Глава 1. Вероятностные пространства

§1.1. Элементы комбинаторики

В теории вероятностей часто приходится иметь дело с задачами, в которых необходимо подсчитывать число возможных способов совершения каких-либо действий. Задачи такого типа называются комбинато́рными, а раздел математики, занимающийся решением таких задач, — комбинато́рикой. Сформулируем два универсальных правила, применяемых при решении комбинаторных задач.

Правило произведения. *Пусть требуется выполнить одно за другим какие-либо m действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие — n_2 способами и так до m-го действия, которое можно выполнить n_m способами, то все m действий могут быть выполнены $n_1 n_2 \ldots n_m$ способами.*

Правило суммы. *Пусть требуется выполнить одно из каких-либо m действий, взаимно исключающих друг друга. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие — n_2 способами и так до m-го действия, которое можно выполнить n_m способами, то выполнить одно из этих m действий можно $(n_1 + n_2 + \ldots + n_m)$ способами.*

Напомним понятие факториала, активно используемое в комбинаторике. *Факториалом натурального числа n* называется число

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1. \tag{1.1}$$

По определению, *факториалом нуля* является единица:

$$0! = 1. \tag{1.2}$$

Рассмотрим некоторое множество S, состоящее из n *различных* элементов. Пусть $1 \le k \le n$. Назовём *множество*, состоящее из k элементов, *упорядоченным*, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие число от 1 до k, причём различным элементам множества соответствуют разные числа.

Размещениями из n элементов по k называются упорядоченные подмножества множества S, состоящие из k *различных* элементов и отличающиеся друг от друга составом элементов или порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k равно

$$\mathrm{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1). \tag{1.3}$$

Перестановками из n элементов называются размещения из n *элементов по n*, т. е. упорядоченные подмножества множества S, состоящие из всех элементов данного множества и отличающиеся друг от друга только порядком их расположения.

Число перестановок из n элементов равно

$$\mathrm{P}_n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1. \tag{1.4}$$

Сочетаниями из n элементов по k называются подмножества множества S, состоящие из k *различных* элементов и отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Число сочетаний из n элементов по k равно

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{\mathrm{A}_n^k}{\mathrm{P}_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}. \tag{1.5}$$

Размещениями с повторениями из n элементов по k называются упорядоченные подмножества множества S, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые, и отличающиеся друг от друга составом элементов или порядком их расположения.

Число размещений с повторениями из n элементов по k равно

$$\tilde{\mathrm{A}}_n^k = n^k. \tag{1.6}$$

Сочетаниями с повторениями из n элементов по k называются подмножества множества S, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые, и отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по k равно

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots n}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}. \quad (1.7)$$

Отметим, что формулы (1.4) – (1.7) сохраняют смысл и остаются справедливыми и при $k = 0$.

Если во множестве S, состоящем из n элементов, есть только m *различных* элементов, то *перестановками с повторениями из n элементов* называются упорядоченные подмножества множества S, в которые первый элемент множества S входит n_1 раз, второй элемент — n_2 раз и так до m-го элемента, который входит n_m раз ($n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$).

Число перестановок с повторениями из n элементов, в которые первый элемент множества S входит n_1 раз, второй элемент — n_2 раз и так до m-го элемента, который входит n_m раз ($n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$), равно

$$\tilde{P}_n(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}. \quad (1.8)$$

1. Маша поссорилась с Петей и не хочет ехать с ним в одном автобусе. От общежития до института с 7 до 8 ч отправляется пять автобусов. Не успевший на последний из этих автобусов опаздывает на лекцию. Сколькими способами Маша и Петя могут доехать до института в разных автобусах и не опоздать на лекцию?

Решение. Петя может доехать до института $n_1 = 5$ различными способами (на одном из пяти автобусов), при этом Маше остаётся только $n_2 = 4$ способа (так как один из автобусов занят Петей). Таким образом, по правилу произведения у Пети и Маши есть $n_1 n_2 = 5\cdot 4 = 20$ различных способов добраться до института в разных автобусах и не опоздать на лекцию. ❑

2. В информационно-технологическом управлении банка работают три аналитика, десять программистов и 20 инженеров. Для сверхурочной работы в праздничный день начальник управления должен выделить одного сотрудника. Сколько способов существует у начальника управления?

Решение. Начальник управления может отобрать одного аналитика $n_1 = 3$ способами, одного программиста — $n_2 = 10$ способами, а одного инженера — $n_3 = 20$ способами. Поскольку по условию задачи начальник управления может выделить любого из своих сотрудников, согласно правилу суммы у него существует $n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 10 + 20 = 33$ различных способа выбрать сотрудника для сверхурочной работы. ❑

3. Начальник службы безопасности банка должен ежедневно расставлять десять охранников по десяти постам. В целях усиления безопасности одна и та же комбинация расстановки охранников по постам не может повторяться чаще одного раза в месяц. Чтобы оценить, возможно ли это, найти число различных комбинаций расстановки охранников.

Решение. Первый способ. На первый пост начальник службы безопасности может назначить любого из $n_1 = 10$ охранников, на второй пост — любого из оставшихся $n_2 = 9$ охранников и так до девятого поста, на который можно назначить любого из оставшихся $n_9 = 2$ охранников, при этом оставшийся $n_{10} = 1$ охранник будет назначен на десятый пост. Поэтому, согласно правилу произведения, у начальника службы безопасности есть $n_1 n_2 \cdots n_{10} = 10\cdot 9\cdots 2\cdot 1 = 10! = 3\,628\,800$ способов расстановки охранников по постам. Поскольку количество дней в месяце не превышает 31, у начальника службы безопасности заведомо существует достаточное число способов расстановки своих подчинённых по постам.

Второй способ. Число способов расстановки десяти охранников по десяти постам, существующих у начальника службы безопасности, описывается числом перестановок из 10 элементов, т. е. $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$. ❑

4. Определить, сколькими способами можно разместить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не били друг друга.

5. Новый президент банка должен назначить двух новых вице-президентов из числа десяти директоров. Сколько способов существует у президента, если: а) один из вице-президентов (первый) выше другого по должности; б) вице-президенты по должности равны между собой.

