Ответы

Глава 1

1. 20. **2.** 33. **3.** $P_{10} = 3\,628\,800$. **4.** $P_8 = 8! = 40\,320$. **5.** а) $A_{10}^2 = 90$; б) $C_{10}^2 = 45$. **6.** а) $C_8^3 = 56$; б) $A_8^3 = 336$. **7.** $C_{12}^7 C_{15}^7 = 5\,096\,520$. **8.** $C_{30}^3 C_{20}^3 C_{80}^2 C_5^2 C_7^1 C_{90}^1 = 92\,142\,187\,200\,000$. **9.** а) $A_{20}^5 = 1\,860\,480$; б) $A_{16}^5 = 524\,160$. **10.** $C_9^5 = 126$ замков и $4C_9^5 = 5\,040$ ключей. **11.** 99. **12.** $\tilde{A}_{12}^3 \tilde{A}_{10}^3 = 12^3 \cdot 10^3 = 1\,728\,000$. **19.** $C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \ldots + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1\,024$. **21.** $C_{16}^{10} = 8\,008$. **22.** а) $\tilde{A}_{10}^3 = 10^3 = 1\,000$; б) $\tilde{C}_{10}^3 = C_{10+3-1}^3 = 220$. **23.** 6 слов: «*ммаа*», «*мама*», «*маам*», «*амма*», «*амам*», «*аамм*». **24.** $\tilde{P}_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \dfrac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151\,200$. **26.** Выпадение чётного числа и выпадение нечётного числа при бросании игральной кости. **27.** Выпадение единицы и выпадение двойки при бросании игральной кости. **28.** а) B; б) A. **29.** При условии $A \subset B$. **30.** а) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$; б) $A \cap B \cap \overline{C}$; в) $A \cap B \cap C$; г) $A \cup B \cup C$; д) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$; е) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$; ж) $\overline{A \cap B \cap C}$; з) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$; и) $(\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = ((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \setminus (A \cap B \cap C)$. **31.** а) A; б) B; в) $A \cap C$; г) $B \cup C$. **32.** в), г), е), з), и), к), л), м) — верны, остальные неверны. **34.** Да. **35.** Да. **36.** 0,3. **37.** 3/9. **38.** $1/C_{22}^2 = 1/231$. **39.** 0,656. **41.** Вероятность угадать i чисел из 36 $\mathbf{P}\{A_i\} = C_5^i C_{31}^{5-i} / C_{36}^5,\ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, поэтому искомые вероятности составляют 0,55; 0,42; 0,12; 0,012; 0,0004; $3 \cdot 10^{-6}$. **42.** а) $2^8 C_{10}^8 / C_{20}^8 = 0{,}09145$; б) $10 \cdot 2^6 C_9^6 / C_{20}^8 = 0{,}42677$; в) $2^4 C_{10}^2 C_8^4 / C_{20}^8 = 0{,}40010$. **43.** $\mathbf{P}\{A_n\} = C_4^n \sum\limits_{k=0}^{4-n} 2^k C_{4-n}^k C_{44}^{13-k-2n} / C_{52}^{13}$. **44.** а) $1/6^5 \approx 0{,}00013$; б) 5/324. **45.** а) 2/9; б) 1/5. **46.** 1/6. **47.** а) 1/5; б) 1/2. **48.** Одинаково. **49.** 1/5. **50.** а) 0,1; б) 0,6; в) 0,98. **51.** 1/2. **52.** 23/27. **53.** 7/16. **54.** 19/288. **55.** а) 2/27; б) 83/108. **56.** а) 1/12; б) 1 200. **57.** 36. **58.** Такими примерами являются уникальные события, которые невозможно повторить в тех же самых условиях: возникновение войн, появление научных открытий и гениальных произведений искусства и т. п. **59.** 0,6. **60.** а) $(C_{94}^{44} C_6^6 + C_{94}^{50} C_6^0) / C_{100}^{50} \approx 0{,}027$; б) $C_{94}^{47} C_6^3 / C_{100}^{50} \approx 0{,}322$. **61.** 0,8. **62.** 240. Диаграмма Вьенна – Эйлера представлена на рис. О.1. **63.** а) Неверно; б) неверно; в) верно. **64.** а) 0,15; б) 0,6. **65.** Да. **66.** Сотрудники деканата попытались вычислить по данным, представленным Петей, вероятность того, что случайно выбранный студент либо окажется юношей, либо занимается спортом, либо учится на «*хорошо*» и «*отлично*» и получили 46/45 > 1, а вероятность не может быть больше единицы. **67.** $\varnothing, A \setminus B \setminus C, A \setminus B, A \setminus (B \setminus C), A \cup C, A \cup B \cup C, \Omega$. **68.** а) Неверно; б) верно; в) неверно; г) неверно. **69.** а) 0,013; б) 0,45. **70.** Трезвый расчёт. **72.** $\mathbf{P}\{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\} = \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \mathbf{P}\{A_3\} + \mathbf{P}\{A_4\} - \mathbf{P}\{A_1 \cap A_2\} - \mathbf{P}\{A_1 \cap A_3\} - \mathbf{P}\{A_1 \cap A_4\} - \mathbf{P}\{A_2 \cap A_3\} - \mathbf{P}\{A_2 \cap A_4\} - \mathbf{P}\{A_3 \cap A_4\} + \mathbf{P}\{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\}$.

