_{gY} \neq C_{SY}$.

Равенство цен C_{gY}, C_{SY} возможно не только при $\varepsilon_g = \varepsilon_S = \varepsilon^*$, но и еще в одном случае, этот факт является важным для дальнейшего изложения.

Теорема 3. *При введенных выше обозначениях* $\varepsilon_g = \varepsilon^* + \delta_g$, $\varepsilon_S = \varepsilon^* + \delta_S$ *и* $\Delta = \delta_g \omega_g l_g + \delta_S \omega_S l_S$ *случаю* $\Delta = 0$ *отвечает такая прямая* $\varepsilon_S = f(\varepsilon_g)$, *вдоль которой внутри и на границах единичного квадрата* ($\varepsilon_g, \varepsilon_S \in [0; 1]$), *имеет место равенство цен* C_{gY}, C_{SY} *и постоянство величин удельных личных потреблений, причем их значения равны, соответственно,* y_g^* *и* y_S^*.

Уравнение этой прямой (см. доказательство теоремы) имеет вид:

$$\varepsilon_S = -\frac{l_g}{\pi\, l_S}\varepsilon_g + \frac{\varepsilon^*(l_g + \pi\, l_S)}{\pi\, l_S}.$$

Назовем найденную прямую, вдоль которой $C_{gY} + C_{SY} = C^*$, $y_g = y_g^*$, $y_S = y_S^*$, *равноценной*. Она должна быть обязательно, так как поверхности $y_g(\varepsilon_g, \varepsilon_S)$, $y_S(\varepsilon_g, \varepsilon_S)$ имеют характер седла, поэтому доказательство теоремы посвящено не столько тому, что есть прямая с определенными свойствами, столько тому, какова эта конкретная прямая.

Следствием того, что поверхности удельных личных потреблений ориентированы «противоположно», будет то, что равноценная прямая оказывается линией «динамического» равновесия системы (отклонение от нее стимулирует возникновение тенденции вернуться на эту линию, но эта тенденция может и не реализоваться), а точка $\varepsilon_g = \varepsilon_S = \varepsilon^*$ является точкой устойчивого «статического» равновесия (при попадании системы в эту точку ни g-экономике, ни S-экономике отклоняться от этого состояния невыгодно). Приведем это утверждение без доказательства, подробно этот вопрос обсуждается в [5]. Указанное следствие является важным лишь постольку, поскольку позволяет далее исходить из стремления g- и S-экономик тяготеть к определенным величинам удельных личных потреблений, а именно y_g^* и y_S^* соответственно.

Рассмотрим случай прохождения равноценной прямой через ребро, соответствующее вершине (0; 1) или (1; 0).

Теорема 4. *Если равноценная прямая проходит через одну из вершин* (0; 1) *или* (1; 0), *то она проходит и через другую вершину, т.е. является диагональю квадрата. Для того, чтобы равноценная прямая была диагональю квадрата необходимо и достаточно выполнение условий* $\pi = 1$, $l_g = l_S$, $Y_g = Y_S$.

Равенства $l_g = l_S$ и $Y_g = Y_S$, конечно, не исключены, но совсем не обязательны, поскольку для их выполнения нужны определенные соотношения между технологическими параметрами модели и соответствующая политика обеспечения личным потреблением.

В результате можно сделать следующий вывод: если не выполнено хотя бы одно из условий $\pi = 1$, $l_g = l_S$ или $Y_g = Y_S$, то равноценная прямая не является диагональю квадрата (т.е. $\pi \neq 1$). В экономическом плане еще более важным следствием проведенного рассмотрения является то, что в том случае, когда $l_g \neq l_S$ или $Y_g \neq Y_S$ или имеют место оба неравенства сразу, должно выполняться и неравенство $\pi \neq 1$. А так как имеет место соотношение $y_S^* = \pi\, y_g^*$, то при $\pi \neq 1$ величины удельных личных потреблений в g- и S-экономиках оказываются разными. Эта ситуация и вопрос о рациональном поведении потребителей будут рассмотрены ниже.

3. Максимизация удельного личного потребления каждого из агентов макроэкономической системы

Поскольку имеет место соотношение $y_S^* = \pi\, y_g^*$ и состояние $y_g = y_g^*$, $y_S = y_S^*$ вполне возможно, и даже почти обязательно (как это отмечалось ранее) возникает вопрос о приемлемости ситуации, когда $\pi \neq 1$ (известно, что обычно имеет место один, вполне определенный случай $\pi > 1$).

Мы исследуем связь y_g и y_S с π, так как нас интересуют следующие вопросы: может ли быть так, что с ростом π растут y_g и y_S ? Является ли выгодной для всех субъектов макроэкономической системы ситуация, когда $\pi > 1$? Для получения ответа на эти вопросы надо рассмотреть оптимизационную задачу с целевой функцией

$$\max_{\pi}\left(\min\left\{y_g^*;\ y_S^*\right\}\right)$$

Обратим внимание на то, что в дальнейшем под y_g подразумевается величина $y_g^* = \left(Y_g + Y_S\right)/\left(l_g + \pi\, l_S\right)$, и поэтому может создаваться впечатление, что по мере роста π значение y_g будет монотонно убывать. На самом деле от π зависит распределение трудовых ресурсов по секторам, а с ним и величин Y_g, Y_S. Поэтому с ростом π поведение y_g оказывается достаточно сложным.

В рамках изложенного подхода от π зависят Γ, R_Y, R_S, R_R, y_g^* и y_S^*. Для упрощения записи будем писать – y_g, y_S.

Рассмотрим стационарный режим функционирования макроэкономической системы. Подобное упрощение имеет определенную практическую пользу. Анализ стационарного режима – необходимый шаг на пути к анализу кусочно-постоянного режима, который является достаточно типичным и частым случаем функционирования экономических систем.