Решение. Первый способ. а) Первого вице-президента можно выбрать из $n_1 = 10$ претендентов, при этом на пост второго вице-президента будут претендовать $n_2 = 9$ оставшихся директоров. Поэтому, согласно правилу произведения, у нового президента банка есть $n_1 n_2 = 10 \cdot 9 = 90$ способов назначения двух вице-президентов, один из которых подчиняется другому, из числа десяти директоров. **б)** Пусть первое действие заключается в том, что президент отбирает двух человек на должности вице-президентов, а второе действие — в том, что президент говорит отобранным людям, кто из них является первым вице-президентом, а кто — вторым. Пусть первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие, очевидно, можно выполнить $n_2 = 2$ способами, и по правилу произведения число способов назначения двух вице-президентов, один из которых подчиняется другому, из числа десяти директоров составляет $n_1 n_2 = 2n_1$. С другой стороны, в пункте а) мы нашли это число, и оно оказалось равным 90, поэтому $n_1 = \frac{90}{2} = 45$.

Второй способ. а) Число способов выбора двух кандидатов на две различные должности из десяти претендентов описывается числом размещений из 10 элементов по 2, т. е. $A_{10}^2 = 90$. **б)** Число способов выбора двух кандидатов на две одинаковые должности из десяти претендентов описывается числом сочетаний из 10 элементов по 2, т. е. $C_{10}^2 = 45$. ❑

6. В кредитном отделе банка работают восемь человек. Сколько существует способов распределить между ними три премии: а) одинакового размера; б) разных размеров, известных заранее?

7. Одна из воюющих сторон захватила в плен 12 солдат, а другая 15. Определить, сколькими способами стороны могут обменять семерых военнопленных.

8. Петя и Маша коллекционируют видеокассеты. У Пети есть 30 комедий, 80 боевиков и 7 мелодрам, у Маши — 20 комедий, 5 боевиков и 90 мелодрам. Сколькими способами Петя и Маша могут обменяться тремя комедиями, двумя боевиками и одной мелодрамой?

9. В сессию в течение 20 дней студенты одной группы должны сдать пять экзаменов. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если: а) запрещается сдавать два экзамена в один день; б) между двумя экзаменами должен пройти хотя бы один день для подготовки?

10. В банке девять учредителей. Регистрационные документы хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, и сколько ключей к ним нужно изготовить, чтобы доступ к содержимому сейфа был возможен только тогда, когда соберётся не менее шести учредителей?

11. Маша решила помириться с Петей и позвонить ему, но забыла две последних цифры его телефона и набирает их наудачу. Найти наибольшее возможное число неудачных попыток, которые сделает Маша, прежде чем дозвонится до Пети.

12. Сколько автомобилей в одном городе можно обеспечить государственными регистрационными знаками, если каждый регистрационный знак состоит из кода города, трёх букв, имеющих одинаковое начертание как в русском, так и в латинском алфавите («*А*», «*В*», «*Е*», «*К*», «*М*», «*Н*», «*О*», «*Р*», «*С*», «*Т*», «*У*», «*Х*»), и трёх цифр?

13. Доказать правило произведения.

14. Доказать правило суммы.

15. Доказать справедливость формул (1.3) – (1.5).

16. Доказать равенство: $C_n^k = C_n^{n-k}$ $(0 \le k \le n)$.

Решение. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = C_n^{n-k}$. ❑

17. **Равенство Паскаля.** Доказать равенство: $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ $(0 \le k < n)$.

18. Доказать равенство: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

19. Определить, сколько существует вариантов опроса группы из десяти студентов на одном занятии по теории вероятностей, если ни один из студентов не будет подвергнут опросу дважды, и на занятии может быть опрошено любое число студентов (в том числе, ни один)?

20. Доказать равенство: $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

21. Маша очень любит пирожные и ежедневно в булочной рядом с институтом покупает шесть пирожных (одинаковых или разных). Всего в булочной продаётся 11 сортов пирожных. Сколькими способами Маша может выбрать из них шесть штук?

Решение. Каждому набору пирожных, которые выберет Маша, будем ставить в соответствие последовательность нулей и единиц, определяемую по следующему правилу. Напишем подряд столько единиц, сколько пирожных первого вида выбрала Маша, далее поставим нуль и после него запишем количество отобранных пирожных второго вида и т. д. Например, комбинации «*одно пирожное второго вида, три пирожных пятого вида и одно пирожное восьмого вида*» соответствует такая последовательность: «010001110001000» (нули отделяют виды пирожных друг от друга, поэтому нуль после одиннадцатого вида не нужен). При этом каждому набору пирожных взаимно однозначным образом соответствует последовательность, построенная по описанному правилу. Все такие последовательности состоят, очевидно, из 16 знаков, причём 10 из них нули, которые могут занимать любое место. Поэтому количество способов выбора пирожных равно количеству всех таких последовательностей, т. е. числу размещений десяти нулей по 16 местам: $C_{16}^{10} = 8\,008$. ❑

22. В конкурсе по трём номинациям участвуют десять кинофильмов. Вычислить число вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены: а) различные призы; б) одинаковые призы.

23. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове «*мама*»? Выписать все эти слова.

Решение. Число различных слов, которые можно составить, переставляя буквы в слове «*мама*», описывается числом перестановок с повторениями из $n = 4$ элементов (букв в слове «*мама*»), в которые первый элемент (буква «*м*») входит $n_1 = 2$ раза, а второй элемент (буква «*а*») — $n_2 = 2$ раза ($n_1 + n_2 = 4 = n$). Это число равно $\tilde{P}_4(2,2) = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$. Шесть различных слов, получающиеся перестановками букв в слове «*мама*», таковы: «*ммаа*», «*мама*», «*маам*», «*амма*», «*амам*», «*аамм*». ❑

24. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове «*математика*»?

25. Доказать справедливость формул (1.6) – (1.8).

§1.2. Исчисление событий

Случайное событие A*, связанное с опытом* S*,* — это такое событие, которое может произойти или не произойти в результате опыта S, причём заранее, до проведения опыта, неизвестно, произойдёт оно или нет. Всюду в дальнейшем при рассмотрении случайных событий мы будем опускать слово «*случайное*». *Достоверным событием, связанным с опытом* S, называется такое событие Ω, которое обязательно произойдёт в результате опыта S. *Невозможным событием, связанным с опытом* S, называется такое событие $\varnothing$, которое обязательно не произойдёт в результате опыта S.

Над событиями A и B, связанными с одним и тем же опытом S, определены следующие операции.

С*обытие* A *влечёт за собой событие* B (или *событие* A *вложено в событие* B), если каждое появление события A сопровождается появлением события B. Это обозначается как $A \subset B$. *События* A и B называют *эквивалентными*, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Эквивалентность обозначается как $A = B$.

