321. Троллейбусы движутся с интервалом 8 мин, поезда метро — с интервалом 2 мин. Определить закон суммарного времени ожидания транспорта случайно выбранным пассажиром, пользующимся, чтобы добраться на работу, троллейбусом и метро (без пересадок в метро).

322. Найти закон распределения суммы двух независимых случайных величин, распределённых по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно.

323. X и Y — независимые случайные величины, распределённые по равномерному закону на отрезке [0; 4]. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $t^2 + Xt + Y = 0$ (относительно t) имеет действительные корни.

Решение. Квадратное уравнение имеет действительные корни, если его дискриминант неотрицателен. Чтобы найти требуемую вероятность, воспользуемся формулой (3.102):

$$\mathbf{P}\{X^2 - 4Y \geq 0\} = \mathbf{P}\left\{Y \leq \frac{X^2}{4}\right\} = \iint\limits_{\substack{y \leq \frac{x^2}{4},\\ 0 \leq x \leq 4,\\ 0 \leq y \leq 4}} \frac{1}{16}dxdy = \frac{1}{16}\int_0^4 \int_0^{\frac{x^2}{4}} dydx = \frac{1}{16}\int_0^4 \frac{x^2}{4}dx = \frac{1}{16 \cdot 4} \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{4} = \frac{1}{3}. \ \square$$

324. Доказать, что если случайные величины $\chi^2_{k_1}$ и $\chi^2_{k_1}$ независимы, то $\chi^2_{k_1} + \chi^2_{k_2} = \chi^2_{k_1+k_2}$.

Глава 4. Предельные теоремы теории вероятностей

§4.1. Неравенства теории вероятностей

При доказательстве многих теорем теории вероятностей и математической статистики используется ряд вспомогательных неравенств[1].

Неравенство Маркова. *Если положительная случайная величина X имеет конечное математическое ожидание $\mathbf{M}X$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\{X \leq \varepsilon\} > 1 - \frac{\mathbf{M}X}{\varepsilon}. \tag{4.1}$$

Неравенство Чебышёва. *Если случайная величина X имеет конечное математическое ожидание $\mathbf{M}X$ и дисперсию $\mathbf{D}X$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| \leq \varepsilon\} > 1 - \frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}. \tag{4.2}$$

Неравенство Йенсена. *Для любой случайной величины X и любой выпуклой [вогнутой] функции $g(x)$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}g(X) \leq g(\mathbf{M}X) \ \text{[соответственно, } \mathbf{M}g(X) \geq g(\mathbf{M}X)\text{]}. \tag{4.3}$$

Неравенство Коши – Буняковского – Шварца. *Для любых случайных величин X, Y справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}|XY| \leq \sqrt{\mathbf{M}X^2}\sqrt{\mathbf{M}Y^2}. \tag{4.4}$$

Неравенство Гёльдера. *Для любых случайных величин X, Y при $\alpha \in (0; 1)$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}|XY| \leq \left(\mathbf{M}|X|^{1/\alpha}\right)^{\alpha}\left(\mathbf{M}|Y|^{1/(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha}. \tag{4.5}$$

---

[1] Впрочем, эти неравенства используются не только в теории вероятностей и математической статистике, но и повсеместно в математике. Читатели наверняка знакомы с большинством из приводимых неравенств из курса математического анализа.

Неравенство Минковского. *Для любых случайных величин X, Y при $r \geq 1$ справедливо неравенство*

$$\left(\mathbf{M}|X+Y|^r\right)^{1/r} \leq \left(\mathbf{M}|X|^r\right)^{1/r} + \left(\mathbf{M}|Y|^r\right)^{1/r}. \qquad (4.6)$$

325. Доказать неравенство Маркова (4.1).

326. Доказать неравенство Чебышёва (4.2).

Доказательство. Проведём доказательство для дискретных случайных величин. В выражении для дисперсии $\mathbf{D}X = \sum_i (x_i - \mathbf{M}X)^2 p_i$ отбросим из суммы те слагаемые, для которых $|x_i - \mathbf{M}X| \leq \varepsilon$: $\mathbf{D}X = \sum_i (x_i - \mathbf{M}X)^2 p_i \geq \sum_{i:|x_i - \mathbf{M}X|>\varepsilon} (x_i - \mathbf{M}X)^2 p_i$. $(x_i - \mathbf{M}X)^2 > \varepsilon^2$, т. е. $\mathbf{D}X \geq \sum_{i:|x_i - \mathbf{M}X|>\varepsilon} (x_i - \mathbf{M}X)^2 p_i > \sum_{i:|x_i - \mathbf{M}X|>\varepsilon} \varepsilon^2 p_i = \varepsilon^2 \sum_{i:|x_i - \mathbf{M}X|>\varepsilon} p_i$.