Для такого режима (обозначим его индексом f) получаем:

$$R_R = \frac{R_f}{\alpha_R},\quad R_X = \frac{X_f}{\alpha_x},\quad R_Y = \frac{Y_f}{\alpha_Y},$$
$$R_f = \frac{R_f}{\alpha_R} + \frac{X_f}{\alpha_x} + \frac{Y_f}{\alpha_Y} + R_Z + R_S,$$

где $Y_f = Y_g$ – выпуск личного потребления во «внутренней» экономике. Последнее равенство позволяет найти стационарный объем выпуска ресурса R_f, исходя из желаемых объемов производства в других секторах, а именно:

$$R_f = \frac{\alpha_R X_f}{\alpha_x(\alpha_R-1)} + \frac{\alpha_R Y_f}{\alpha_Y(\alpha_R-1)} + \frac{\alpha_R R_Z}{\alpha_R-1} + \frac{\alpha_R R_S}{\alpha_R-1}.$$

Кроме того:

$$R_R = \frac{R_f}{\alpha_R} = \frac{X_f}{\alpha_X(\alpha_R-1)} + \frac{Y_f}{\alpha_Y(\alpha_R-1)} + \frac{R_Z}{\alpha_R-1} + \frac{R_S}{\alpha_R-1},$$

$$l_R = \frac{\beta_R X_f}{\alpha_X(\alpha_R-1)} + \frac{\beta_R Y_f}{\alpha_Y(\alpha_R-1)} + \frac{\beta_R R_Z}{\alpha_R-1} + \frac{\beta_R R_S}{\alpha_R-1} = \frac{\beta_R X}{\alpha_X(\alpha_R-1)} + \frac{\beta_R Y_g}{\alpha_Y(\alpha_R-1)} + \frac{\beta_R R_Z}{\alpha_R-1} + \frac{\beta_R(1-\Gamma)l}{\beta_S(\alpha_r-1)},$$

здесь учтено, что $R_S = l_S/\beta_S = (1-\Gamma)\, l/\beta_S$, $Y_f = Y_g$, индекс f у X опущен.

Считая, что Γ – функция именно π, а не просто y_g, можно записать для случая стационарного режима: $l_g = l_R + l_X + l_Y = \Gamma\, l$, $l_S = (1-\Gamma)\, l$, l – общая численность занятых в производстве. Учитывая, что при фиксированном значении X будет фиксированной и величина l_X, получаем: $l_R + l_Y = \Gamma\, l - l_X$ или

$$\Gamma l - l_X = \frac{\beta_R X}{\alpha_X(\alpha_R-1)} + \frac{\beta_R Y_g}{\alpha_Y(\alpha_R-1)} + \frac{\beta_R R_Z}{\alpha_R-1} + \frac{\beta_R(1-\Gamma)l}{\beta_S(\alpha_R-1)} + \frac{\beta_Y Y_g}{\alpha_Y},$$

что позволяет найти

$$Y_g = A_g\Gamma - B_g,$$

где $$A_g = \frac{\alpha_Y(\beta_R+\beta_s(\alpha_R-1))\, l}{\beta_S(\beta_R+\beta_Y(\alpha_R-1))} > 0,$$

$$B_g = \frac{\alpha_Y(\alpha_X\beta_R l + \beta_S\beta_R X + \alpha_X\beta_S\beta_R R_Z + \alpha_X\beta_S(\alpha_R-1)l)}{\alpha_X\beta_S(\beta_R+\beta_Y(\alpha_R-1))} > 0.$$

Пусть на внешнем рынке имеет место: $P_{SY}\, Y_S = P_{SR}\, R_S$, где P_{SY}, P_{SR} – цены на соответствующие товары, установившиеся на внешнем рынке (т.е. рассматривается ситуация «банального» бартерного обмена). В этом случае имеем следующее выражение для объема импортируемого личного потребления:

$$Y_S = \frac{P_{SR}}{P_{SY}} R_S = \frac{P_{SR}}{P_{SY}}\frac{l_S}{\beta_S} = \frac{P_{SR}(1-\Gamma)\, l}{P_{SY}\beta_S} = -A_S\Gamma + A_S,$$

где $$A_S = \frac{P_{SR}\, l}{\beta_S P_{SY}}.$$

Для удельного потребления получаем

$$y_g = \frac{Y_g + Y_S}{l_g + \pi\, l_S} = \frac{A_g\Gamma - B_g - A_S\Gamma + A_S}{\Gamma l + \pi(1-\Gamma)l} = \frac{A\Gamma + B}{(\Gamma + \pi(1-\Gamma))l}$$

новые обозначения имеют следующий смысл: $A = A_g - A_S$, $B = B_S - B_g$.

Для дальнейшего изложения нам потребуются два простых результата.

Лемма 1. *При* $\Gamma \in (0;\, 1)$ *верны следующие неравенства:* $A + B > 0$, $A_g > B_g$ *и* $A\Gamma + B > 0$.

Если π_g – решение уравнения $\frac{dy_g}{d\pi} = 0$, а π_S – решение уравнения $\frac{dy_S}{d\pi} = 0$, то справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Если максимумы функций y_S и y_g существуют и единственны при допустимых π, то имеет место рост y_S, в то время как рост y_g уже закончился.*

В силу леммы 2 получается, что π_S должно быть больше, чем π_g, поскольку y_S еще растет, когда y_g уже расти перестала (конечно, если у последней функции есть максимум).

Проведем несложный анализ, в котором учтено, что при $y_S = \pi\, y_g$ будет $\frac{dy_S}{d\pi} = y_g + \pi \frac{dy_g}{d\pi}$ (далее «$'$» обозначает операцию дифференцирования по π):

$$\begin{cases} y_g' \ge 0 \\ y_s' \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_g' \ge 0 \\ y_g' \ge -\dfrac{y_g}{\pi} \end{cases}$$

т.е. при $y_g' > 0$ (это значит, при $\pi < \pi_g$) с ростом π будут расти обе величины y_g, y_S.

Если имеет место $\begin{cases} y_g' < 0 \\ y_S' < 0 \end{cases}$, то должно быть:

$$\begin{cases} y_g' < 0, \\ y_g' < -\dfrac{y_g}{\pi}, \end{cases}$$

т.е. при $y_g' < -\frac{y_g}{\pi}$ (т.е. при $\pi > \pi_S$) с ростом π будут падать y_g, y_S. Аналогично рассуждая, получаем, что при $y_g' \in \left[-\frac{y_g}{\pi}; 0\right)$, т.е. при $\pi \in (\pi_g; \pi_S)$ с ростом π будет падать y_g и расти y_S.