Объединением (или *суммой*) *событий* A и B называется событие $A \cup B$ (или $A + B$), которое наступает всегда, когда наступает либо событие A, либо событие B.

Пересечением (или *произведением*) *событий* A и B называется событие $A \cap B$ (или AB), которое наступает всегда, когда события A и B наступают одновременно.

Дополнением события B *до события* A (или *разностью событий* A и B) называется событие $A \setminus B$, которое наступает всегда, когда наступает событие A, и при этом не наступает событие B.

Противоположным событию A называется событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ (читается «*не* A»), которое наступает всегда, когда событие A не наступает.

События A и B называются *несовместными*, если $A \cap B = \varnothing$, т. е. если в результате опыта события A и B не могут наступить одновременно.

Говорят, что события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют *полную группу*, если они попарно несовместны ($H_i \cap H_j = \varnothing$, $i \neq j$) и их объединение эквивалентно достоверному событию ($H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$).

Случайное событие ω, связанное с опытом S, которое невозможно представить как объединение или пересечение более простых событий, связанных с тем же опытом, называется *элементарным событием.* Очевидно, достоверное событие $\Omega = \{\omega\}$ — это множество всех элементарных событий (поэтому Ω называют ещё *пространством элементарных событий*), а невозможное событие $\varnothing$ — это пустое множество. Любое событие, связанное с опытом S, можно представить как некоторое подмножество достоверного события Ω, т. е. как множество некоторых элементарных событий.

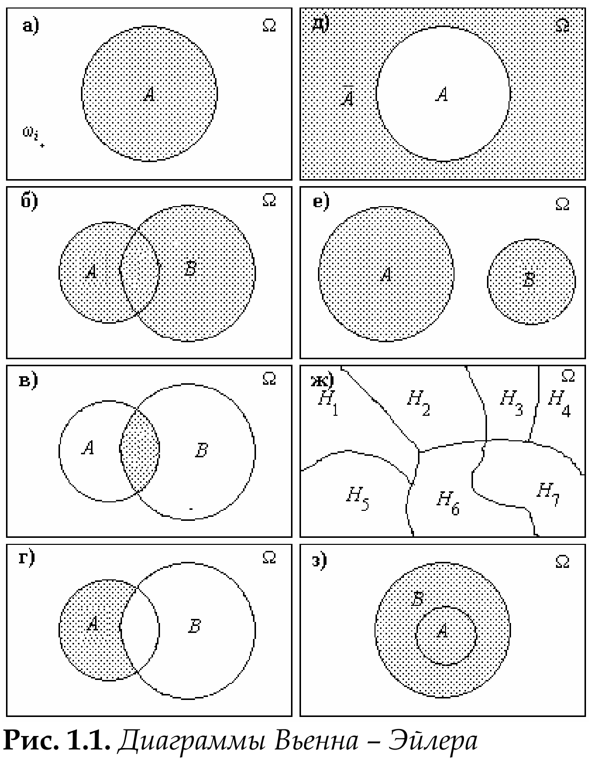

Рис. 1.1. *Диаграммы Вьенна – Эйлера*

Для наглядного представления событий, операций над событиями и отношений между ними используются *диаграммы Вьенна – Эйлера* (рис. 1.1). На этих диаграммах достоверное событие Ω изображается в виде некоторой области на плоскости, элементарные события ω_i — точками внутри области, соответствующей Ω. При этом любому случайному событию A будет соответствовать некоторая геометрическая фигура внутри области, соответствующей Ω (рис. 1.1а). Объединение $A \cup B$ событий A и B состоит из всех элементарных событий, принадлежащих, по крайней мере, одному из событий A и B (рис. 1.1б). Пересечение $A \cap B$ событий A и B состоит из всех элементарных событий, принадлежащих одновременно обоим событиям A и B (рис. 1.1в). Дополнение $A \setminus B$ события B до события A состоит из всех элементарных событий, принадлежащих событию A и при этом не принадлежащих событию B (рис. 1.1г). Событие $\overline{A}$, противоположное событию A, состоит из всех элементарных событий, не принадлежащих событию A (рис. 1.1д). *Несовместные события* не имеют общих элементарных событий (рис. 1.1е). *Полная группа событий* представлена на рис. 1.1ж. *Событие A влечёт за собой событие B*, если все элементарные события, входящие в A, входят и в B (рис. 1.1з).

Операции над событиями обладают следующими свойствами:

коммутативность объединения событий:

$$A \cup B = B \cup A\ , \tag{1.9}$$

ассоциативность объединения событий:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\ , \tag{1.10}$$

$$A \cup A = A\ , \tag{1.11}$$

$$A \cup \overline{A} = \Omega, \tag{1.12}$$

$$A \cup \varnothing = A\ , \tag{1.13}$$

$$A \cup \Omega = \Omega, \tag{1.14}$$

коммутативность пересечения событий:

$$A \cap B = B \cap A\ , \tag{1.15}$$

ассоциативность пересечения событий:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\ , \tag{1.16}$$

дистрибутивность пересечения событий относительно объединения:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)\ , \tag{1.17}$$

$$A \cap A = A\ , \tag{1.18}$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing, \tag{1.19}$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing, \tag{1.20}$$

$$A \cap \Omega = A\ , \tag{1.21}$$

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}\ , \tag{1.22}$$

$$\overline{\Omega} = \varnothing, \tag{1.23}$$

$$\overline{\varnothing} = \Omega, \tag{1.24}$$

правила де Морга́на:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}\ , \tag{1.25}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}\ . \tag{1.26}$$

26. Привести примеры противоположных случайных событий.

27. Привести примеры несовместных случайных событий.

28. Известно, что $A \subset B$. Найти: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$.

Решение. Событие $A \cup B$ заштриховано на рис. 1.2а, событие $A \cap B$ — на рис. 1.2б, откуда следует, очевидно, что $A \cup B = B$, $A \cap B = A$. ❑

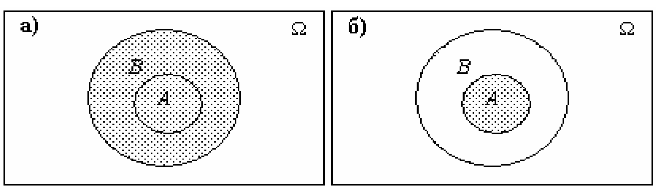

Рис. 1.2. *События $A \cup B$* **(а)** *и $A \cap B$* **(б)**, *когда $A \subset B$*

29. Установить, при каких условиях события A и $A \cap B$ являются эквивалентными.