Но $\sum_{i:|x_i - \mathbf{M}X|>\varepsilon} p_i = \mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| > \varepsilon\}$, поэтому $\mathbf{D}X > \varepsilon^2 \sum_{i:|x_i - \mathbf{M}X|>\varepsilon} p_i = \varepsilon^2 \mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| > \varepsilon\}$, откуда $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| > \varepsilon\} < \dfrac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}$. При этом $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| \leq \varepsilon\} = 1 - \mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| > \varepsilon\} > 1 - \dfrac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}$, что и требовалось доказать. В случае непрерывных случайных величин все суммы заменяются интегралами. ❑

327. Доказать, что если случайная величина X имеет конечное математическое ожидание $\mathbf{M}X$ и дисперсию $\mathbf{D}X$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| > \varepsilon\} \leq \dfrac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}$.

328. Правило трёх сигм. С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| < 3\sigma_X\}$ для произвольной случайной величины с конечным математическим ожиданием и конечной дисперсией.

329. Для новогоднего праздника Петя должен сделать гирлянду из 400 электрических лампочек. Он решает включить их параллельно. Лампочки оказались очень низкого качества — вероятность того, что какая-либо из них погаснет во время праздника, составляет 0,5. С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность того, что число горящих лампочек будет заключено между 100 и 300.

330. Инвестор покупает ценные бумаги за счёт кредита, взятого с процентной ставкой r под залог своей недвижимости. Доходность ценных бумаг X представляет собой случайную величину с математическим ожиданием $a > r$ и средним квадратичным отклонением σ. Оценить вероятность того, что инвестор не сможет вернуть кредит: а) не имея никаких сведений о характере закона распределения случайной величины X, зная только, что она положительна; б) предполагая случайную величину X распределённой по нормальному закону.

331. Сумма всех вкладов в некотором банке составляет 2 000 000 ден. ед., а вероятность того, что случайно взятый вклад не превысит 10 000 ден. ед., равна 0,8. Оценить число вкладчиков банка.

Решение. Пусть n — число вкладчиков, а случайная величина X описывает размер случайно выбранного вклада. Тогда средний размер вклада $\mathbf{M}X = \dfrac{2\,000\,000}{n}$ ден. ед., и по неравенству Маркова $\mathbf{P}\{X \leq 10\,000\} \geq 1 - \dfrac{\mathbf{M}X}{10\,000}$ или $\mathbf{P}\{X \leq 10\,000\} \geq 1 - \dfrac{200}{n}$. Но по условию $\mathbf{P}\{X \leq 10\,000\} = 0{,}8$, откуда $1 - \dfrac{200}{n} \leq 0{,}8$ и, значит, $n \leq 1\,000$ человек. ❑

332. Средние ежедневные расходы на покупку канцелярских принадлежностей для офиса банка составляют 1 000 руб., а среднее квадратичное отклонение этой случайной величины не превышает 200 руб. Оценить вероятность того, что расходы на канцелярские принадлежности в любой наугад выбранный день не превысят 2 000 руб, используя: а) неравенство Маркова; б) неравенство Чебышёва.

333. По статистическим данным в среднем 87% новорождённых доживают до 50 лет (т. е. вероятность дожития до 50 лет равна 0,87). С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность того, что из 1 000 новорождённых доля (относительная частота) доживших до 50 лет будет отличаться от вероятности не более, чем на 0,04 (по модулю).

334. Доказать неравенство Йенсена (4.3).

Доказательство. Так как функция $g(x)$ выпукла, то для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ найдётся такое $l = l(x_0)$, что для всех $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \geq g(x_0) + (x - x_0)l(x_0)$. Подставляем $x_0 = \mathbf{M}x$: $g(x) \geq g(\mathbf{M}x) + (x - \mathbf{M}x)l(\mathbf{M}x)$, откуда, учитывая, что величины $g(\mathbf{M}x)$ и $l(\mathbf{M}x)$ не являются случайными, а $\mathbf{M}(x - \mathbf{M}x) = 0$, получаем $\mathbf{M}g(x) \geq g(\mathbf{M}x)$, что и требовалось. Для вогнутых функций доказательство аналогично. ❑

335. Пусть X — положительная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что $\dfrac{1}{\mathbf{M}X} \leq \mathbf{M}\dfrac{1}{X}$.