И наконец, не может быть так, чтобы y_g росло, а y_S падало (формально не может быть одновременно $y_g' \ge 0$, $y_g' < -\frac{y_g}{\pi}$ при одном и том же π).

Таким образом, для значений величины π потенциально могут существовать такие интервалы, внутри которых имеет место вполне определенные пропорции между изменениями y_g, y_S.

Согласно лемме 2 рост y_g (если он возможен) заканчивается раньше, чем рост y_S. Поэтому интересно получить ответы на следующие вопросы. Как ведет себя y_g при изменении π? Можно ли за счет экспортно-импортных операций увеличить удельное личное потребление y_g? Какая ситуация $\pi_g > 1$ или $\pi_g < 1$ – при этом будет иметь место? Насколько для всех субъектов системы каждая из ситуаций выгодна или хотя бы приемлема? Внимание к величине y_g объясняется именно тем, что она – меньшая из двух величин задающих удельные личные потребления.

Формально производная от y_g по π равна:

$$y_g' = \frac{(A\pi + B\pi - B)\Gamma' + A\Gamma^2 + B\Gamma - A\Gamma - B}{l\left(\Gamma + (1-\Gamma)\pi\right)^2},$$

где Γ' – производная функции Γ по π, а величины A, B определены выше.

Поскольку при $\pi \notin (\pi_b; \pi_e)$, имеем $\Gamma = \text{const}$, то $\Gamma' = 0$ в этих областях. На концах допустимой области значений π знак y_g' определяется знаком выражения $A\,\Gamma^2 + B\,\Gamma - A\,\Gamma - B$. В силу леммы 1 имеем $A\,\Gamma + B > 0$. Поэтому при $\Gamma < 1$: $A\,\Gamma^2 + B\,\Gamma - A\,\Gamma - B = (A\,\Gamma + B)\,(\Gamma - 1) < 0$. Это означает, что если $\pi \notin (\pi_b; \pi_e)$, то функция y_g – убывает. Отсюда следует, что, во-первых, при $\pi \notin (\pi_b; \pi_e)$ максимальное значение y_g имеет тогда, когда $\pi = 0$: $\max y_g = y_g(0) = \dfrac{A\Gamma_M + B}{l\,\Gamma_M}$. Во-вторых, если соотношение $y_g(\pi) > y_g(0)$ имеет место при каких-то значениях π, то для этих значений должно выполняться неравенство $\pi > \pi_b > 1$. В-третих, при $\pi > 0$ функция y_g – непрерывная, вне интервала $(\pi_b; \pi_e)$ она убывает, поэтому для того, чтобы при $\pi \in (\pi_b; \pi_e)$ оказалось $y_g(\pi) > y_g(0)$, прежде всего необходим рост $y_g(\pi)$ внутри этого интервала, т.е. чтобы при каких-то значениях π имело место $y'_g > 0$.

Лемма 3. *Для того, чтобы при* $\pi \in (\pi_b; \pi_e)$ *имело место неравенство* $y'_g > 0$, *необходимо выполнение условий* $A < 0$ *и* $B > 0$.

Для получения ответа на вопрос об условиях существования ситуации $y_g(\pi) > y_g(0)$, найдем необходимые условия, при которых имеет место соотношение $y_g(\pi) \le y_g(0)$. Невыполнение этих условий дает достаточные условия для того, чтобы имело место желаемое неравенство противоположного знака.

Лемма 4. *Пусть при* $A < 0$, $B > 0$ *есть некоторая область значений* π, *в которой функция* $\Gamma(\pi)$ *меняется таким образом, что* $\Gamma(\pi) < 1 - \dfrac{B(1-\Gamma_M)}{B - \pi(A\Gamma_M + B)}$. *Тогда в этой области имеет место неравенство* $y_g(\pi) > y_g(0)$.

В лемме 4 фигурировали условия $A = A_g - A_S < 0$, $B = A_S - B_g > 0$. Эти необходимые условия означают, что должно выполняется условие $A_S > \max\{A_g; B_g\} = A_g$, последнее равенство – это лемма 1. Подробная запись, приведенного неравенства имеет вид:

$$\frac{P_{SR}}{P_{SY}} > \frac{\alpha_Y\left(\beta_R + \beta_S(\alpha_R - 1)\right)}{\beta_R + \beta_Y(\alpha_R - 1)}.$$

Таким образом, возможность улучшения значения величины удельного личного потребления в g-экономике связана с:

конъюнктурой на внешнем рынке (с соотношением цен на экспортируемый ресурс и импортируемый потребительский продукт);

технологическими возможностями системы (т.е. со значениями соответствующих коэффициентов, параметров модели);

со склонностью людей работать внутри системы в определенном диапазоне значений соотношения зарплат в двух экономиках (т.е. связана с поведением функции $\Gamma(\pi)$, причем, «слабая» склонность прельщаться более высокой зарплатой не дает возможность людям увеличить свое удельное личное потребление за счет импорта).

На рис. 3 показано поведение функций y_g, y_S. Из рисунка видно, что, во-первых, функция y_g имеет в интересующей нас ситуации глобальный максимум, следовательно естественно ожидать, что занятые в g-экономике стремятся к нему, соглашаясь на соотношение зарплат $\pi_g > 1$. Во-вторых, в s-экономике движение к максимуму от соотношения зарплат $\pi = 1$ происходит при более высокой зарплате (т.е. в сфере экспортно-импортных операций) и при более высоком уровне удельного личного потребления. Поэтому мы и уделяли такое внимание величине y_g (как меньшей из двух величин y_g, y_S), именно поэтому фактически речь шла об оптимизационной задаче максимизации минимальной из двух указанных величин.