Глава 2

76. а) 0,02; б) 0,26. **77.** 0,5; 5/6; 5/8; события A и B зависимы. **78.** 1/15. **79.** 1/6. **80.** Не являются. **81.** а) 1/6; б) 3/5; в) 1/7. **82.** 0,8. **83.** а) 0,73; б) 0,48. **84.** 0,3. **85.** 0,7. **86.** Безразлично. **87.** а) 1/5; б) 1/5; в) 9/245. **88.** а) 57/115; б) 19/46; в) 2/23; г) 229/230; д) 1/230. **89.** p. **92.** Пусть в корзине находится 4 шара, на ощупь неразличимых: красный, жёлтый, зелёный и синий, и из этой корзины наудачу извлекается один шар. Пусть событие A состоит в том, что извлечён красный или жёлтый шар, B — красный или зелёный, C — красный или синий. Тогда $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{B\} = \mathbf{P}\{C\} = 1/2$, $\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{B \cap C\} = \mathbf{P}\{A \cap C\} = 1/4$. **93.** Пусть в корзине находится 2 шара, на ощупь неразличимых: красный и жёлтый, и из этой корзины наудачу извлекается один шар. Пусть событие A состоит в том, что извлечён красный шар, B — жёлтый шар. Тогда $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{B\} = 1/2$, но, очевидно, $\mathbf{P}\{A \cap B\} = 0 \ne (1/2)^2$. **96.** а) Да; б) нет. **97.** а) Нет; б) нет. **98.** а) Да; б) нет. **99.** Пусть в корзине находится 4 шара, на ощупь неразличимых: красный, жёлтый, зелёный и синий, и из этой корзины наудачу извлекается один шар. Пусть событие A состоит в том, что извлечён красный или жёлтый шар, B — красный или зелёный, C — красный или синий. Тогда $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{B\} = \mathbf{P}\{C\} = 1/2$,

$\mathbf{P}\{A\cap B\}=\mathbf{P}\{B\cap C\}=\mathbf{P}\{A\cap C\}=1/4$, но $\mathbf{P}\{A\cap B\cap C\}=1/4\neq(1/2)^3$. **102.** Да. **105.** 0,151. **106.** 0,4. **107.** 0,066. **108.** 2/3. **109.** 0,744; данная система упускает значительное число привлекательных инвестиций. **110.** а) 0,68; б) 0,6; в) 3/17; г) 9/16. **111.** а) 0,3; б) 7/15; в) 3/35. **112.** 0,2. **113.** а) 1/3; б) 2/3. **114.** 0,7. **115.** а) 0,091; б) 0,9. **116.** Общее решение уравнения $p(x)=[2p(x+1)+3p(x-1)]/5$ имеет вид $p(x)=C_1\left(\frac{1-2/5}{2/5}\right)^x+C_2$, с учётом граничных условий $p(x)=\frac{(3/2)^x-(3/2)^s}{1-(3/2)^s}$. При $x=100$, $s=110$ $p(100)=\frac{(3/2)^{100}-(3/2)^{110}}{1-(3/2)^{110}}\approx 0{,}983$, а при $x=100, s=1\,000$ $p(100)\approx 1$, т. е. Петя разорится почти наверняка. **117.** Вероятность разорения в задаче 115 не изменится, а в задаче 116 уменьшится: $p^{(2\text{ руб.})}(x)=\frac{1+(3/2)^s}{(3/2)^x+(3/2)^s}p^{(1\text{ руб.})}(x)<p^{(1\text{ руб.})}(x)$. **118.** $m(x)=x(s-x)$, при $x=100, s=110$ $m(100)=1000$, а при $x=100, s=1000$ $m(100)=90\,000$. **119.** $\mathbf{P}_m(A)=\frac{m}{n}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{k}$; при $n\to\infty$ $m_n\approx\frac{n}{e}$, где $e=2{,}718281828\ldots$ — основание натурального логарифма. **120.** Первый сундук: 1 белый шар и 2 чёрных шара, второй сундук: 1 белый шар, тогда вероятность извлечения белого шара наибольшая и равна 2/3. **121.** $\mathbf{P}_3(0)=0{,}027$, $\mathbf{P}_3(1)=0{,}189$, $\mathbf{P}_3(2)=0{,}441$, $\mathbf{P}_3(3)=0{,}343$. **122.** 2 чел. **123.** Наиболее вероятная величина штрафа за 48 поездок равна 20 руб., что существенно меньше стоимости проездного билета. **124.** 125. **125.** 63/256. **126.** а) 0,034; б) 0,343. **127.** $\mathbf{P}_4(3)=1/4$, $\mathbf{P}_8(5)=7/32<\mathbf{P}_4(3)$, т. е. выиграть 3 партии из 4 вероятнее, чем 5 партий из 8. **128.** $\mathbf{P}_4(3)+\mathbf{P}_4(4)=5/16$, $\mathbf{P}_8(5)+\mathbf{P}_8(6)+\mathbf{P}_8(7)+\mathbf{P}_8(8)=93/256>\mathbf{P}_4(3)+\mathbf{P}_4(4)$, т. е. выиграть не менее 5 партий из 8 вероятнее, чем выиграть не менее 3 партий из 4. **129.** а) 0,343; б) 0,441. **130.** 7. **131.** 4. **132.** 12. **133.** 0,976. **134.** а) 0,31; б) 0,89; в) 0,4. **135.** $C_5^2(1/3)^2(2/3)^3$. **136.** Вероятность выигрыша Пети равна 112/243, вероятность выигрыша Маши равна 131/243, значит, выиграла Маша. **137.** Петя должен забрать 77 руб. 34 коп., а Вася 22 руб. 66 коп. **138.** $\mathbf{P}\{A_i\}=C_{2n-r}^{n}/2^{2n-r}$. **142.** 0,027. **143.** 0,2. **144.** а) 0,27; б) 0,865; в) 8. **145.** а) 0,107; б) за 5 дней. **146.** 0,637.