336. Доказать неравенство Коши – Буняковского – Шварца (4.4).

337. Доказать неравенство Гёльдера (4.5).

338. Доказать неравенство Минковского (4.6).

339. Доказать, что для любых случайных величин X, Y при $a \leq 1$ справедливо неравенство $\mathbf{M}|X+Y|^a \leq \mathbf{M}|X|^a + \mathbf{M}|Y|^a$.

§4.2. Виды сходимости последовательностей случайных величин

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *сходится почти наверное к случайной величине* X, если

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\} = 1.$$

Сходимость почти наверное обозначается так: $X_n \xrightarrow{\text{п. н.}} X$.

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *сходится по вероятности к случайной величине* X, если для любого $e > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|X_n - X| \leq e\} = 1.$$

Сходимость по вероятности обозначается так: $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$.

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *сходится по распределению* (или *слабо сходится*) *к случайной величине* X, если во всех точках x, в которых функция распределения $F_X(x)$ непрерывна,

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

Сходимость по распределению обозначается так: $X_n \Rightarrow X$ или $X_n \xrightarrow{D} X$.

Примером сходимости по распределению является формула Пуассона (2.12).

Различные виды сходимости обладают следующими свойствами:

$$\text{если } X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X, Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y, \text{ то } X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X + Y, X_n \cdot Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X \cdot Y; \qquad (4.7)$$

$$\text{если } X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X \text{ и } \varphi(x) \text{ — непрерывная функция, то } \varphi(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} \varphi(X); \tag{4.8}$$

$$\text{если } X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} x_0 \text{ и } \varphi(x) \text{ непрерывна в точке } x_0, \text{ то } \varphi(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} \varphi(x_0); \tag{4.9}$$

$$\text{если } X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} x = \text{const}, Y_n \Rightarrow Y, \text{ то } X_n + Y_n \Rightarrow x + Y, X_n \cdot Y_n \Rightarrow x \cdot Y; \tag{4.10}$$

из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности:

$$\text{если } X_n \xrightarrow{\text{п. н.}} X, \text{ то } X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X, \text{ но не наоборот!}; \tag{4.11}$$

из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению:

$$\text{если } X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X, \text{ то } X_n \Rightarrow X; \tag{4.12}$$

из сходимости по распределению к константе следует сходимость по вероятности:

$$\text{если } X_n \Rightarrow x = \text{const}, \text{ то } X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} x; \tag{4.13}$$

Отметим также, что из сходимости по вероятности *не следует* сходимость математических ожиданий, дисперсий и других характеристик.

340. Доказать свойства (4.7) – (4.13).

341. Привести пример такой последовательности случайных величин X_n $(n = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$, чтобы она сходилась по вероятности к некоторой случайной величине X, но при этом $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{M}X_n \neq \mathbf{M}X$.

342. Доказать, что из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности, а обратное утверждение неверно.

§4.3. Теоремы закона больших чисел

Под *законом больших чисел* понимается обобщённое название группы теорем, утверждающих, что при неограниченном увеличении числа испытаний средние величины сходятся (в каком-то из смыслов, рассмотренных в предыдущем параграфе) к некоторым постоянным. Наиболее общей из этих теорем является *теорема Чебышёва*, также называемая просто *законом больших чисел*:

Если дисперсии некоррелированных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ограничены сверху числом B, то для произвольного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i}{n}\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \frac{B}{n\varepsilon^2} \tag{4.14}$$

и предельное равенство

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1, \tag{4.15}$$

т. е. $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i}{n}$.

Законы больших чисел утверждают, что среднее арифметическое случайных величин при возрастании их числа обладает свойством *статистической устойчивости*, т. е. сходится по вероятности к неслучайной величине — среднему арифметическому математических ожиданий этих случайных величин. Практическое применение законов больших чисел состоит в том, что среднее арифметическое, вычисленное по достаточно большому числу результатов измерений какой-либо величины, будет сколь угодно близко к измеряемой величине.

Статистическая устойчивость относительной частоты появления успеха в серии независимых испытаний доказывается в *теореме Бернулли*:

Если вероятность успеха в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, то для произвольного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} = 1, \tag{4.16}$$

где m — число успехов в серии из n испытаний.

Если для некоторой последовательности случайных величин вместо сходимости по вероятности имеет место сходимость почти наверное $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{\text{п. н.}} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i}{n}\right)$, то говорят, что такая последовательность удовлетворяет *усиленному закону больших чисел*.

343. Доказать теорему Чебышёва (4.14) – (4.15).