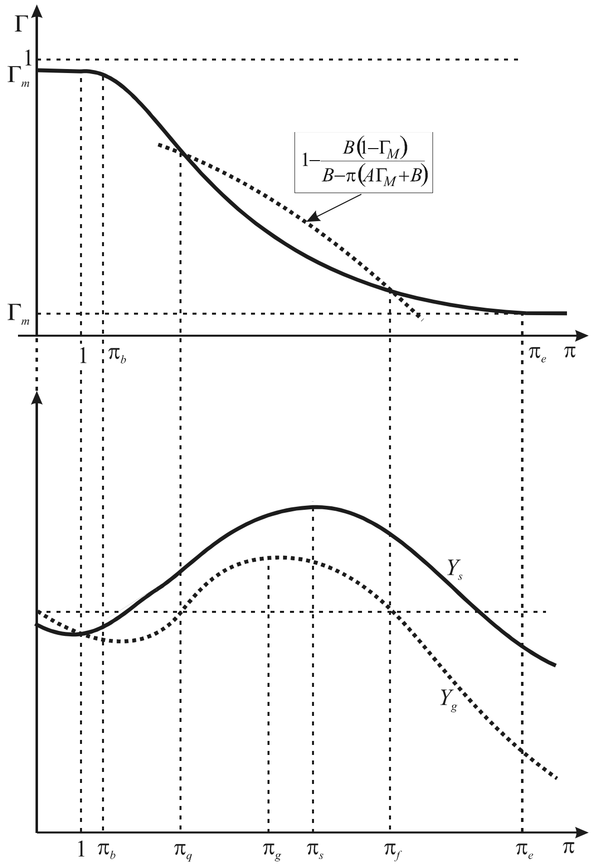

Рис. 3. Соотношение величин y_g, y_S

Наконец, согласно лемме 2, и при достижении $\max y_g$ (после достижения величиной π значения π_g) работники S-экономики «совсем не против» дальнейшего увеличения своей зарплаты до величины π_S, поскольку имеют возможность вместе с нею увеличить и свое удельное личное потребление до максимально возможной, максимально доступной для них, величины.

Все результаты, полученные ранее, можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 5 (теорема о несправедливости). *При выполнении комплекса условий, рассмотренных в леммах 1–4, в g-экономике достижим такой уровень удельного личного потребления, который будет выше, чем в отсутствии импортного продукта, причем максимальный уровень потребления при благоприятных обстоятельствах соответствует соотношению зарплат* $\pi_g > 1$. *В этом случае* ($\pi = \pi_g$) *зарплата и уровень удельного личного потребления в S-экономике оказываются еще не максимально возможными, но выше, чем в g-экономике.*

Таким образом, при благоприятных условиях стремление установить справедливость по принципу «всем поровну» (реализация ситуации, при которой $\pi = 1$) означает лишь уменьшение величины удельного личного потребления у всех агентов экономического процесса. На практике это означает, что «безусловно несправедливой» является ситуация, при которой $\pi > \pi_g$. В подобном случае интересы занятых в g-экономике приносятся в жертву ради интересов тех, кто занят в экспортно-импортных операциях.

При отсутствии благоприятных для системы в целом условий экспортно-импортных операций, которые описаны выше, получается, что $y'_g < 0$ при всех допустимых значениях π. Внешнеторговая деятельность оказывается выгодной (и то лишь при $\pi > 1$) только для тех, кто ею занимается, а в g-экономике последствия этой деятельности – плохие, и тем они хуже, чем больше π.

Заключение

В статье анализируется определенная ситуация, которая имеет место в экономической реальности. Такой анализ является необходимым шагом, предшествующим переходу к соответствующей оптимизационной задаче. В результате было несколько утверждений, сформулированных в виде соответствующих теорем.

В работе рассмотрен вопрос о формировании цены на потребительский товар личного пользования для случая, когда есть поток аналогичного импортного товара и когда работники имеют возможность свободного маневра, предлагая свой труд. Как оказалось, и это соответствует экономической реальности, цены на отечественный и импортный товар имеют тенденцию выравниваться.

Подробно рассмотрен вопрос о соотношении зарплат во «внутреннем» производстве и в сфере экспортно-импортных операций. Рассмотрение этого вопроса также проведено с учетом возможности свободного перетока труда в условиях открытости системы, в силу чего зарплаты оказываются связанными не только с технологическими параметрами модели. Показано, что уровни потребления работников производственных секторов и работников экспортно-импортной сферы находятся в конфликтном отношении; показано, кто оказывается в выигрыше и насколько этот выигрыш является объективной закономерностью. При определенных благоприятных условиях импорт личного потребления может быть выгоден для всех участников производственной деятельности. Этот результат сформулирован в виде «теоремы о несправедливости», поскольку даже при благоприятном стечении обстоятельств и честной игре имеет место неравенство величин удельных потреблений в различных секторах макроэкономической системы.

Упрощающие допущения, сделанные при описании функционирования системы, носят технический характер, именно поэтому полученные результаты соответствуют общеизвестной повседневной практике.

Приложение

Доказательство теоремы 1

При $\varepsilon_g = \varepsilon_f$ получаем

$$y_g\left(\varepsilon_f, \varepsilon_S\right) = \frac{\varepsilon_f Y_g}{\varepsilon_f l_g + \pi\ l_S \varepsilon_S} + \\ + \frac{\left(1-\varepsilon_f\right) Y_S}{\left(1-\varepsilon_f\right) l_g + \left(1-\varepsilon_S\right) \pi\, l_S},$$

значит, $y_g(\varepsilon_f, \varepsilon_S)$ имеет вид

$$y_g = \frac{a}{b + c\,\varepsilon_S} + \frac{d}{p - q\,\varepsilon_S},$$

где a, b, c, d, p, q – положительные константы. Таким образом, в сечениях $\varepsilon_g = \varepsilon_f$ функция $y_g(\varepsilon_f, \varepsilon_S)$ задает поверхность, вогнутую вниз. Аналогичные рассуждения приводят к заключению о том, что поверхности $y_g(\varepsilon_g, \varepsilon_f)$ и $y_S(\varepsilon_f, \varepsilon_S)$ – выпуклые, а $y_S(\varepsilon_g, \varepsilon_f)$ – вогнутая.