30. Пусть A, B, C — произвольные события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что: а) произошло только A; б) произошли A и B, но C не произошло; в) все три события произошли; г) произошло хотя бы одно из этих событий; д) произошло хотя бы два события; е) ни одно из событий A, B и C не произошло; ж) произошло не более двух из событий A, B и C; з) произошло ровно одно из этих событий; и) произошло ровно два из этих событий.

31. Пусть A, B, C — некоторые события, причём A Н B. С помощью диаграмм Вьенна – Эйлера упростить выражения: а) A З B; б) A И B; в) A З B З C; г) A И B И C.

32. Проверить справедливость следующих утверждений, сравнивая диаграммы Вьенна – Эйлера для событий, стоящих в левых и в правых частях: а) $(A$ И $B)\backslash C = A$ И$(B\backslash C)$; б) A З B З C = A З B З (C И B); в) AИВИC = AИ$(B\backslash(A$З$B))$И И$(C\backslash(A$З$C))$; г) A И $B = (A\backslash(A$ З $B))$ И B; д) $(A$ И $B)\backslash A = B$; е) $\overline{(A \text{ И } B \text{ И } C)} = \overline{A}$ З $\overline{B}$ З $\overline{C}$; ж) $\overline{(A \text{ И } B)}$З$C = (\overline{A}$ З $C)$ И$(\overline{B}$ З $C)$; з) $\overline{(A \text{ И } B)}$ З $C = \overline{A}$ З $\overline{B}$ З C; и) $\overline{(A \text{И} B)}$З$C = C\backslash(C$З$(A$И$B))$; к) A З B З C Н$(B$ З $C)$И$(C$ З $A)$; л) $(A$З$B)$И$(B$З$C)$И$(C$З$A)$НA И B И C; м) AЗ$\overline{B}$ЗC НAИB.

33. С помощью диаграмм Вьенна – Эйлера убедиться в справедливости свойств (1.9) – (1.26) для произвольных событий A, B, C.

34. Проверить, являются ли события A и $\overline{A \text{ И } B}$ (где A и B — произвольные события) несовместными.

Решение. A З $(\overline{A \text{ И } B})$ = {по правилу де Моргáна}= A З $(\overline{A}$ З $\overline{B})$ = {по свойству ассоциативности пересечения}= $(A$ З $\overline{A})$ З $\overline{B}$ = ШЗ $\overline{B}$ = Ш, значит, события A и $\overline{A \text{ И } B}$ являются несовместными. ❑

35. Проверить, образуют ли события A, $\overline{A}$ З B, $\overline{A \text{ И } B}$ полную группу (A и B — произвольные события).

§1.3. Классическое определение вероятности

Вероятность наступления события характеризует меру возможности наступления этого события при проведении опыта. Если множество элементарных событий W= $\{w_1, w_2, \ldots, w_N\}$ конечно, и все элементарные события одинаково возможны, то такая *вероятностная схема* носит название *классической*. В этом случае *вероятность* $\mathbf{P}\{A\}$ *наступления события* A, состоящего из M элементарных событий, входящих в W, определяется как отношение числа M элементарных событий, благоприятствующих наступлению события A, к общему числу N элементарных событий. Эта формула носит название *классического определения вероятности*:

$$\mathbf{P}\{A\} = \frac{M}{N}. \qquad (1.27)$$

В частности, согласно классическому определению вероятности,

$$\mathbf{P}\{w_i\} = \frac{1}{N}, \; i = 1, 2, \ldots, N, \qquad (1.28)$$

$$\mathbf{P}\{\text{W}\} = \frac{N}{N} = 1, \qquad (1.29)$$

$$\mathbf{P}\{\text{Ж}\} = \frac{0}{N} = 0. \qquad (1.30)$$

Частным случаем классической вероятностной схемы является *урновая схема*: в урне содержится $(K + L)$ шаров, среди которых K белых и L чёрных; из урны наугад без возвращения извлекаются $(k + l)$ шаров, тогда вероятность $\mathbf{P}_{K,L}(k,l)$ того, что в выборке содержится ровно k белых шаров и l чёрных, вычисляется по *формуле гипергеометрической вероятности*:

$$\mathbf{P}_{K,L}(k,l) = \frac{\mathrm{C}_K^k \mathrm{C}_L^l}{\mathrm{C}_{K+L}^{k+l}}. \qquad (1.31)$$

В случае, когда множество элементарных событий бесконечно и даже несчётно (но эти события являются одинаково возможными), вероятность наступления события можно рассчитать, пользуясь *геометрическим определением вероятности*, которое состоит в следующем. Пусть множество элементарных событий Ω представляет собой некоторую область в d-мерном пространстве, имеющую ненулевой объём[1] $V(\Omega)$: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $0 < V(\Omega) < \infty$. При этом каждому элементарному событию соответствует точка $\omega \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, а каждое событие A представляет собой область, вложенную в Ω и имеющую объём $V(A)$: $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $0 \le V(A) < \infty$. Тогда, согласно геометрическому определению вероятности, *вероятность* $\mathbf{P}\{A\}$ *наступления события* A можно рассчитать как отношение объёма $V(A)$ области A к объёму $V(\Omega)$ области Ω:

$$\mathbf{P}\{A\} = \frac{V(A)}{V(\Omega)}. \tag{1.32}$$

Если элементарные события не являются одинаково возможными, для приближённого вычисления вероятностей можно использовать относительные частоты. Пусть в результате n-кратного проведения опыта S событие A наступило m_n раз. Назовём *относительной частотой* $p_n(A)$ *появления события* A *в серии из* n *опытов* S отношение числа m_n наступлений события A к общему числу n проведённых опытов:

$$p_n(A) = \frac{m_n}{n}. \tag{1.33}$$

При этом *вероятность* $\mathbf{P}\{A\}$ *наступления события* A будет равна пределу[2] относительной частоты наступления этого события в серии из n опытов при неограниченном увеличении числа опытов:

$$\frac{m_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} \mathbf{P}\{A\} \tag{1.34}$$

(здесь «$\xrightarrow{\mathbf{P}}$» означает «*сходится по вероятности*», см. §4.2).