Глава 3

149. $c\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$. **150.** $c=1/4$; $\mathbf{P}\{X\geq 1\}=3/4$. **151.** $a=2$; $\mathbf{P}\{1\leq X<2{,}5\}=0{,}25$. **152.** Нет. **154.** $F(X)=\mathbf{P}\{X<x\}=$

$$=\begin{cases}0, & -\infty<x\leq x_1,\\ p_1, & x_1<x\leq x_2,\\ p_1+p_2, & x_2<x\leq x_3,\\ \ldots & \ldots\\ \sum_{i=1}^{l}p_i, & x_l<x\leq x_{l+1},\\ \ldots & \ldots\\ 1, & x_n<x\leq+\infty.\end{cases}$$

156. $p_i=F(x_{i+1})-F(x_i)$. **158.**

X	0	100	500	2000
p	0,85	0,10	0,04	0,01

; кривая распределения представлена на рис. О.2; $F(X)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ 0{,}85, & 0<x\leq 1,\\ 0{,}95, & 1<x\leq 5,\\ 0{,}99, & 5<x\leq 20,\\ 1, & x>20;\end{cases}$ $\mathbf{P}\{X<500\}=0{,}95$; $\mathbf{P}\{X<2\,100\}=1$; $\mathbf{P}\{-100<X\leq 1\,000\}=0{,}99$; $\mathbf{M}X=0{,}5$; $\mathbf{D}X=4{,}85$. **159.** а) 0,635; б) 0,0425; в) 0,9575. **160.** $\mathbf{M}X=1{,}585$; $s_X=1{,}838$. **161.**

$X_б$	$-10\,000$	51 000
p	0,001	0,999

;

$X_{с/к}$	$-500\,000$	10 000
p	0,001	0,999

; $\mathbf{M}X_б=50\,939$; $\mathbf{M}X_{с/к}=9\,500$. **162.** Выгоднее обратиться к детективу ($\mathbf{M}T=2{,}4$ дня). **163.**

N	1	2	3
p	1/3	2/9	4/9

; $\mathbf{M}T=$ 1ч 3 мин 20 с. **164.** $\bar{Q}_1=4$; $r_1=4{,}4$; $\bar{Q}_2=2$; $r_2=3{,}3$; $\bar{Q}_3=2{,}5$; $r_3=6{,}8$; $\bar{Q}_4=1{,}5$;

$r_4 = 4{,}5$; график «*риск – доходность*» представлен на рис. О.3; оптимальной по Парето является 4-я операция. **165.** $\bar{Q}_1 = 4{,}81$; $r_1 = 1{,}77$; $\bar{Q}_2 = 4{,}16$; $r_2 = 3{,}57$; $\bar{Q}_3 = 7$; $r_3 = 2{,}30$; $\bar{Q}_4 = 2{,}81$; $r_4 = 2{,}54$; график «*риск – доходность*» представлен на рис. О.4; оптимальными по Парето являются 1-я и 3-я операции. **166.** $\bar{Q}_1 = 4$; $r_1 = 4{,}36$; $\bar{Q}_2 = 3$; $r_2 = 6{,}40$; $\bar{Q}_3 = 3{,}5$; $r_3 = 3{,}90$; график «*риск – доходность*» представлен на рис. О.5; оптимальными по Парето являются 1-я и 3-я операции; лучшая операция — первая, худшая — вторая; при $g = 0{,}5$ лучшей операцией становится третья. **167.** $\mathbf{M}X = 0{,}7$; $\mathbf{M}Y = 0{,}8$; $\mathbf{D}X = 0{,}41$; $\mathbf{D}Y = 3{,}36$; $\begin{array}{c|cccccc} Z & -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p & 0{,}03 & 0{,}07 & 0{,}03 & 0{,}07 & 0{,}24 & 0{,}56 \end{array}$; $\mathbf{M}Z = 1{,}97$; $\mathbf{D}Z = 2{,}77$; (3.14) и (3.22) справедливы; $\begin{array}{c|ccc} V & -2 & 0 & 2 \\ \hline p & 0{,}31 & 0{,}1 & 0{,}59 \end{array}$; $\mathbf{M}V = 0{,}56$; $\mathbf{D}V = 3{,}29$; (3.15) справедливо; $\begin{array}{c|cc} W & -1 & 0 \\ \hline p & 0{,}1 & 0{,}9 \end{array}$; $\mathbf{M}W = 0{,}1$; $\mathbf{D}W = 0{,}09$. **168.** $\mathbf{D}X = \mathbf{D}Y = 4$. **169.** Пусть X задана рядом распределения $\begin{array}{c|cc} X & 1 & 2 \\ \hline p & 1/3 & 2/3 \end{array}$, $Y = X$, тогда X и Y будут зависимы, $\mathbf{M}X = \mathbf{M}Y = 5/3$, $\mathbf{M}(XY) = 3 \neq (5/3)^2$. **170.** $\mathbf{D}(XY) = \mathbf{M}(X^2)\mathbf{M}(X^2) - (\mathbf{M}X)^2(\mathbf{M}Y)^2$. **172.** $\begin{array}{c|ccc} Z & 0 & 25 & 100 \\ \hline p & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{array}$, $\begin{array}{c|cccccc} V & -50 & -25 & 0 & 25 & 50 & 100 \\ \hline p & 0{,}04 & 0{,}1 & 0{,}36 & 0{,}26 & 0{,}2 & 0{,}04 \end{array}$.