Стандартное исследование функций y_g, y_S приводит к следующим результатам. Если выполнены необходимые условия (частные производных первого порядка равны нулю), то из $\frac{\partial y_g}{\partial \varepsilon_g} = 0$ следует, что

$$\varepsilon_s Y_g\left(l_g + \pi\ l_S\right)\left(\left(1 - 2\varepsilon_g\right) l_g + \pi\left(1 - 2\varepsilon_S\right) l_S\right) + \\ + \left(\varepsilon_g l_g + \pi \varepsilon_S l_S\right)^2 \left(\varepsilon_S Y_g - \left(1 - \varepsilon_S\right) Y_S\right) = 0,$$

а из $\dfrac{\partial y_g}{\partial \varepsilon_S} = 0$ следует, что

$$\varepsilon_g Y_g \left(l_g + \pi\, l_S\right)\left(\left(1-2\varepsilon_g\right)l_g + \pi\left(1-2\varepsilon_S\right)l_S\right) + \left(\varepsilon_g l_g + \pi\, \varepsilon_S l_S\right)^2 \left(\varepsilon_g Y_g - \left(1-\varepsilon_g\right)Y_S\right) = 0.$$

Это означает, что, во-первых, должно быть $\varepsilon_g = \varepsilon_S$ (для такого заключения достаточно уединить каждое из «больших» слагаемых в обоих уравнениях и поделить одно уравнение на другое), и, во-вторых, что можно найти из любого уравнения, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = Y_g/(Y_g + Y_S)$. Тот же самый результат (равенство долей ε_g, ε_S и те же значения ε_1, ε_2, ε_3) дает рассмотрение уравнений $\dfrac{\partial y_S}{\partial \varepsilon_g} = 0$ и $\dfrac{\partial y_S}{\partial \varepsilon_S} = 0$.

В вершинах квадрата $\varepsilon_g = \varepsilon_S = 0$ и $\varepsilon_g = \varepsilon_S = 1$ максимумов нет (этот вопрос обсуждался перед тем, как была сформулирована данная теорема). А вот при $\varepsilon_g = \varepsilon_S = \varepsilon^* = Y_g / (Y_g + Y_S)$ возможно наличие экстремумов y_g, y_S.

Как известно для функции двух переменных при проверке на экстремум надо определить знак выражения

$$D_g = \frac{\partial^2 y_g}{\partial \varepsilon_g^2} \times \frac{\partial^2 y_g}{\partial \varepsilon_S^2} - \left(\frac{\partial^2 y_g}{\partial \varepsilon_g \partial \varepsilon_S}\right)^2$$

и знак аналогичной величины D_S. При положительности этих величин (и только в этом случае) функции $y_g(\varepsilon_g, \varepsilon_S)$, $y_S(\varepsilon_g, \varepsilon_S)$ будут иметь экстремумы в соответствующих точках.

После несложных преобразований получается, что

$$\frac{\partial^2 y_g}{\partial \varepsilon_g^2} = -2\pi\, l_S l_g \left\{ \frac{\varepsilon_S Y_g}{\left(\varepsilon_g l_g + \pi\, \varepsilon_S\, l_S\right)^3} + \frac{\left(1-\varepsilon_S\right)Y_S}{\left[\left(1-\varepsilon_g\right)l_g + \left(1-\varepsilon_S\right)\pi\, l_S\right]^3} \right\} < 0,$$

в то время как

$$\frac{\partial^2 y_g}{\partial \varepsilon_S^2} = 2\pi^2 l_S^2 \left\{ \frac{\varepsilon_g Y_g}{\left(\varepsilon_g l_g + \pi \varepsilon_S l_S\right)^3} + \frac{\left(1-\varepsilon_g\right)Y_S}{\left[\left(1-\varepsilon_g\right)l_g + \left(1-\varepsilon_S\right)\pi\, l_S\right]^3} \right\} > 0,$$

что окончательно дает: $D_g < 0$.

Аналогично выясняется, что и $D_S < 0$. Это означает, что при $\varepsilon_g = \varepsilon_S = \varepsilon^*$ экстремума нет. Учитывая поведение поверхностей $y_g(\varepsilon_g, \varepsilon_S)$, $y_S(\varepsilon_g, \varepsilon_S)$ в сечениях, заключаем, что каждая поверхность имеет характер седла (рис. 4) с вершиной в точке $\varepsilon_g = \varepsilon_S = \varepsilon^* = Y_g / (Y_g + Y_S)$.

Как было выяснено при анализе поведения сечений, они «не совпадают по ориентации»: выпуклость в данном сечении одной из поверхностей соответствует вогнутости в этом же сечении другой. Математически это означает, что росту одной величины соответствует убывание другой, экономически – что интересы сторон оказываются противоположными. В заключение надо отметить, что вдоль прямой $\varepsilon_g = \varepsilon_S$ будет $y_g = \text{const}$, $y_S = \text{const}$, в то время как вдоль прямой $\varepsilon_g + \varepsilon_S = 2\, Y_g / (Y_g + Y_S)$, проходящей через вершину седла $\varepsilon_g = \varepsilon_S = \varepsilon^*$ и ортогональной прямой $\varepsilon_g = \varepsilon_S$, постоянства y_g и y_S, как можно убедиться непосредственной проверкой, в общем случае нет. На этом доказательство теоремы 1 завершается. ■

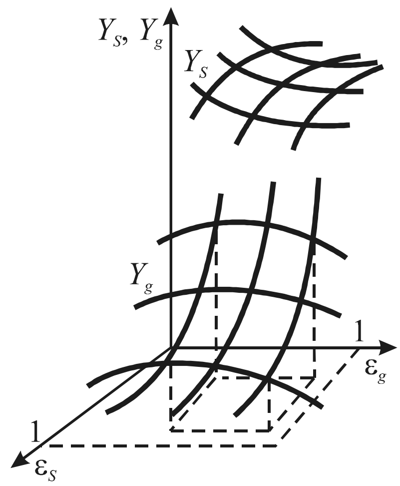

Рис. 4. Качественный вид поверхностей уровней удельного личного потребления

Доказательство теоремы 2

Пусть $\varepsilon_g = \varepsilon_S \neq \varepsilon^*$. Тогда имеем следующие соотношения:

$$C_{gY} = \frac{\varepsilon\left(\omega_g l_g + \omega_S l_S\right)}{Y_g},$$

$$C_{SY} = \frac{(1-\varepsilon)\left(\omega_g l_g + \omega_S l_S\right)}{Y_S}, \quad \frac{C_{gY}}{C_{SY}} = \frac{\varepsilon Y_S}{(1-\varepsilon)Y_g}.$$

Как легко увидеть при $\varepsilon_g = \varepsilon_S \neq \varepsilon^*$ будет $C_{gY} \neq C_{SY}$.