На практике в этом случае вероятность рассчитывают при помощи приближённого равенства

$$\mathbf{P}\{A\} \approx p_n(A) = \frac{m_n}{n}. \tag{1.35}$$

Следует помнить, что данной формулой можно пользоваться лишь при выполнении трёх условий:

- *рассматриваемые события должны быть исходами только таких опытов, которые могут быть воспроизведены неограниченное число раз при одном и том же комплексе условий*;
- *события должны обладать устойчивостью относительных частот* (см. *теорему Бернулли* в §4.3);
- *число испытаний, по результатам которых вычисляется вероятность, должно быть достаточно велико*.

36. В корзине три красных и семь зелёных яблок. Из корзины вынимают одно яблоко. Найти вероятность того, что оно будет красным.

Решение. Пусть опытом будет извлечение яблока из корзины, а событие A состоит в том, что извлечённое из корзины яблоко окажется красным. Тогда общее число элементарных событий $n = 10$, из которых $m = 3$ элементарных события благоприятствуют наступлению события A. Согласно классическому определению вероятности $\mathbf{P}\{A\} = \frac{m}{n} = \frac{3}{10} = 0{,}3$. ❑

37. В корзине три красных и семь зелёных яблок. Из корзины вынули одно яблоко и отложили в сторону. Это яблоко оказалось зелёным. После этого из корзины берут ещё одно яблоко. Найти вероятность того, что оно будет красным.

38. Трое играют в карты. Каждому игроку сдано по десять карт и две оставлены в прикупе[3]. Один из игроков видит, что у него на руках шесть карт бубновой масти, а четыре — других мастей. Он сбрасывает две карты из этих четырёх и бе-

---

[1] Здесь под *объёмом* $V(A)$ *области* A понимается её длина в одномерном случае ($d = 1$), площадь в двумерном случае ($d = 2$), объём — в трёхмерном случае ($d = 3$) и т. д.

[2] В некотором смысле *сходимости по вероятности*, который будет пояснён ниже, §4.2-§4.3.

[3] Имеется в виду игра в *преферанс*, когда в колоде всего 32 карты, по 8 каждой масти.

рёт себе прикуп. Найти вероятность того, что в прикупе окажутся две бубновые карты.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что в прикупе окажутся две бубновые карты. Из 32 карт игроку известны десять, а остальные 22 неизвестны. Взять две карты из прикупа — это то же самое, что взять их из 22 неизвестных карт, среди которых две бубновые. Поэтому общее число элементарных событий $n = C_{22}^2$, из которых лишь $m = 1$ элементарное событие благоприятствует наступлению события A. Согласно классическому определению вероятности, $\mathbf{P}\{A\} = \frac{m}{n} = \frac{1}{C_{22}^2} = \frac{1}{231}$. ❑

39. В партии, состоящей из 1 000 изделий, четыре изделия имеют дефекты. Для контроля отбираются 100 изделий. Найти вероятность того, что среди отобранных изделий не окажется бракованных.

Решение. По формуле гипергеометрической вероятности (1.31) $\mathbf{P}_{1000,4}(100,0) = \frac{C_4^0 C_{996}^{100}}{C_{1000}^{100}} =$

$$= \frac{\frac{4!}{0!4!} \times \frac{996!}{100!896!}}{\frac{1000!}{100!900!}} = \frac{\frac{4!}{1 \cdot 4!} \times \frac{996!}{100!896!}}{\frac{1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997 \cdot 996!}{100! \cdot 900 \cdot 899 \cdot 898 \cdot 897 \cdot 896!}} = \frac{996! \cdot 100! \cdot 900 \cdot 899 \cdot 898 \cdot 897 \cdot 896!}{100! \cdot 896! \cdot 1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997 \cdot 996!} = \frac{899 \cdot 449 \cdot 897}{10 \cdot 111 \cdot 499 \cdot 997} \approx 0{,}656 .$$ ❑

40. Доказать формулу гипергеометрической вероятности (1.31).

41. В 80-е гг. XX в. в СССР была популярна игра «*Спортлото*». Играющий отмечал на карточке пять чисел от 1 до 36 и получал призы различного достоинства, если он угадал одно, два, три, четыре и пять чисел, объявленных тиражной комиссией. Найти вероятности следующих событий: не угадать ни одного числа из 36, угадать одно, два, три, четыре и пять чисел из 36.

42. На малом предприятии работают десять семейных пар. Чтобы никому не было обидно, на ежегодном собрании акционеров совет директоров, состоящий из восьми человек, выбирается случайным образом. Найти вероятности следующих событий: а) в совете директоров отсутствуют семейные пары; б) в совете директоров есть ровно одна семейная пара; в) в совете директоров есть ровно две семейных пары?

43. Найти вероятность того, что при раздаче колоды в 52 карты четырём игрокам первый из них получит ровно n пар «*туз и король одной масти*» ($n = 0, 1, 2, 3, 4$).

44. Двери лифта закрылись на первом этаже прямо перед Петей, который успел только заметить, что в лифт вошли шесть человек. В общежитии семь этажей, и лифт, если откроет на каком-либо из них двери, стоит там целую минуту. Петя живёт на седьмом этаже и очень не хочет идти по лестнице. Он размышляет, каковы вероятности следующих событий: а) все шестеро выйдут на одном этаже; б) все шестеро выйдут на разных этажах. Найти эти вероятности.

Решение. а) Опыт, за которым наблюдает Петя, состоит в том, что люди выходят из лифта произвольным образом: каждый из шести человек может выйти на любом из шести этажей (со второго по седьмой). Общее число исходов этого опыта $n = \tilde{A}_6^6 = 6^6$ (первый человек может выйти на любом из шести этажей, второй — также на любом из шести этажей и так до шестого человека; все эти шесть шестёрок перемножаются по правилу произведения). Пусть событие A состоит в том, что все шесть человек выйдут на одном и том же этаже, тогда число исходов описанного опыта, благоприятствующих наступлению события A, равно $m_A = 6$ (всего есть шесть этажей). Поэтому, согласно классическому определению вероятности, $\mathbf{P}\{A\} = \frac{6}{6^6} = \frac{1}{6^5} \approx 0{,}00013$. **б)** Рассмотрим тот же опыт, что и в п. а). Пусть событие B состоит в том, что все шесть человек выйдут на разных этажах, тогда число исходов опыта, благоприятствующих наступлению события B, равно $m_B = 6!$ (число перестановок шести людей по шести этажам). По классической формуле вероятности $\mathbf{P}\{B\} = \frac{6!}{6^6} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{6}} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{6}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{324}$. ❑

45. Петя и Маша приглашены на день рождения в компанию из десяти человек, включая их, но приходят на него порознь, причём, как и остальные гости, в случайное время. Найти вероятность того, что они будут сидеть за праздничным столом рядом, если хозяин рассаживает гостей случайным образом, а стол, имеющий прямоугольную форму: а) стоит в середине комнаты; б) придвинут к стене.