Доказательство. Очевидно, если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайные величины, то величина $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ также является случайной, причём по свойствам математического ожидания и дисперсии $\mathbf{M}\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i}{n}$, $\mathbf{D}\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}X_i}{n^2}$. Применим к случайной величине $\bar{x}$ неравенство Чебышёва:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i}{n}\right| \le \varepsilon\right\} = \mathbf{P}\{|\bar{x} - \mathbf{M}\bar{x}| \le \varepsilon\} > 1 - \frac{\mathbf{D}\bar{x}}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}X_i}{n^2\varepsilon^2}.$$

Учитывая, что все $\mathbf{D}X_i < B$, получим, что $1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}X_i}{n^2\varepsilon^2} > 1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} B}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \dfrac{nB}{n^2\varepsilon^2}$, т. е. доказана справедливость неравенства (4.14). Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем равенство (4.15). ❑

344. Последовательность некоррелированных случайных величин $X_1, X_2, X_3, \ldots$ определяется по следующему правилу: случайная величина X_i принимает значения $-\sqrt{n}$, 0, $\sqrt{n}$ с вероятностями $\frac{1}{n}$, $1 - \frac{2}{n}$, $\frac{1}{n}$ соответственно. Доказать, что для этой последовательности выполняются условия теоремы Чебышёва.

Доказательство. Условия теоремы Чебышёва выполнены, поскольку $\mathbf{M}X_i = 0$, $\mathbf{D}X_i = 2$. ❑

345. Доказать, что для последовательности некоррелированных случайных величин $X_1, X_2, X_3, \ldots$, определяемых рядом распределения

X_i	$-a$	a
p	$\frac{n+1}{2n+1}$	$\frac{n}{2n+1}$

выполняется усиленный закон больших чисел.

346. Доказать, что для последовательности некоррелированных случайных величин $X_1, X_2, X_3, \ldots$, таких, что $\mathbf{M}X_i = A$, $\mathbf{D}X_i \le B$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, выполняется усиленный закон больших чисел.

347. Для определения среднего дохода налогоплательщиков города налоговой инспекцией была проведена проверка 250 жителей этого города, отобранных случайным образом. Оценить вероятность того, что средний годовой доход жителей города отклонится от среднего арифметического $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{250} X_i}{250}$ годовых доходов выбранных 250 жителей не более, чем на 1 000 руб., если известно, что среднее квадратичное отклонение годового дохода не превышает 2 500 руб.

Решение. Согласно неравенству (4.14), которым можно пользоваться, поскольку все $\mathbf{D}X_i \le (2\,500)^2$, $\mathbf{P}\left\{\left|\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i}{n}\right| \le 1\,000\right\} \ge 1 - \dfrac{2\,500 \cdot 2\,500}{250 \cdot 1\,000 \cdot 1\,000} = 1 - \dfrac{25}{1000} = 0,975$. ❑

348. Доказать теорему Бернулли (4.16).

Доказательство. Рассмотрим альтернативные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, определяемые по следующему правилу: $X_i = \begin{cases} 0, & \text{не произошёл успех в } i\text{-м испытании (с вероятностью } p), \\ 1, & \text{произошёл успех в } i\text{-м испытании (с вероятностью } (1-p)). \end{cases}$

Тогда $\mathbf{M}X_i = p$, $\mathbf{D}X_i = p(1-p)$, $m = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Поскольку $0 \le p \le 1$, дисперсии случайных величин X_i ограничены сверху единицей (так как $\mathbf{D}X_i = p(1-p) \le 1$), и можно воспользоваться теоремой Чебышёва (4.15), согласно которой

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{m}{n} - \frac{np}{n}\right| \le \varepsilon\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i}{n}\right| \le \varepsilon\right\} = 1,$$

что и требовалось доказать. ❑

§4.4. Центральная предельная теорема

Законы больших чисел устанавливают факт приближения среднего значения большого числа случайных величин к некоторым постоянным в виде сходимости последовательностей случайных величин по вероятности и почти наверное. Но этим не ограничиваются закономерности, возникающие в результате суммарного действия случайных величин. Центральная предельная теорема представляет собой группу теорем, утверждающих, что достаточно большая сумма сравнительно малых случайных величин распределена приближённо по нормальному закону.

Рассмотрим последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимых случайных величин, и пусть $\mathbf{M}X_i = a_i$, $\mathbf{D}X_i = \sigma_i^2$, $b_n = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$.