В общем случае при $\varepsilon_g = \varepsilon^* + \delta_g$ и $\varepsilon_S = \varepsilon^* + \delta_S$ цены примут значения:

$$C_{gY} = \frac{\omega_g l_g + \omega_S l_S}{Y_g + Y_S} + \frac{\delta_g \omega_g l_g + \delta_S \omega_S l_S}{Y_g},$$

$$C_{SY} = \frac{\omega_g l_g + \omega_S l_S}{Y_g + Y_S} - \frac{\delta_g \omega_g l_g + \delta_S \omega_S l_S}{Y_S}.$$

Пусть $\Delta = \delta_g\, \omega_g\, l_g + \delta_S\, \omega_S\, l_S$, тогда цены при отклонении ε_g, ε_S от ε^* можно вычислять в виде: $C_{gY} = C^*_{gY} + \Delta / Y_g$, $C_{SY} = C^*_{SY} - \Delta / Y_S$, где, как было показано раньше, $C^*_{gY} = C^*_{SY} = \dfrac{\omega_g l_g + \omega_S l_S}{Y_g + Y_S}$. Таким образом, соотношение цен C_{gY}, C_{SY} и C^* зависит от знака Δ, одна из двух цен обязательно больше другой при $\Delta \neq 0$, что и требовалось доказать. ■

Доказательство теоремы 3

Случай $\Delta = 0$, как это сразу видно из приведенных выше выражений для цен $C_{gY} = C^*_{gY} + \Delta / Y_g$, $C_{SY} = C^*_{SY} - \Delta / Y_S$, означает, что $C_{gY} = C_{SY} = C^*$. А поскольку $\delta_g = \varepsilon_g - \varepsilon^*$, $\delta_S = \varepsilon_S - \varepsilon^*$, то в случае $\Delta = 0$: $(\varepsilon_g - \varepsilon^*)\, \omega_g\, l_g + (\varepsilon_S - \varepsilon^*)\, \omega_S\, l_S = 0$, следовательно

$$\varepsilon_S = -\frac{l_g}{\pi\, l_S}\varepsilon_g + \frac{\varepsilon^*\left(l_g + \pi\, l_S\right)}{\pi\, l_S},$$

т.е. вдоль прямой, задаваемой полученным уравнением (ее положение для одного из случае показано на рис. 5), цены в экономиках одинаковы и равны C^*. Кроме того, вдоль этой прямой после понятных преобразований получается:

$$y_g\left(\varepsilon_g;\; -\frac{l_g}{\pi l_S}\varepsilon_g + \frac{\varepsilon^*\left(l_g + \pi l_S\right)}{\pi\, l_S}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_g Y_g}{\varepsilon_g l_g + \pi\;\; l_S\left(-\dfrac{l_g}{\pi\, l_S}\varepsilon_g + \dfrac{\varepsilon^*\left(l_g + \pi\, l_S\right)}{\pi\, l_S}\right)} +$$

$$+ \frac{\left(1-\varepsilon_g\right)Y_S}{\left(1-\varepsilon_g\right)l_g + \left(1 + \dfrac{l_g}{\pi\, l_S}\varepsilon_g - \dfrac{\varepsilon^*\left(l_g + \pi\, l_S\right)}{\pi\, l_S}\right)\pi\, l_S} = y_g^*$$

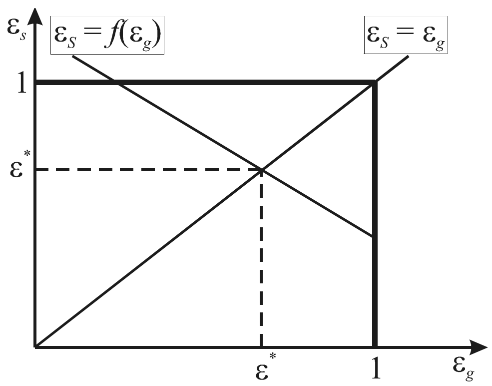

Рис. 5. Расположение равноценной прямой

$$\varepsilon_S = -\frac{l_g}{\pi\, l_S}\varepsilon_g + \frac{\varepsilon^*\left(l_g + \pi\, l_S\right)}{\pi\, l_S}$$

и $$y_S\left(\varepsilon_g;\ -\frac{l_g}{\pi l_S}\varepsilon_g + \frac{\varepsilon^*\left(l_g + \pi\, l_S\right)}{\pi\, l_S}\right) = y_S^*.$$

На основании всей совокупности полученных результатов можно заключить, что точка $\varepsilon_g = \varepsilon_S = \varepsilon^*$ является седловой точкой каждой из поверхностей y_g, y_S. Важно, что у обеих поверхностей седловая точка одна и та же.

Равноценная прямая пересекает какие-либо грани (например $\varepsilon_g = 1$ и $\varepsilon_S = 1$), поверхности на этих гранях непрерывны, поэтому на этих гранях как y_g, так и y_S должны принимать значения y_g^* и y_S^* соответственно. Отметим, что если $l_g = \pi\, l_S$, то найденная прямая будет ортогональна прямой $\varepsilon_g = \varepsilon_S$. На этом доказательство теоремы 3 заканчивается. ■

Доказательство теоремы 4

Если равноценная прямая проходит через вершину (1; 0), то

$$\varepsilon_S(1) = -\frac{l_g}{\pi\, l_S} + \frac{\varepsilon^*\left(l_g + \pi\, l_S\right)}{\pi\, l_S} = 0 \quad \text{или}$$

$(1 - \varepsilon^*)\, l_g = \varepsilon^*\, \pi\, l_S$,

откуда при $\varepsilon^* = Y_g / (Y_g + Y_S)$ находим: $Y_g / l_g = Y_S / \pi\, l_S$. В левой части последнего равенства стоит величина $y_g(1; 0)$. В тоже время, в правой части равенства соответствующая величина $y_S(1; 0)$ получается только при $\pi = 1$. Поэтому приведенное условие $\pi = 1$ является необходимым для того, чтобы равноценная прямая проходила через вершину (1; 0).