46. Во время грозы на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошёл обрыв провода. Считая, что обрыв одинаково возможен в любой точке, найти вероятность того, что обрыв расположен между 40-м и 45-м километрами.

47. На 200-километровом участке газопровода между компрессорными станциями A и B происходит утечка газа, которая одинаково возможна в любой точке газопровода. Найти вероятности следующих событий: а) утечка расположена не далее 20 км от A или B; б) утечка расположена ближе к A, чем к B.

48. Радар автоинспектора имеет точность 10 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и округляет свои показания в ближайшую сторону. Определить, что происходит чаще — радар округляет скорость «*в пользу водителя*» или «*в пользу ГИБДД*»?

49. При проведении инвентаризации для определения имеющегося на складе количества жидкого химического реактива используется измерительный прибор с ценой деления шкалы 0,2 л. Показания прибора округляются до ближайшего деления шкалы. Найти вероятность того, что ошибка округления не превысит 0,04 л.

50. Ёмкость цистерны для хранения бензина на автозаправочной станции равна 50 т. Найти вероятности событий, состоящих в том, что при случайной проверке в цистерне будет обнаружено: а) менее 5 т бензина; б) более 20 т бензина; в) хотя бы 1 т бензина.

51. Маша тратит на дорогу в институт от 40 до 50 мин, причём любое время в этом промежутке является равновероятным. Найти вероятность того, что в день экзамена она потратит на дорогу от 45 до 50 мин.

52. Чтобы добраться в институт, Петя может воспользоваться автобусом одного из двух маршрутов. Автобусы первого маршрута следуют с интервалом в 18 мин, второго маршрута — с интервалом в 15 мин. Найти вероятность того, что Петя будет ждать автобуса не более 10 мин.

Решение. Выберем в качестве множества элементарных событий Ω прямоугольник со сторонами $T_1 = 18$ мин и $T_2 = 15$ мин (рис. 1.3). Событие A состоит в том, что время, которое Петя будет ждать автобуса, меньше $t = 10$ мин. Элементарные события, благоприятствующие наступлению события A, заштрихованы на рис. 1.3. Поэтому, согласно геометрическому определению вероятности, $\mathbf{P}\{A\} = \frac{V(A)}{V(\Omega)} = \frac{T_1T_2 - (T_1 - t)(T_2 - t)}{T_1T_2} = 1 - \left(1 - \frac{t}{T_1}\right)\left(1 - \frac{t}{T_2}\right)$.

При $T_1 = 18$, $T_2 = 15$, $t = 10$ $\mathbf{P}\{A\} = 1 - \left(1 - \frac{10}{18}\right)\left(1 - \frac{10}{15}\right) = \frac{23}{27}$. ❑

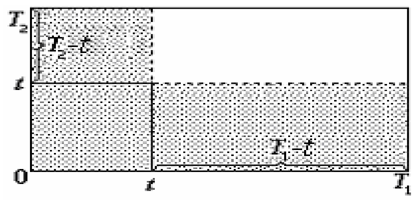

Рис. 1.3. *Множество элементарных событий в задаче 52*

53. Петя и Маша договорились встретиться с 12 до 13 ч на станции метро «*Выхино*» у последнего вагона поезда, идущего в центр города, однако ни один из них не смог точно указать время своего прихода. Они договорились ждать друг друга в течение 15 мин. Найти вероятность их встречи.

54. В условиях предыдущей задачи найти вероятность встречи Пети и Маши, если Петя ждёт уже 10 мин, а Маши всё ещё нет.

55. Петя, Маша и Вася договорились встретиться в большой перерыв, который длится час, около библиотеки. Никто из них не смог точно указать время своего прихода, поэтому они договорились ждать друг друга не более 10 мин. Найти вероятности следующих событий: а) они все встретятся; б) по крайней мере, двое из них встретятся.

56. Рыбаки поймали в пруду 100 рыб, окольцевали их и выпустили назад в воду. На следующий день они поймали 120 рыб, из которых 10 оказались окольцованными. Найти: а) вероятность того, что выловленная рыба окольцована; б) количество рыб в пруду.

Решение. Пусть n — число рыб в пруду, $m_n = 100$ — число окольцованных рыб в пруду, событие A состоит в том, что выловленная рыба окольцована. Тогда вероятность события A равна, согласно классическому определению, $\mathbf{P}\{A\} = \frac{100}{n}$. С другой стороны, поскольку из 120 выловленных рыб $m_{120} = 10$ оказались окольцованы, вероятность события A приближённо равна его относительной частоте: $\mathbf{P}\{A\} \approx \hat{P}_{120}(A) = \frac{m_{120}}{120} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$. Отсюда $\frac{100}{n} \approx \frac{1}{12}$ или $n \approx 1\,200$. ❑

57. Известно, что в среднем из 1 000 выданных кредитов примерно 12 не возвращаются в срок. В текущем году банк выдал 3 000 кредитов. Найти количество кредитов, которые не будут возвращены в срок.

58. Привести примеры событий, для вычисления вероятностей которых неприменим способ расчёта с помощью относительных частот.

§1.4. Аксиоматическое построение теории вероятностей

Класс Σ подмножеств множества элементарных событий Ω называется *полем событий* (*алгеброй событий*), если он содержит достоверное событие ($\Omega \in \Sigma$), а также замкнут относительно операций объединения (если $A, B \in \Sigma$, то $A \cup B \in \Sigma$), пересечения (если $A, B \in \Sigma$, то $A \cap B \in \Sigma$) и дополнения (если $A \in \Sigma$, то $\overline{A} \in \Sigma$). Поле событий Σ называется *σ-полем* (*σ-алгеброй*), если объединение и пересечение бесконечной (счётной) последовательности событий $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \Sigma$ также принадлежат полю Σ: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

При *аксиоматическом построении теории вероятностей* в каждом конкретном пространстве элементарных событий Ω выделяется σ-поле событий Σ, и для каждого события $A \in \Sigma$ задаётся вероятность — числовая функция, определённая на σ-поле событий Σ и удовлетворяющая следующим аксиомам.