Говорят, что для этой последовательности случайных величин выполняется *условие Линдеберга*, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{|x_i - a_i| > t b_n} (x_i - a_i)^2 f_i(x_i)\,dx_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2} = 0. \qquad (4.17)$$

Приведём строгую формулировку *теоремы Ляпунова*, одной из теорем, носящих название «*центральная предельная теорема*».

Если независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *удовлетворяют условию Линдеберга (4.17), то случайная величина*

$$Z_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mathbf{M}X_i)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{D}X_i}}$$

сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине $N(0;1)$:

$$Z \Rightarrow N(0;1). \qquad (4.18)$$

В практических приложениях важно следующее *следствие из теоремы Ляпунова*:

Если независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют одинаковое распределение с $\mathbf{M}X_i = a$, $\mathbf{D}X_i = \sigma^2$, то

$$Z_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \to \mathrm{N}(0;1), \tag{4.19}$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{1}{2} + \Phi_0(x). \tag{4.20}$$

Пусть $x = \dfrac{u-a}{\sigma/\sqrt{n}}$, тогда согласно следствию (4.20) из теоремы Ляпунова

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} < u\right\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - a}{\sigma/\sqrt{n}} < x\right\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{u-a}{\sigma/\sqrt{n}}\right), \tag{4.21}$$

т. е. *среднее арифметическое* $\bar{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$ *при* $n \to \infty$ *сходится по распределению к нормальной случайной величине с параметрами* $a = \mathbf{M}X_i$, $\sigma^2 = \mathbf{D}X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В ряде задач приходится сталкиваться с ситуацией, когда исследуемая случайная величина является суммой большого числа независимых слагаемых, влияние каждого из которых на сумму очень мало. Такими случайными величинами являются, например, капиталы банков и страховых компаний (доля каждого отдельно взятого вкладчика не зависит от доли других вкладчиков и относительно мала, но в сумме все эти доли весьма весомы), выручка торговых предприятий (покупатели действуют независимо друг от друга и покупают товары на относительно небольшие суммы) и др.

На основании центральной предельной теоремы часто можно до наблюдения того или иного явления сказать, что соответствующая случайная величина должна иметь нормальное распределение или близкое к нему.

Приведём также два следствия из центральной предельной теоремы, относящиеся к независимым испытаниям. *Локальная теорема Муавра – Лапласа* утверждает:

Если вероятность p успеха в каждом испытании отлична от нуля и единицы, а число испытаний n достаточно велико, то для расчёта вероятности $\mathbf{P}_n(k)$ появления ровно k успехов в серии из n испытаний можно пользоваться приближённой формулой

$$\mathbf{P}_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi(u) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.22}$$

где $\varphi(u)$ — функция плотности нормального распределения (см. табл. П.1).

На практике, очевидно, вероятность появления любого конкретного числа успехов близка к нулю. Это имеет простое объяснение — ведь всего есть $(n+1)$ различных событий (может наступить $0, 1, 2, \ldots, n$ успехов), и сумма вероятностей этих $(n+1)$ событий должна быть равна единице. Поэтому важно уметь вычислять вероятности $\mathbf{P}_n(k_1, k_2)$ того, что число успехов в серии из n испытаний будет заключено между числами k_1 и k_2. Для этого используется *интегральная теорема Муавра – Лапласа*:

Если вероятность p успеха в каждом испытании отлична от нуля и единицы, а число испытаний n достаточно велико, то для расчёта вероятности $\mathbf{P}_n(k_1, k_2)$ того, что число успехов в серии из n испытаний будет заключено в промежутке $[k_1; k_2)$, можно пользоваться приближённой формулой

$$\mathbf{P}_n(k_1, k_2) \approx \Phi_0(u_2) - \Phi_0(u_1) \quad (k_1 = 0, 1, 2, \ldots; k_2 > k_1), \tag{4.23}$$

где $\Phi_0(u)$ *– функция Лапласа (см. табл. П.1).*

349. В районе десять универсамов. Суммарная суточная выручка в них равна в среднем 10 000 руб. и в 90% случаев отличается от 10 000 руб. не более, чем на 1 000 руб. Найти вероятность того, что очередная суммарная суточная выручка окажется в пределах от 8 000 до 12 000 руб.