Но условие $\pi = 1$ является и достаточным для прохождения равноценной прямой через вершину (1; 0). При выполнении этого условия для равноценной прямой имеем при $\varepsilon_g = 1$, $\pi = 1$:

$$\varepsilon_S = -\frac{l_g}{\pi\, l_S}\varepsilon_g + \frac{\varepsilon^*\left(l_g + \pi\, l_S\right)}{\pi\, l_S} = \frac{-l_g Y_S + l_S Y_g}{l_S\left(Y_g + Y_S\right)}.$$

Для вершины (1; 0), которая одновременно является и точкой на равноценной прямой, должно иметь место:

$$y_S(1; 0) = \frac{Y_S}{l_S} = \frac{Y_g + Y_S}{l_g + l_S} = \frac{\pi\left(Y_g + Y_S\right)}{l_g + \pi\, l_S} = y_S^*$$

при $\pi = 1$.

После понятных преобразований получаем $Y_g\, l_S = Y_S\, l_g$, что при $\varepsilon_g = 1$, $\pi = 1$ влечет $\varepsilon_S = 0$.

Аналогично выясняется, что условие $\pi = 1$ является необходимым и достаточным для того, чтобы равноценная прямая проходила через вершину (0; 1).

В результате получаем, что при $\pi = 1$ равноценная прямая должна проходить через обе вершины (0; 1) и (1; 0), т.е. должна быть диагональю квадрата. Но для этого одновременно необходимо должны выполняться еще и следующие два условия:

1) $l_g = l_S$ (только в этом случае возможна перпендикулярность диагоналей),

2) $Y_g = Y_S$ (только в этом случае возможно необходимое равенство $\varepsilon^* = 0{,}5$).

Ясно, что выполнение условий $\pi = 1$, $l_g = l_S$, $Y_g = Y_S$ дает требуемый результат. ■

Доказательство леммы 1

При естественном условии $Y_g > 0$ имеем $Y_g = A_g\,\Gamma - B_g > 0$, откуда при $\Gamma < 1$, получаем $A_g - B_g > A_g\,\Gamma - B_g > 0$, следовательно, должно быть $A_g > B_g$. В силу того, что $A_g - B_g > 0$ получаем: $A + B = A_g - B_g > 0$. Более того. Рассмотрим выражение $A\,\Gamma + B$. Сделав необходимые преобразования находим, что

$$A\,\Gamma + B = \left(A_g\Gamma - B_g\right) + A_S\left(1 - \Gamma\right) > 0,$$

поскольку положительность первого слагаемого – необходимое условие положительности Y_g, а второе слагаемое всегда положительно, так как всегда $A_S > 0$ и $\Gamma < 1$. ■

Доказательство леммы 2

Если указанные функции имеют максимумы, и у каждой из них он единственный, то можно провести следующее рассуждение. Для $y_S = \pi\, y_g$ получается $\dfrac{dy_S}{d\pi} = y_g + \pi\dfrac{dy_g}{d\pi}$, что дает

$$\left.\frac{dy_S}{d\pi}\right|_{\pi_g} = y_g\left(\pi_g\right) + \pi_g \left.\frac{dy_g}{d\pi}\right|_{\pi_g} = y_g\left(\pi_g\right) > 0.$$

Значит y_S еще растет, когда y_g расти уже закончила. ■

Доказательство леммы 3

Как уже говорилось, в силу леммы 1 имеем $A\,\Gamma + B > 0$. Поэтому при $\Gamma < 1$ всегда будет иметь место:

$A\,\Gamma^2 + B\,\Gamma - A\,\Gamma - B = (A\,\Gamma + B)\,(\Gamma - 1) < 0.$

Вследствие этого с необходимостью должно иметь место неравенство $\left(A\,\pi + B\,\pi - B\right)\Gamma' > 0,$ так как невыполнение этого условия делает невозможным получение неравенства $y_g' > 0.$ Поскольку $\Gamma' < 0,$ то для выполнения только что указанного условия $\left(A\,\pi + B\,\pi - B\right)\Gamma' > 0,$ с необходимостью должно выполняться неравенство $(A + B)\,\pi - B < 0$. Тогда $\pi < B(A + B)$, причем указанный знак неравенства – непременно такой, поскольку по лемме 1 всегда имеем $A + B > 0$ и при делении на положительное число знак неравенства сохранится при любом B.

Но при $B < 0$ получающиеся значения π будут отрицательными, что не приемлемо в силу экономического смысла этой величины. Значит следующим необходимым условием существования допустимого решения уравнения является условие $B = A_S - B_g > 0$ или $A_S > B_g$. Поскольку рассматривается случай $\pi > 1$, то с необходимостью должно быть $B > A + B$, что влечет $A < 0$. ■

Доказательство леммы 4

Рассмотрим три возможности:

1) $B - \pi\left(A\Gamma_M + B\right) < 0;$

2) $B - \pi\left(A\Gamma_M + B\right) \geq 0;$

$B\Gamma_M - \pi\left(A\Gamma_M + B\right) \leq 0;$

3) $B\Gamma_M - \pi\left(A\Gamma_M + B\right) > 0.$

В первом случае в силу положительности величин B и $\pi(A\,\Gamma_M + B)$ получаем, что

$B\Gamma_M - \pi(A\Gamma_M + B) < 0$ и $\pi > \dfrac{B}{A\Gamma_M + B}$.

Предположим, что в этом случае имеет место соотношение $\dfrac{A\Gamma + B}{\Gamma + \pi(1-\Gamma)} \geq \dfrac{A\Gamma_M + B}{\Gamma_M}$

при некоторых значениях $\pi > \dfrac{B}{A\Gamma_M + B}$.