Аксиома неотрицательности вероятности:

$$\textit{для всех } A \in \Sigma: \ \mathbf{P}\{A\} \geq 0. \tag{1.36}$$

Аксиома нормированности вероятности:

$$\mathbf{P}\{\Omega\} = 1. \tag{1.37}$$

Аксиома аддитивности вероятности:

$$\textit{для всех } A, B \in \Sigma\textit{, таких, что } A \cap B = \varnothing: \ \mathbf{P}\{A \cup B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\}. \tag{1.38}$$

Во многих случаях вместо аксиомы аддитивности вероятности требуется её расширенный вариант, называемый аксиомой счётной аддитивности вероятности.

Аксиома счётной аддитивности вероятности:

$$\text{для всех } A_1, A_2, \ldots \in \Sigma\text{, таких, что при } i \ne j \;\; A_i \cap A_j = \varnothing: \;\; \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}\{A_i\}. \qquad (1.39)$$

Каждая определённая *теоретико-вероятностная схема* задаётся тройкой $\{\Omega, \Sigma, \mathbf{P}\}$, где Ω — конкретное пространство элементарных событий, Σ — σ-поле событий, выделенное на Ω, $\mathbf{P}$ — вероятность, заданная на σ-поле Σ. Тройка $\{\Omega, \Sigma, \mathbf{P}\}$ называется *вероятностным пространством*.

Из аксиом (1.36) – (1.38) следуют следующие свойства вероятности:

ограниченность вероятности:

$$\text{для всех } A \in \Sigma: \; 0 \le \mathbf{P}\{A\} \le 1; \qquad (1.40)$$

$$\mathbf{P}\{\varnothing\} = 0; \qquad (1.41)$$

$$\text{для всех } A \in \Sigma: \; \mathbf{P}\{\overline{A}\} = 1 - \mathbf{P}\{A\}; \qquad (1.42)$$

$$\text{для всех } A, B \in \Sigma\text{, таких, что } A \subset B: \; \mathbf{P}\{A\} \le \mathbf{P}\{B\}; \qquad (1.43)$$

теорема сложения вероятностей:

$$\text{для всех } A, B \in \Sigma: \; \mathbf{P}\{A \cup B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{A \cap B\}; \qquad (1.44)$$

неравенство треугольника:

$$\text{для всех } A, B \in \Sigma: \; \mathbf{P}\{A \cup B\} \le \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\}; \qquad (1.45)$$

обобщённая теорема сложения вероятностей:

$$\text{для всех } A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Sigma: \; \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} = \mathbf{P}\{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\} = \qquad (1.46)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A_i\} - \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbf{P}\{A_i \cap A_j\} + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \mathbf{P}\{A_i \cap A_j \cap A_k\} - \ldots + (-1)^{n+1} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right\}.$$

В случае $n = 3$ обобщённая теорема сложения вероятностей имеет следующий вид:

$$\text{для всех } A, B, C \in \Sigma:$$

$$\mathbf{P}\{A \cup B \cup C\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} + \mathbf{P}\{C\} - \mathbf{P}\{A \cap B\} - \mathbf{P}\{B \cap C\} - \mathbf{P}\{A \cap C\} + \mathbf{P}\{A \cap B \cap C\}. \qquad (1.47)$$

59. Известно, что курс евро к рублю может возрасти с вероятностью 0,55, а курс доллара к рублю может возрасти с вероятностью 0,35. Вероятность того, что возрастут оба курса, составляет 0,3. Найти вероятность того, что курс евро или доллара по отношению к рублю возрастёт.

Решение. Пусть событие $A_{€}$ состоит в том, курс евро к рублю возрастёт, а событие $A_{\$}$ — в том, что курс доллара к рублю возрастёт. Тогда по условию $\mathbf{P}\{A_{€}\} = 0,55$, $\mathbf{P}\{A_{\$}\} = 0,35$, $\mathbf{P}\{A_{€} \cap A_{\$}\} = 0,3$. Вероятность того, что курс евро или доллара по отношению к рублю возрастёт, по теореме сложения вероятностей составляет $\mathbf{P}\{A_{€} \cup A_{\$}\} = \mathbf{P}\{A_{€}\} + \mathbf{P}\{A_{\$}\} - \mathbf{P}\{A_{€} \cap A_{\$}\} = 0,55 + 0,35 - 0,3 = 0,6$. ❑

60. В партии 100 изделий, из которых шесть имеют дефекты. Партия произвольно разделена на две равные части, которые отправлены двум потребителям. Найти вероятности следующих событий: а) все бракованные изделия достанутся одному потребителю; б) бракованные изделия достанутся обоим потребителям поровну.

61. Петя ищет работу. Он побывал на собеседованиях в банке и страховой компании. Вероятность своего успеха в банке он оценивает в 0,5, а в страховой компании — в 0,6. Кроме того, он рассчитывает, что с вероятностью 0,3 ему поступят предложения от двух организаций сразу. Найти вероятность того, что Петя получит хотя бы одно предложение работы.

62. Менеджер по кадрам разместил в сети *Internet* объявление о том, что банку требуется начальник отдела долговых обязательств, и получил 300 резюме. Из про-

прошлого опыта известно, что вероятность того, что претендент имеет высшее экономическое образование, равна 0,3, вероятность того, что претендент имеет опыт руководящей работы в банке, — 0,7, а вероятность того, что претендент имеет и высшее экономическое образование, и опыт руководящей работы, — 0,2. Оценить количество претендентов, имеющих опыт руководящей работы или высшее экономическое образование. Построить соответствующую диаграмму Вьенна – Эйлера.

63. Событие A состоит в том, что потенциальный покупатель увидел рекламу товара по телевизору, а событие B — в том, что он увидел рекламу в газете. Известно, что $\mathbf{P}\{A\} > 0,8$, $\mathbf{P}\{B\} > 0,4$, Проверить справедливость следующих утверждений: а) A и B несовместны; б) A и B противоположны; в) $\mathbf{P}\{A \cap B\} > 0,2$.

64. Известны вероятности дополнительной потребности фирмы в инженерах на предстоящие два года:

Число инженеров	< 100	100 - 199	200 - 299	300 - 399	400 - 499	…500
Вероятность	0,10	0,15	0,30	0,30	0,10	0,05

Найти вероятности следующих событий: а) на протяжении предстоящих двух лет фирме дополнительно потребуется не менее 400 инженеров; б) на протяжении предстоящих двух лет фирме дополнительно потребуется по меньшей мере 200, но не более 399 инженеров.

65. Результаты опроса 1 000 случайно отобранных молодых людей таковы:

работают	811 чел.,
учатся	518 чел.,
работают и учатся одновременно	356 чел.,
проживают в Москве	752 чел.,
из москвичей:	
работают	570 чел.,
учатся	348 чел.,
работают и учатся одновременно	297 чел.