Решение. Пусть X — суммарная суточная выручка. Как было отмечено выше, покупатели действуют независимо друг от друга и покупают товары на относительно небольшие суммы $X_i = X$, но покупателей в районе достаточно много, так что можно считать, что их количество $n \to \infty$. Поэтому суммарная выручка будет иметь нормальное распределение с некоторыми параметрами a и σ. Поскольку для нормального распределения $a = \mathbf{M}X$, то по условию $a = \mathbf{M}X = 10\,000$. Также в условии сказано, что $\mathbf{P}\{9\,000 < X < 11\,000\} = 0,9$. Но $\mathbf{P}\{9\,000 < X < 11\,000\} =$ $= \Phi_0\left(\frac{11\,000 - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{9\,000 - a}{\sigma}\right) = \mathbf{P}\{9\,000 < X < 11\,000\} = \Phi_0\left(\frac{11\,000 - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{9\,000 - a}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{1\,000}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(-\frac{1\,000}{\sigma}\right) =$ $= 2\Phi_0\left(\frac{1\,000}{\sigma}\right)$, откуда $\Phi_0\left(\frac{1\,000}{\sigma}\right) = 0,45$, и по таблице П.1 можно найти $\frac{1\,000}{\sigma} \approx 1,65$. Искомая вероятность $\mathbf{P}\{8\,000 < X < 12\,000\} = \Phi_0\left(\frac{12\,000 - 10\,000}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{8\,000 - 10\,000}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{2\,000}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(2 \cdot 1,65) =$ $= 2\Phi_0(3,3) = 2 \cdot 0,4995 = 0,999$. ❑

350. Банкомат выдаёт стандартные суммы в 500, 100 и 50 долл., причём первые составляют 10%, а последние — 60% всех выдач. В среднем банкомат производит 100 выдач в сутки. Определить размер денежной суммы, которую необходимо заложить в банкомат утром, чтобы этой суммы с вероятностью 0,9 хватило для выдачи наличности вкладчикам до следующего утра.

351. При составлении статистического отчёта нужно было сложить 10^4 чисел, каждое из которых было округлено с точностью до 10^{-m}. Предполагая, что ошибки, возникающие при округлении, независимы в совокупности и распределены равномерно на отрезке $[-0,5 \cdot 10^{-m}; 0,5 \cdot 10^{-m}]$, определить пределы, в которых с вероятностью, большей 0,987, будет лежать суммарная ошибка.

352. Торговец газетами ходит по вагонам электропоездов. В каждом из вагонов он может продать газету с вероятностью $\frac{1}{3}$. Случайная величина X — число вагонов, в которые заходил торговец прежде, чем продал первые 100 газет. Найти распределение случайной величины X.

Решение. Пусть Y_i — число вагонов, которые обошёл торговец за время от продажи $(i-1)$-й газеты до продажи i-й. Тогда все Y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Согласно центральной предельной теореме, при большом n X имеет нормальное распределение. Предоставляем читателю показать, что параметры этого распределения равны $a = 300, \sigma = 30$. ❑

353. Почему стоимость акции лучше описывается логнормальным распределением, чем нормальным?

Решение. *Спекулятивная операция*, состоящая в том, что в момент времени $(n-1)$ инвестор покупает некоторую акцию по цене S_{n-1}, а в момент n продаёт её по цене S_n, обеспечивает *доходность* $r_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}$. Предположим, что доходности r_n в различные моменты времени $n = 1, 2, 3, \ldots$ представляют собой независимые одинаково распределённые случайные величины с математическим ожиданием (*ожидаемой доходностью*) μ_n и средним квадратичным отклонением (*изменчивостью доходности* или *волати́льностью*) σ_n. Пусть в начальный момент акция стоила S_0 ден. ед., тогда в момент n её стоимость составит $S_n = S_0(1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_n)$. Преобразуем эту формулу: $S_n = S_0(1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_n) = S_0 e^{\ln[(1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_n)]} =$ $= S_0 e^{\ln(1+r_1)+\ln(1+r_2)+\ldots+\ln(1+r_n)} = S_0 e^{h_1+h_2+\ldots+h_n}$, где $h_i = \ln(1+r_i)$, $i = \overline{1,n}$.

Разобьём отрезок $[0;t]$ на n частей и устремим n к бесконечности. Тогда, согласно центральной предельной теореме, сумма $H_t = \lim\limits_{n\to\infty}(h_1+h_2+\ldots+h_n)$ будет распределена по нормальному закону, значит, поскольку случайная величина $\ln S_t = H_t + \ln S_0$ также будет распределена по нормальному закону, S_t будет иметь логнормальное распределение. ❑

354. Построить на одном рисунке графики композиций двух, трёх, четырёх одинаковых равномерных распределений. На том же рисунке построить график плотности нормального распределения. Убедиться, что при увеличении числа слагаемых графики сближаются.