Тогда

$\Gamma\left[B - \pi(A\Gamma_M + B)\right] \leq B\Gamma_M - \pi(A\Gamma_M + B)$,

что в данном случае при

$B - \pi(A\Gamma_M + B) < 0$ и $B\Gamma_M - \pi(A\Gamma_M + B) < 0$

дает: $\Gamma \geq \dfrac{B\Gamma_M - \pi(A\Gamma_M + B)}{B - \pi(A\Gamma_M + B)} > 1.$

Поскольку при всех допустимых π имеем $\Gamma < 1$, то из полученного противоречия заключаем, что при $\pi > \dfrac{B}{A\Gamma_M + B}$ не может быть $\dfrac{A\Gamma + B}{\Gamma + \pi(1-\Gamma)} \geq \dfrac{A\Gamma_M + B}{\Gamma_M}$, т.е. для указанных значений π должно иметь место:

$$y_g(\pi) = \frac{A\Gamma + B}{\Gamma + \pi(1-\Gamma)} < \frac{A\Gamma_M + B}{\Gamma_M} = y_g(0)$$

при любой зависимости $\Gamma(\pi)$.

Во втором случае, когда $B - \pi(A\Gamma_M + B) \geq 0$, $B\Gamma_M - \pi(A\Gamma_M + B) \leq 0$ и $\pi \in \left[\dfrac{B\Gamma_M}{A\Gamma_M + B};\ \dfrac{B}{A\Gamma_M + B}\right]$ из предположения о том, что $y_g(\pi) > y_g(0)$ получаем:

$\Gamma\left[B - \pi(A\Gamma_M + B)\right] < B\Gamma_M - \pi(A\Gamma_M + B)$.

В левой части этого неравенства стоит неотрицательная величина, в то время как правая часть – величина неположительная, и обе эти величины – ненулевые. В силу полученного противоречия надо заключить, что и в указанном диапазоне значений π должно иметь место соотношение $y_g(\pi) \leq y_g(0)$.

Наконец, рассмотрим третий случай, когда имеет место следующее неравенство: $B\Gamma_M - \pi(A\Gamma_M + B) > 0$. В этом случае получаем, во-первых, $\pi \in \left(\pi_b;\ \dfrac{B\Gamma_M}{A\Gamma_M + B}\right)$, а, во-вторых, в силу положительности B еще имеет место и неравенство $B - \pi(A\Gamma_M + B) > 0$.

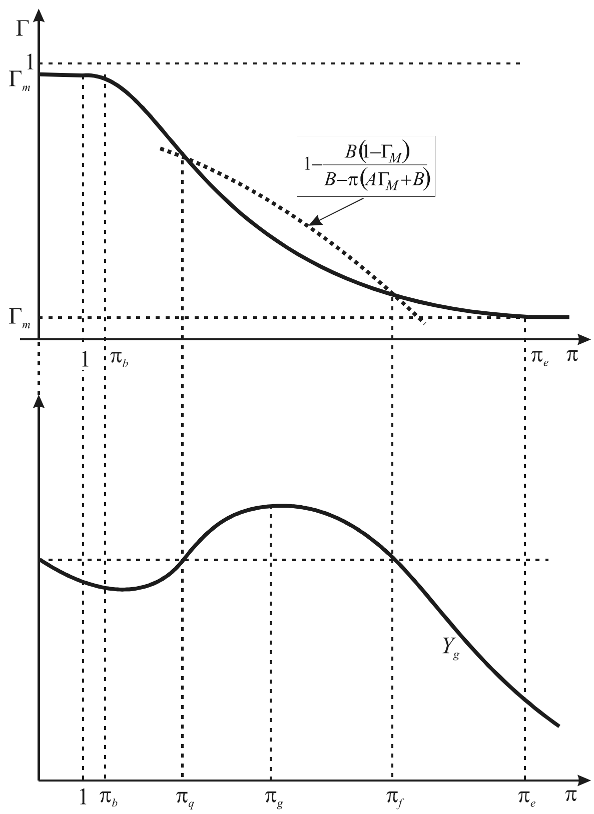

Рис. 6. Возможность получения $y_g(\pi) > y_g(0)$

Предположим, что имеется соотношение $y_g(\pi) \le y_g(0)$ при $\forall\pi$ из рассматриваемого интервала. Последнее нестрогое неравенство в развернутом виде можно записать так:

$$\frac{A\Gamma + B}{\Gamma + \pi(1-\Gamma)} \le \frac{A\Gamma_M + B}{\Gamma_M} \quad \text{при } \pi > \pi_b.$$

Числители и знаменатели дробей положительные, поэтому после преобразований получаем

$$\Gamma\left[B - \pi\left(A\Gamma_M + B\right)\right] \ge B\Gamma_M - \pi\left(A\Gamma_M + B\right),$$

откуда находим желаемое необходимое условие:

$$\Gamma \ge \frac{B\Gamma_M - \pi\left(A\Gamma_M + B\right)}{B - \pi\left(A\Gamma_M + B\right)} = 1 - \frac{B\left(1-\Gamma_M\right)}{B - \pi\left(A\Gamma_M + B\right)}.$$

Последнее выражение, как можно убедиться непосредственной проверкой, положительно и меньше Γ_M при рассматриваемых значениях π.

Полученный результат позволяет сделать следующее заключение: если при $A < 0,\ B > 0$ на интервале $\left(\pi_b;\ \dfrac{B\Gamma_M}{A\Gamma_M + B}\right)$ есть область, внутри которой зависимость $\Gamma(\pi)$ такова, что

$$\Gamma(\pi) < 1 - \frac{B\left(1-\Gamma_M\right)}{B - \pi\left(A\Gamma_M + B\right)},$$

то в этой области имеет место $y_g(\pi) > y_g(0)$.

График поведения y_g показан на рис. 6. ■

Литература

1. *Самуэльсон П.* Экономика. М.: Прогресс, 1992.

2. *Гранберг А.Г.* Моделирование социалистической экономики. М.: Экономика, 1988.

3. *Молдашева Г.Б., Петров А.А., Поспелов И.Г.* Математические модели международной торговли и валютного обмена / Модели и алгоритмы программного метода планирования сложных систем / Под ред. А.А. Петрова. М.: ВЦ АН СССР, 1979.

4. *Трояновский В.М.* Качественный анализ величин дохода и прибыли отдельного производителя. Деп. в ВИНИТИ, № 4843-В91, М., 1991.

5. *Трояновский В.М.* Анализ одного выделенного состояния открытой макроэкономической системы. Деп. в ВИНИТИ 28.02.01 525 – В 2001.

Статья поступила в редакцию 22.05.2002 г.