Определить, содержится ли в этой информации ошибка.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что случайно выбранный молодой человек работает, событие B — в том, что случайно выбранный молодой человек проживает в Москве, событие C — в том, что случайно выбранный молодой человек учится. Так как $n = 1000$ достаточно велико, можно воспользоваться статистическим определением вероятности: $\mathbf{P}\{A\} \approx 0,811$, $\mathbf{P}\{B\} \approx 0,752$, $\mathbf{P}\{C\} \approx 0,518$, $\mathbf{P}\{A \cap B\} \approx 0,570$, $\mathbf{P}\{B \cap C\} \approx 0,348$, $\mathbf{P}\{A \cap C\} \approx 0,356$, $\mathbf{P}\{A \cap B \cap C\} \approx 0,297$. По формуле (1.46) $\mathbf{P}\{A \cup B \cup C\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} + \mathbf{P}\{C\} - \mathbf{P}\{A \cap B\} - \mathbf{P}\{B \cap C\} - \mathbf{P}\{A \cap C\} - \mathbf{P}\{A \cap B \cap C\} \approx 1,104 > 1$. Но вероятность не может быть больше единицы, следовательно, в данной информации содержится ошибка. ❑

66. Петя — староста группы. Когда деканат попросил его подать сведения о студентах своей группы, Петя по памяти составил следующую записку: «*В группе 45 студентов, в том числе 25 юношей; 30 студентов учатся на “хорошо” и “отлично”, в том числе 16 юношей; 28 студентов занимаются спортом, в их числе 18 юношей и 17 студентов, успевающих на “хорошо” и “отлично”; 15 юношей учатся на “хорошо” и “отлично” и занимаются спортом*». Сотрудники деканата сразу определили, что Петя ошибся, и попросили его более аккуратно подойти к выполнению поручения. Как сотрудникам деканата удалось «*поймать*» Петю?

67. Пусть A, B, C — произвольные события. Расположить следующие события в порядке возрастания их вероятностей: $A\cup C, \varnothing, A\setminus B, A\setminus(B\setminus C), \Omega, A\cup B\cup C, A\setminus B\setminus C$.

68. Пусть $A\subset B\cup C$ и $B\cap C=\varnothing$. Проверить справедливость утверждений: а) $\mathbf{P}\{A\cup B\}=\mathbf{P}\{B\}$; б) $\mathbf{P}\{A\cup B\cup C\}=\mathbf{P}\{B\}+\mathbf{P}\{C\}$; в) $\mathbf{P}\{\overline{A}\}\le\mathbf{P}\{\overline{B}\}$; г) $\mathbf{P}\{\overline{A}\}\le\mathbf{P}\{\overline{B}\}+\mathbf{P}\{\overline{C}\}$.

69. В условиях задачи 41 найти вероятности следующих событий: а) угадать не менее трёх чисел; б) угадать хотя бы одно число.

70. Известно, что пять из сорока пассажиров самолёта замешаны в похищении крупной денежной суммы. В аэропорту к трапу самолёта подошёл инспектор уголовного розыска и заявил, что для обнаружения хотя бы одного преступника ему достаточно произвести обыск у шести наугад выбранных пассажиров. Что руководило инспектором: трезвый расчёт или риск?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что среди шести случайно выбранных пассажиров есть хотя бы один преступник, событие $\overline{A}$ — в том, что среди шести случайно выбранных пассажиров нет ни одного преступника. Тогда, используя формулу гипергеометрической вероятности (1.31), в которой $n=40, m=5, l=6$, получим: $\mathbf{P}_{40;5}(6;k)=\dfrac{C_5^kC_{35}^{6-k}}{C_{40}^6}, k=0,1,2,3,4,5$, поэтому

$$\mathbf{P}\{\overline{A}\}=\mathbf{P}_{40;5}(6;0)=\frac{C_5^0C_{35}^6}{C_{40}^6}=\frac{\dfrac{5!}{0!\cdot5!}\cdot\dfrac{35!}{6!\cdot29!}}{\dfrac{40!}{6!\cdot34!}}=\frac{\cancel{5!}\cdot35!\cdot\cancel{6!}\cdot34!}{\cancel{0!}\cdot\cancel{5!}\cdot\cancel{6!}\cdot29!\cdot40!}=\frac{35!\cdot34!}{29!\cdot40!}=\frac{34\cdot33\cdot32\cdot31\cdot30}{40\cdot39\cdot38\cdot37\cdot36}\approx0,4229,$$ откуда $\mathbf{P}\{A\}=$

$=1-\mathbf{P}\{\overline{A}\}\approx1-0,4229=0,5771>0,5$. Видимо, это и побудило инспектора назвать число «*шесть*», хотя, на взгляд авторов, инспектор, скорее, рискует «*пятьдесят на пятьдесят*». ❑

71. Доказать, что если класс Σ подмножеств множества элементарных событий Ω, замкнутый относительно операции дополнения, замкнут относительно операции объединения, то он замкнут и относительно операции пересечения.

Решение. По условию, если $A,B\in\Sigma$, то $\overline{A},\overline{B}\in\Sigma$ (так как Σ замкнут относительно операции дополнения). Так как $\overline{A},\overline{B}\in\Sigma$, $\overline{A}\cup\overline{B}\in\Sigma$ (так как Σ замкнут относительно операции объединения). Так как $\overline{A}\cup\overline{B}\in\Sigma$, $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\in\Sigma$ (так как Σ замкнут относительно операции дополнения). Но согласно правилу де Моргáна $A\cap B=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$, поэтому $A\cap B=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\in\Sigma$, т. е. класс Σ замкнут относительно операции пересечения. ❑

72. Записать обобщённую теорему сложения вероятностей для случая четырёх событий.

73. Проверить выполнение аксиом вероятности (1.36) – (1.38) для классической вероятностной схемы.

74. Проверить выполнение аксиом вероятности (1.36) – (1.38) для геометрической вероятностной схемы.

75. Вывести из аксиом вероятности (1.36) – (1.38) свойства (1.40) – (1.47).

Глава 2. Условные вероятности. Последовательности испытаний

§2.1. Условные вероятности

Как уже было отмечено, говорить о вероятности наступления какого-либо события как о мере возможности наступления этого события можно лишь при выполнении определённого комплекса условий опыта. Так, если к комплексу условий, при которых изучалась вероятность наступле-