173. $\begin{array}{c|ccccc} X & 444{,}44 & 666{,}67 & 1000{,}00 & 1500{,}00 & 2250{,}00 \\ \hline p & 1/16 & 1/8 & 5/16 & 1/4 & 1/4 \end{array}$; $\mathbf{M}X = 1361{,}11$. **174.** 0,564. **177.** $1/n$. **181.** $\begin{array}{c|cccccc} X & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline p & \frac{1}{243} & \frac{10}{243} & \frac{40}{243} & \frac{80}{243} & \frac{80}{243} & \frac{32}{243} \end{array}$;

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1/243, & 0 < x \le 1, \\ 11/243, & 1 < x \le 2, \\ 51/243, & 2 < x \le 3, \\ 131/243, & 3 < x \le 4, \\ 211/243, & 4 < x \le 5, \\ 1, & x > 5; \end{cases}$$

$\mathbf{M}X = 10/3$; $\mathbf{D}X = 10/9$; график функции распределения представлен на рис. О.6.

182. $\begin{array}{c|ccccc} \text{Число правильных ответов}, X & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \text{Число экзаменующихся}, 256\mathbf{P}\{X = x_i\} & 81 & 108 & 54 & 12 & 1 \end{array}$. **183.** $\begin{array}{c|ccccc} X & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline p & 0{,}0016 & 0{,}0256 & 0{,}1536 & 0{,}4096 & 0{,}4096 \end{array}$; таким же. **184.** $\begin{array}{c|cccc} X & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p & 1/64 & 9/64 & 27/64 & 27/64 \end{array}$; $\mathbf{M}X = 9/4$; $\mathbf{D}X = 9/16$. **185.** 5/3. **186.** $\mathbf{M}X = 9$; $\mathbf{P}\{X = 10\} = 0{,}35$. **187.** $\mu_T = 2{,}245$; $\sigma_T = 7{,}245$; ряд распределения дохода от исполнения опциона «*колл*»: $\begin{array}{c|ccc} \vartheta_{(4)} & 0 & 2{,}737 & 12{,}182 \\ \hline p & 0{,}533 & 0{,}341 & 0{,}126 \end{array}$. **189.** 1000. **190.** 5. **191.** $\begin{array}{c|ccccc} N & 1 & 2 & \ldots & k & \ldots \\ \hline p & 1/365 & (364/365)(1/365) & \ldots & (364/365)^{k-1}(1/365) & \ldots \end{array}$; $\mathbf{M}N = 365$.