355. Построить на одном рисунке графики композиций двух, трёх, четырёх одинаковых показательных распределений. На том же рисунке построить график плотности нормального распределения. Убедиться, что при увеличении числа слагаемых графики сближаются.

356. В условиях задачи 333 найти вероятность того, что из 1 000 новорождённых доля (частость) доживших до 50 лет: а) будет заключена в пределах от 0,9 до 0,95; б) будет отличаться от вероятности не более, чем на 0,04 (по модулю).

357. Мера длины «*фут*», как видно из названия, имеет прямое отношение к ноге: это — длина ступни. Но, как известно, размеры ног бывают разные. Немцы в XVI в. выходили из положения так. В воскресный день ставили рядом 16 первых вышедших из церкви мужчин, сумма длин их левых ступней делилась на 16 — средняя длина и была «*правильным и законным футом*». Известно, что размер стопы взрослого мужчины того времени описывается случайной величиной с математическим ожиданием 262,5 мм и средним квадратичным отклонением 12 мм. Найти вероятность того, что два «*правильных и законных фута*», рассчитанных указанным способом в разные дни, отличаются друг от друга более, чем на 5 мм. Сколько нужно было бы взять мужчин для того, чтобы с вероятностью, большей 0,99, средний размер их ступней отличался бы от 262,5 мм менее, чем на 0,5 мм?

358. Доказать локальную теорему Муавра – Лапласа (4.22).

359. Доказать интегральную теорему Муавра – Лапласа (4.23) как следствие из центральной предельной теоремы.

Доказательство. Пусть в серии из n испытаний Бернулли произошло X успехов. Тогда, согласно задаче 188, случайную величину X, распределённую по биномиальному закону с параметрами n, p, можно представить в виде суммы n независимых одинаково распределённых альтернативных случайных величин X_i с параметром p: $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. При этом по центральной предельной теореме

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{X - n\mathbf{M}X}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mathbf{M}X}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} = \frac{1}{2} + \Phi_0(x).$$

Но $\mathbf{M}X = np$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\dfrac{X-np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}} < x\right\} = \dfrac{1}{2} + \Phi_0(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k_1;k_2) = \dfrac{1}{2} + \Phi_0\left(\dfrac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) -$

$- \left[\dfrac{1}{2} + \Phi_0\left(\dfrac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\right] = \Phi_0\left(\dfrac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi_0\left(\dfrac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$, что и требовалось доказать. ❑

360. Доказать интегральную теорему Муавра – Лапласа (4.23), не пользуясь центральной предельной теоремой.

361. Строительная фирма для привлечения инвестиций в строительство нового дома собирается воспользоваться банковским кредитом. Вероятность того, что какой-либо банк в ответ на поступление бизнес-плана примет положительное решение о кредитовании фирмы, равна 0,3. Строительная фирма обратилась в 100 банков. Найти вероятности того, что решения о предоставлении кредитов этой фирме примут: а) один банк; б) 15 банков; в) 30 банков; г) 50 банков.

Решение. Данную ситуацию можно рассматривать как серию из $n = 100$ испытаний Бернулли, в которых успехом считается принятие банком решения о кредитовании. Вероятность успеха в единичном испытании равна по условию $p = 0,3$. Поскольку число испытаний n велико, а произведение $np = 30 > 10$, можно воспользоваться локальной теоремой Муавра – Лапласа (4.23):

$\mathbf{P}_{100}(1) \approx \dfrac{1}{\sqrt{100\cdot 0,3\cdot(1-0,3)}}\varphi\left(\dfrac{1-100\cdot 0,3}{\sqrt{100\cdot 0,3\cdot(1-0,3)}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{21}}\varphi\left(\dfrac{1-30}{\sqrt{21}}\right) = 0,22\cdot\varphi(-6,33) = 0,22\cdot\varphi(6,33) \approx 0,22\cdot 0 = 0$,

$\mathbf{P}_{100}(15) \approx \dfrac{1}{\sqrt{21}}\varphi\left(\dfrac{15-30}{\sqrt{21}}\right) = 0,22\cdot\varphi(-3,27) = 0,22\cdot\varphi(3,27) = 0,22\cdot 0,0020 = 0,00044$, $\mathbf{P}_{100}(30) \approx \dfrac{1}{\sqrt{21}}\varphi\left(\dfrac{30-30}{\sqrt{21}}\right) =$

$= 0,22\cdot\varphi(0) = 0,22\cdot 0,3989 = 0,088$, $\mathbf{P}_{100}(50) \approx \dfrac{1}{\sqrt{21}}\varphi\left(\dfrac{50-30}{\sqrt{21}}\right) = 0,22\cdot\varphi(4,36) \approx 0,22\cdot 0 = 0$. ❑

362. Вероятность появления успеха в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что в серии из 300 испытаний успех наступит ровно 75 раз.