192. Аполлон Митрофанович играет в среднем 37 раз, при этом его средний выигрыш за один раз равен $-7/37$ руб., т. е. в среднем он каждый раз проигрывает 7/37 руб. и выходит из казино, оставив там 7 руб. **194.** $\mathbf{P}\{X = 2\} = 0{,}27$; $\mathbf{P}\{X > 1\} = 0{,}59$; $\mathbf{P}\{0 < X < 3\} = 0{,}55$; $\mathbf{P}\{X = 1 | X > 0\} = 0{,}31$; график функции распределения представлен на рис. О.7. **195.** $\mathbf{P}\{X = 7\} \approx 0{,}004$, $\mathbf{P}\{X \ge 7\} \approx 0{,}005$, $\mathbf{M}X = \mathbf{D}X = 2$, $\sigma_X \approx 1{,}41$. **196.** а) 0,33; б) 0,9992; в) $\mathbf{M}X = \mathbf{D}X = 0{,}4$. **197.** 0,993; $\mathbf{M}X = \mathbf{D}X = 5$. **200.** а) 0,091; б) 0,218; в) 0,909. **201.** 0,865. **202.** $F_T(t) = 1 - e^{-\mu t}$. **203.** $c = 2{,}5$; $\mathbf{M}X = 5/3$; $\sigma_X = 2\sqrt{5}/3 \approx 1{,}49$; $x_{\min} \approx 1{,}32$. **204.** $c = 3$; $\mathbf{M}X = 1{,}5$; $\sigma_X = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87$; $x_{\min} = \sqrt[3]{45}/3 \approx 3{,}56$. **205.** $a = 0{,}5$; $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 1 & x > 2; \end{cases}$ $\mathbf{M}X = 4/3$; $\mathbf{D}X = 2/9$; $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| < 0{,}5\} = 2/3$; графики $f_X(x)$ и $F_X(x)$ представлены на рис. О.8 и О.9. **206.** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [-2; 2], \\ 0, & x \notin [-2; 2]; \end{cases}$ $\mathbf{M}X = 0$; $\mathbf{D}X = 4/3$. **208.** $\mathbf{P}\{X > 10\} = 0{,}9$; $\mathbf{P}\{40 < X < 90\} = 0{,}5$; $\mathbf{P}\{X = 50\} = 0$; $\mathbf{P}\{X > 50 | X < 80\} = 3/8$; $\mathbf{M}X = 50$; $\mathbf{D}X = 2500/3$. **209.** 0,68. **210.** $\mathbf{M}X = 5$; $\mathbf{D}X = 3$; $\mathbf{P}\{6 \le X \le 9\} = \mathbf{P}\{3 < X < 5\} = 2/3$. **211.** $\mathbf{P}\{|X| > 0{,}03\} = 0{,}4$; $\mathbf{M}X = 0$; $\mathbf{D}X = 1/120$; $\sigma_X = 1/(2\sqrt{30}) \approx 0{,}09$.

214. $\mathbf{P}\{|X-\mathbf{M}X|<3\sigma_X\}=\sqrt{3}/4\approx 0{,}866$. **215.** $\mathbf{M}(XY)=\frac{(a+b)(c+d)}{4}$; $\mathbf{D}(XY)=\frac{7(ac-bd)^2+7(ad-bc)^2+8abcd}{144}-\frac{2ab(c^2+d^2)+2cd(a^2+b^2)}{144}$. **216.** $\mathbf{M}X=6$ мин; $\mathbf{D}X=36$; $\mathbf{P}\{X<7|X>6\}\approx 0{,}154$. **217.** $\mathbf{P}\{X>1\}\approx 0{,}135$; $\mathbf{P}\{X<2\}\approx 0{,}982$; $\mathbf{P}\{X>-1\}=1$; $\mathbf{P}\{X=3\}=0$; $\mathbf{P}\{X>1|X<3\}\approx 0{,}319$; $\mathbf{M}X=0{,}5$; $\mathbf{D}X=0{,}25$. **218.** 0,133. **219.** 0,221. **220.** $\mathbf{P}\{X>3\}\approx 0{,}368$; $\mathbf{P}\{X<1\}\approx 0{,}283=28{,}3\%$; $\mathbf{P}\{X>10\,|\,X<11\}\approx 0{,}283$; $\mathbf{M}X=1/3$; $\mathbf{D}X=1/9$. **221.** $\mathbf{P}\{X<7\}\approx 0{,}877$; $\mathbf{M}X=10/3$. **222.** $e^{-\mu a}-e^{-\mu b}$. **223.** а) $1-e^{-\mu t}$; б) $1-e^{-\mu t}$. **225.** $F(x)=$ $=\frac{1}{16\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-100)^2}{512}}dz=\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{x-100}{16}\right)$, её график представлен на рис. 3.1а; $f(x)=\frac{1}{16\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-100)^2}{512}}=$ $=\frac{1}{16}\varphi\left(\frac{x-100}{16}\right)$, её график представлен на рис. 3.1б. **226.** а) 0,0062: б) 0,0594; в) 0,3783; г) 0,5; д) 0,8944; е) 0,7888. **227.** 0,9973. **228.** 0,326. **229.** Кривая распределения представлена на рис. О.10; график функции распределения представлен на рис. О.11; $f(1)=f(-1)=0{,}2420$; $f(2{,}25)=0{,}0317$; $F(1)=0{,}8413$; $F(-1)=0{,}1587$; $F(2{,}25)=0{,}9878$; $\mathbf{P}\{X<1\}=0{,}8413$; $\mathbf{P}\{X>-1\}=0{,}8413$; $\mathbf{P}\{|X|<1\}=0{,}6826$; $\mathbf{P}\{|X|<3\}=0{,}9973$; $\mathbf{P}\{0<X<3\}=0{,}49865$. **230.** $\mathbf{P}\{X>2\}=0{,}1587$; $\mathbf{P}\{X<2\}=0{,}8413$; $\mathbf{P}\{0<X<2\}=0{,}6826$; $\mathbf{P}\{X<2|X>0\}=0{,}8114$. **231.** $\mathbf{P}\{|X-\mathbf{M}X|<3\sigma_X\}\approx 0{,}9973$. **233.** $\mathbf{P}\{X>1\}=0{,}6293$; $\mathbf{P}\{-2<X\le 2\}=0{,}4082$; $\mathbf{P}\{X<2\}=0{,}5$; $\mathbf{P}\{X<2|X>0\}=0{,}3292$; правило трёх сигм: $\mathbf{P}\{|X-2|<9\}=\mathbf{P}\{-7<X<11\}\approx 0{,}9973$. **235.** а) 0,03; б) 0,01; в) 0,78; г) 0,04 **236.** $\mathbf{M}X\approx 50{,}6$; $\sigma_X\approx 36$. **237.** Информация недостоверна, на самом деле брак составляет 13,36% всей продукции. **238.** 0,3174. **239.** Правило шести сигм означает, что на каждый миллиард единиц выпущенной продукции допустимо не более двух некачественных. **240.** Цена актива при его моделировании с помощью нормального распределения может с положительной вероятностью принимать отрицательные значения, что противоречит здравому смыслу. Случайная величина, распределённая по логнормальному закону, может принимать с положительными вероятностями только неотрицательные значения. **242.** а) 8866,87 ден. ед.; б) 0,536. **243.** 0,844. **244.** а) 0,95; б) 0,9; в) 0,94; г) 0,02; д) 1; е) 0,735. **245.** а) 0,95; б) 0,945; в) 0,964. **246.** 0,05. **247.** $F(x)=\begin{cases}0, & x<-l,\\ \frac{(l+x)^2}{2l^2}, & -l\le x<0,\\ 1-\frac{(l+x)^2}{2l^2}, & 0\le x<l,\\ 1, & x\ge l,\end{cases}$ $\mathbf{M}X=0,\mathbf{D}X=l^2/6$. **248.** $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $\mathbf{M}X=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. **250.** $\begin{array}{c|cccc} X & 0 & 1 & 2 & 4\\ \hline p & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4\end{array}$, $\mathbf{M}X=2{,}1$, $\mathbf{D}X=2{,}69$, $m_Y(t)=0{,}2+0{,}3e^t+0{,}1e^{4t}+0{,}4e^{16t}$.

251. $m_X(t)=0{,}2e^{-t}+0{,}3+0{,}5e^t$. **254.** $m_X(t)=e^{at+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$. **255.** $\nu_4(X)=\left(e^{t^2/2}\right)^{(4)}\Big|_{t=0}=\left(3e^{t^2/2}+6t^2e^{t^2/2}+t^4e^{t^2/2}\right)\Big|_{t=0}=3$.

256. $m_X(t)=\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$, $\mathbf{M}X=p$. **257.** $m_X(t)=\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$. **258.** $m_X(t)=\frac{\mu}{\mu-t}$, $\nu_2(X)=\frac{2}{\mu^2}$, $\nu_3(X)=\frac{2}{\mu^3}$. **260.** Модой является любое число из полуинтервала $\mathbf{Mo}X\in[a;b)$, $\mathbf{Me}X=(a+b)/2$. **261.** $\mathbf{Mo}X=0$, $\mathbf{Me}X=\ln 2/\mu$. **264.** $\mathbf{A}_X=\mathbf{E}_X=0$. **265.** $\mathbf{A}_X=1/\sqrt{\lambda}$, $\mathbf{E}_X=1/\lambda$. **266.** $\mathbf{A}_X=0$, $\mathbf{E}_X=-1{,}2$. **267.** $\mathbf{A}_X=0$, $\mathbf{E}_X=3$ (*указание*: использовать интеграл $\int_0^{+\infty}x^ne^{-ax}dx=\frac{n!}{a^{n+1}}$). **268.** а) –1,96; 1,96; б) 1,65. **269.** а) –2,23; 2,23; б) 10,85; 31,41.

270. 9,55; 0,05. **274.** 0,26. **276.** $\begin{array}{c|ccc} X & -1 & 0 & 1\\ \hline p & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5\end{array}$, $\begin{array}{c|cc} Y & 0 & 1\\ \hline p & 0{,}5 & 0{,}5\end{array}$, $\mathbf{P}\{X<Y\}=0{,}4$. **277.** $f(x,y)=\begin{cases}(\ln 2)^2 2^{-x-y}, & x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, & \text{иначе}.\end{cases}$

278. $F(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin x+\sin y-\sin(x+y)}{2}, & 0\le x<\frac{\pi}{2},\ 0\le y<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{иначе}.\end{cases}$ **285.** $\begin{array}{c|ccc} X & -1 & 0 & 1\\ \hline p & 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}4\end{array}$, $\begin{array}{c|cc} Y & 1 & 2\\ \hline p & 0{,}75 & 0{,}25\end{array}$, $\begin{array}{c|ccc} X|Y=2 & -1 & 0 & 1\\ \hline p & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4\end{array}$, X и Y зависимы, $\begin{array}{c|cccc} X+Y & 0 & 1 & 2 & 3\\ \hline p & 0{,}15 & 0{,}4 & 0{,}35 & 0{,}1\end{array}$. **286.** $c=\sqrt{3}/\pi$, $f(x)=[\sqrt{3}/(2\sqrt{\pi})]e^{-0{,}75x^2}$, $f(y)=[\sqrt{3}/\sqrt{\pi}]e^{-3y^2}$, X и Y зависимы. **289.** –0,25. **290.** $\mathrm{cov}(X,Y)=r(X,Y)=0$. **292.** –0,64. **293.** а) Всегда; б) никогда (они могут быть независимыми только при $\mathbf{M}Z^2=(\mathbf{M}Z)^2$, т. е. при $\mathbf{D}Z=0$). **295.** $\mathrm{cov}(X,Y)=0{,}0725$, $r(X,Y)=0{,}044$.

296. Значение ковариации, полученное Машей, оказалось в 100 раз меньше значения, полученного Петей. **297.** Значения коэффициента корреляции, полученные Машей и Петей, оказались одинаковыми. **298.** 20. **299.** $\sqrt{t/(t+t)}$. **300.** $\mathbf{M}(0,35X + 0,65Y) \approx 9,95\%$, $\sigma_{(0,35X+0,65Y)} = 8,39\%$. **302.** 0,6. **303.** Компоненты двумерного равномерного распределения в круге радиусом r с центром в начале координат. **305.** $\begin{array}{c|ccc} X \mid Y=0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline p & 0 & 1/5 & 4/5 \end{array}$. **306.** $\begin{array}{c|cc} \mathbf{M}(X \mid Y) & -0,2 & 0,8 \\ \hline p & 0,5 & 0,5 \end{array}$. **309.** $Y \sim R(0;1)$. **310.** $Y \sim R(0;1)$. **311.** $f_Y(y) = \;= \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}$.

312. $f_Y(y) = \begin{cases} f_X(1-y)+f_X(1+y), & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$ **313.** $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y \in (0;1), \\ 0, & y \notin (0;1). \end{cases}$ **314.** $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^n, & x \in [0;1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

315. $f_X(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1}, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1]. \end{cases}$ **317.** $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}$, где $a = a_1 + a_2$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$.

318. $X \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_i^2}\right)$. **319.** 0,1687. **320.** $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 3, \\ (x-3)/8, & 3 \leq x < 5, \\ 1/4, & 5 \leq x < 7, \\ (9-x)/8, & 7 \leq x < 9, \\ 0, & x \geq 9. \end{cases}$ **321.** $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/16, & 0 \leq x < 2, \\ 1/8, & 2 \leq x < 8, \\ (10-x)/16, & 8 \leq x < 10, \\ 0, & x \geq 10. \end{cases}$

322. $P(\lambda_1 + \lambda_2)$. **323.** 1/3.

Глава 4

328. $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| < 3\sigma_X\} \geq \frac{8}{9}$. **329.** $\mathbf{P}\{100 \leq X \leq 300\} > 0,99$. **330.** а) Согласно неравенству Маркова $\mathbf{P}\{X < r\} \geq -c$, при этом $c = \frac{a-r}{r} > 0$, т. е. неравенство Маркова не даёт никакой информации, поскольку вероятность любого события заведомо больше произвольного отрицательного числа; б) $\mathbf{P}\{X < r\} = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$. **331.** Число вкладчиков не превышает 1 000. **332.** а) $\mathbf{P}\{X \leq 2\,000\} \geq 0,5$; б) $\mathbf{P}\{X \leq 2\,000\} \geq 0,96$, т. е. неравенство Чебышёва даёт более точную оценку. **333.** $\mathbf{P}\{|\hat{p} - p| \leq 0,04\} \geq 0,929$. **341.** Пусть случайные величины X_n $(n = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ задаются с помощью ряда распределения $\begin{array}{c|cc} X & 0 & n \\ \hline p & \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} \end{array}$, при этом последовательность $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X = 0$ (действительно, зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда для всех n, начиная с некоторого $n_0 > \varepsilon$, $\mathbf{P}\{|X_n - 0| > \varepsilon\} = \{\text{так как } X_n > 0\} = \mathbf{P}\{X_n > \varepsilon\} = \mathbf{P}\{X_n = n\} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$), однако при этом $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{M}X_n = 1$, а $\mathbf{M}X = 0$. **347.** 0,975. **349.** 0,999. **350.** 12 691 долл. **351.** $[-0,866 \cdot 10^{2-m}; 0,866 \cdot 10^{2-m}]$. **352.** $X \sim N(300;30)$. **356.** а) $\mathbf{P}\{0,9 \leq \hat{p} \leq 0,95\} = 0,0024$; б) $\mathbf{P}\{|p - \hat{p}| \leq 0,04\} \geq 0,9998$, интегральная теорема Муавра – Лапласа даёт более точный результат, чем оценка с помощью неравенства Чебышёва. **357.** 0,24; 3840. **361.** а) 0; б) 0,00044; в) 0,088; г) 0. **362.** 0,05. **363.** 0,747. **364.** а) 0,999999999876; б) 0,0008; в) 0,000006. **365.** а) 0; б) 0,995. **366.** 3 359 145 руб.; 817 руб. 97 коп. **367.** а) 2,181 и 7,181; б) 2,210 и 7210. **368.** 6700. **369.** 547 чел.

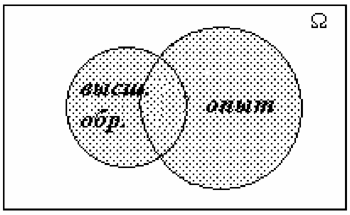

Рис. О.1. *Диаграмма Вьенна – Эйлера в задаче 63*

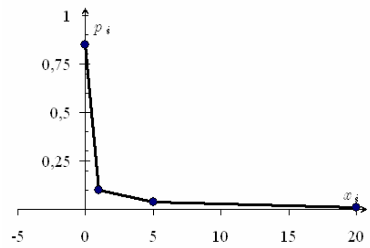

Рис. О.2. *Кривая распределения в задаче 158*

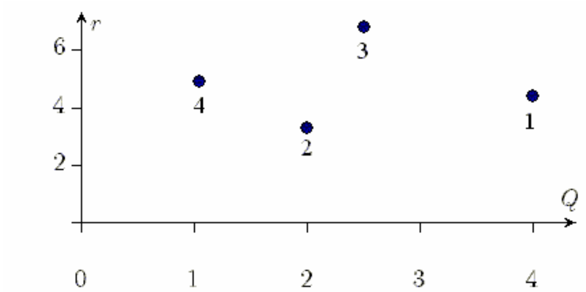

Рис. О.3. *График «риск – доходность» в задаче 164*

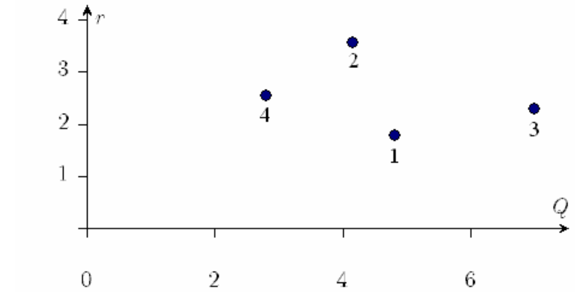

Рис. О.4. *График «риск – доходность» в задаче 165*

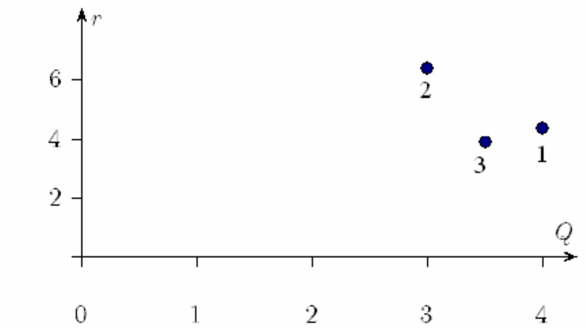

Рис. О.5. *График «риск – доходность» в задаче 166*

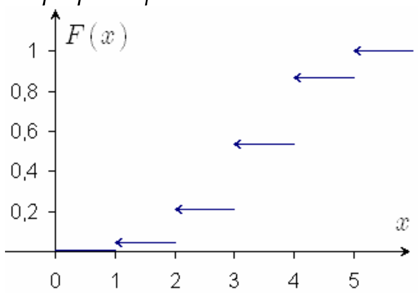

Рис. О.6. *График функции распределения в задаче 181*

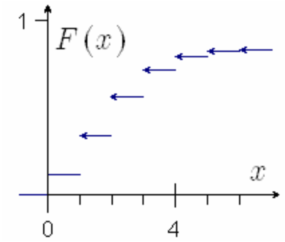

Рис. О.7. *График функции распределения в задаче 194*

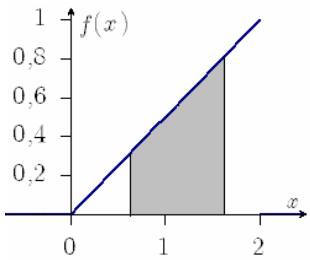

Рис. О.8. *График* $f_X(x)$ *в задаче 205*

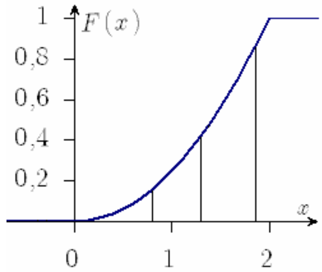

Рис. О.9. *График* $F_X(x)$ *в задаче 205*

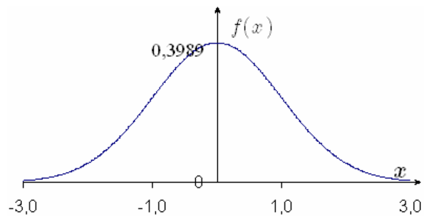

Рис. О.10. *Кривая распределения в задаче 226*

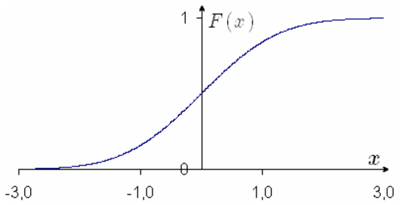

Рис. О.11. *График функции распределения в задаче 229*