363. Вероятность появления успеха в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что в серии из 300 испытаний успех наступит от 70 до 100 раз.

364. В условиях задачи 361 найти вероятности того, что решения о предоставлении кредитов этой фирме примут: а) хотя бы один банк; б) более 15 банков; в) более 50 банков.

365. Вероятность смерти тридцатилетнего мужчины составляет 0,006. Страховая компания заключила 10 000 страховых контрактов с мужчинами в возрасте тридцати лет, согласно которым в случае смерти застрахованного лица в течение ближайшего года его наследникам выплачивается 100 000 руб. Стоимость одного контракта равна 1 200 руб. Найти вероятности следующих событий: а) к концу года страховая компания окажется в убытке; б) доход страховой компании превысит 4 000 000 руб.

Решение. Пусть за год наступило k страховых случаев, тогда доход страховой компании составит $P = 10\,000\cdot 1\,200 - 100\,000k = 100\,000(120 - k)$ руб. Поэтому компания окажется в убытке ($P < 0$), если за год наступит более 120 страховых случаев (т. е. от 121 до 10 000 страховых случаев). Доход страховой компании превысит 4 000 000 руб. ($P > 4\,000\,000$), если за год наступит менее 80 страховых случаев. Вероятность наступления страхового случая $p = 0,006$. Всего проводится $n = 10\,000$ испытаний. Поскольку число испытаний n велико, а произведение $np = 60 > 10$, можно воспользоваться интегральной теоремой Муавра – Лапласа: $\mathbf{P}_{10\,000}(121;10\,000) \approx$

$$\approx \Phi_0\left(\frac{10\,000-60}{\sqrt{60\cdot(1-0{,}006)}}\right)-\Phi_0\left(\frac{121-60}{\sqrt{60\cdot(1-0{,}006)}}\right)=\Phi_0\left(\frac{9\,940}{\sqrt{59{,}64}}\right)-\Phi_0\left(\frac{61}{\sqrt{59{,}64}}\right)=\Phi_0(1287{,}56)-\Phi_0(7{,}90)\approx 0{,}5-0{,}5=0,$$

т. е. страховая компания окажется в убытке с нулевой вероятностью;

$$\mathbf{P}_{10\,000}(0;80)\approx \Phi_0\left(\frac{80-60}{\sqrt{60\cdot(1-0{,}006)}}\right)-\Phi_0\left(\frac{0-60}{\sqrt{60\cdot(1-0{,}006)}}\right)=\Phi_0\left(\frac{20}{\sqrt{59{,}64}}\right)-\Phi_0\left(-\frac{60}{\sqrt{59{,}64}}\right)=\Phi_0(2{,}589)-\Phi_0(-7{,}77)=$$

$=\Phi_0(2{,}589)+\Phi_0(7{,}77)\approx 0{,}495+0{,}5=0{,}995$, значит, доход страховой компании превысит 4 000 000 руб. с вероятностью, очень близкой к единице, т. е. почти наверное. ❑

366. В страховой компании 10 000 клиентов, взнос каждого из которых составляет 1 000 руб. Вероятность наступления страхового случая равна (по оценкам экспертов компании) 0,005, а страховая выплата при наступлении страхового случая составляет 100 000 руб. Определить, на какую прибыль может рассчитывать страховая компания с вероятностью 0,99. Определить минимальный размер страховой премии, при котором страховая компания получит прибыль, не меньшую 1 000 000 руб., с вероятностью 0,999.

367. Рассчитать в условиях задачи 187 рациональные цены европейских опционов «*колл*» и «*пут*», разделяя срок жизни опциона: а) на 100 периодов; б) на 1 000 периодов.

368. Во время каникул Петя работал в предвыборном штабе кандидата в депутаты, который проводил выборочный опрос избирателей. Примерное распределение голосов было известно: по 40% избирателей «*за*» и «*против*» кандидата, остальные воздержались. Сколько нужно опросить людей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, гарантировать отклонение процента голосов, отданных за кандидата при выборочном опросе, от истинного мнения избирателей не более, чем на 2% от всего электората?

369. В дачном посёлке 2 500 жителей, каждый из которых примерно шесть раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок случайным образом и независимо от других жителей. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки).