Предположим, что опрос $n = 200$ студентов относительно даты их рождения удовлетворяет условиям, которые накладываются на испытания Бернулли, где успехом единичного испытания считается наступление события A. Тогда, поскольку $n = 200$ велико, а произведение $np = \frac{200}{365} = 0,548 < 10$, для подсчёта вероятности события N можно воспользоваться формулой Пуассона: $\mathbf{P}_{200}(k) = \frac{(0,548)^k}{k!}e^{-0,548}$ и при $k = 1$ получаем $\mathbf{P}_{200}(1) = 0,548e^{-0,548} = 0,317$. Пусть событие M состоит в том, что m человек из 200 родились 8 марта. Тогда в соответствии с формулой умножения вероятностей, $\mathbf{P}\{N \cap M\} = \mathbf{P}\{N\}\mathbf{P}\{M|N\}$, где $\mathbf{P}\{M \mid N\} = \mathbf{P}_{n-k}(m)$ — вероятность того, что из $(n-k)$ студентов m родились 8 марта. Так как число $n - k = 200 - 1 = 199$ велико, а $(n-k)p = \frac{198}{365} = 0,542 < 10$, для расчёта вероятности события M можно вновь воспользоваться формулой Пуассона: $\mathbf{P}_{n-k}(m) = \frac{(0,542)^m}{m!}e^{-0,542}$. При $n = 200, k = 1, m = 2$ получаем: $\mathbf{P}\{M \mid N\} =$ $= \mathbf{P}_{199}(2) = \frac{(0,542)^2}{2}e^{-0,542} = 0,086$, поэтому искомая вероятность $\mathbf{P}\{N \cap M\} = 0,317 \cdot 0,086 = 0,027$. ❑

143. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что число родившихся 1 января и 8 марта не больше двух.

144. Владельцы кредитных карт ценят их и теряют весьма редко — вероятность потерять кредитную карту в течение недели для случайно выбранного вкладчика составляет 0,001. Банк выдал кредитные карты 2 000 клиентам. Найти: а) вероятность того, что за предстоящую неделю будет утеряна ровно одна кредитная карта; б) вероятность того, что за предстоящую неделю будет утеряна хотя бы одна кредитная карта; в) наиболее вероятное число кредитных карт, теряемых за месяц.

145. Один процент стодолларовых купюр составляют фальшивые, сделанные, однако, довольно искусно, так что операционист обменного пункта десятую их часть принимает за настоящие. Каждый день для обмена приносят примерно 200 стодолларовых купюр (всего — настоящих и фальшивых). Определить: а) вероятность того, что среди них есть хотя бы одна фальшивая; б) наиболее вероятное время, за которое оправдает себя детектор валюты, который стоит 100 долл. и определяет все фальшивые купюры как фальшивые.

146. На праздники Петя и Маша отправились в поход на байдарках. Известно, что при прохождении одного порога байдарка не получает повреждений с вероятностью 0,7, полностью ломается с вероятностью 0,1 или получает серьёзное повреждение с вероятностью 0,2. Два серьёзных повреждения приводят к полной поломке. Найти вероятность того, что при прохождении 10 порогов байдарка не будет полностью сломана.

Глава 3. Случайные величины и их числовые характеристики

§3.1. Определение случайной величины и её функции распределения

Случайной величиной называется числовая функция $X(\omega)$, заданная на пространстве элементарных событий Ω и измеримая[1] относительно σ-поля событий Σ. Далее случайные величины

[1] Здесь под *измеримостью* относительно σ-поля Σ понимается следующее: для любого $x \in \mathbb{R}: \{\omega : X(\omega) < x\} \in \Sigma$.

будут обозначаться прописными латинскими буквами (например, X, Y, Z) или строчными греческими (например, ξ, η, ζ).

Законом распределения вероятностей случайной величины называется правило, устанавливающее соответствие между значениями этой случайной величины (или множествами значений) и вероятностями того, что случайная величина примет данное значение (или попадёт в соответствующее множество).

Функцией распределения вероятностей (или, короче, *функцией распределения*) *случайной величины* X называется функция[1]

$$F_X(x) = \mathbf{P}\{X < x\},\ x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Если известно, о какой случайной величине идёт речь, то индекс, обозначающий эту случайную величину, опускается: $F(x) \equiv F_X(x)$.

Как числовая функция от числового аргумента x, функция распределения $F(x)$ произвольной случайной величины обладает следующими свойствами:

$$\text{для любого } x \in \mathbb{R}:\ 0 \le F(x) \le 1; \tag{3.2}$$

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \tag{3.3}$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1; \tag{3.4}$$

$F(x)$ *является неубывающей функцией, т. е. для любых* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *таких, что* $x_1 < x_2$:

$$F(x_1) \le F(x_2); \tag{3.5}$$

$$F(x)\ \text{непрерывна слева, т. е. для любого } x \in \mathbb{R}: F(x) = F(x-0) = \lim_{\substack{z \to x \\ z < x}} F(z). \tag{3.6}$$

Для любой случайной величины X и любых чисел $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, таких, что $x_1 < x_2$, вероятность попадания случайной величины X в полуинтервал $[x_1; x_2)$ можно рассчитать по формуле

$$\mathbf{P}\{x_1 \le X < x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1). \tag{3.7}$$

Две *случайные величины* X и Y называются *независимыми*, если для всех $x, y \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\{(X < x) \cap (Y < y)\} = \mathbf{P}\{X < x\}\mathbf{P}\{Y < y\}, \tag{3.8}$$

т. е. если для всех $x, y \in \mathbb{R}$ события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ независимы.

147. Доказать свойства функции распределения (3.2) – (3.6).

Решение. Для любого $x \in \mathbb{R}$: $F(x) = \mathbf{P}\{X < x\} \in [0; 1]$ по свойству ограниченности вероятности (1.40). $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \mathbf{P}\{X < x\} = \mathbf{P}\{X < -\infty\} = \mathbf{P}\{\varnothing\} = 0$ по свойству (1.40). $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \mathbf{P}\{X < x\} = \mathbf{P}\{X < +\infty\} = \mathbf{P}\{\Omega\} = 1$ по аксиоме нормированности вероятности (1.37). Если $x_1 < x_2$, то $F(x_2) = \mathbf{P}\{X < x_2\} = \mathbf{P}\{(X < x_1) \cup (x_1 \le X < x_2)\}$, но поскольку события $\{X < x_1\}$ и $\{x_1 \le X < x_2\}$ несовместны, то по аксиоме аддитивности вероятности (1.38) $F(x_2) = \mathbf{P}\{X < x_1\} + \mathbf{P}\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_1) + \mathbf{P}\{x_1 \le X < x_2\} \ge F(x_1)$, так как $\mathbf{P}\{x_1 \le X < x_2\} \ge \mathbf{0}$ по аксиоме нормированности вероятности (1.37). $F(x-0) = \lim_{\substack{z \to x \\ z < x}} F(z) = \lim_{n \to \infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left\{X < x - \frac{1}{n}\right\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(X < x - \frac{1}{n}\right)\right\} = \mathbf{P}\{X < x\} = F(x)$. Свойство (3.6) предлагаем читателю доказать самостоятельно. ❑

---

[1] Под $\{X < x\}$ понимается $\{\omega : X(\omega) < x\}$, т. е. событие, состоящее в том, что случайная величина X примет значение, меньшее чем число x.

148. Доказать формулу (3.7).

149. Функция распределения некоторой случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ cx^2, & 0 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

Найти все возможные значения параметра c.

Решение. Из условия (3.2) следует, что $cx^2 \ge 0$, $x \in (0; 2]$, откуда $c \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$. Из условия (3.5) следует, что производная $F'(x) \ge 0$, значит, $2cx \ge 0$, $x \in (0; 2]$, откуда $c \in [0; 1]$. Условия (3.3), (3.4), (3.6), очевидно, выполнены. Поэтому $c \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$. ❑

150. В условиях предыдущей задачи известно, что $F(x)$ непрерывна в точке $x = 2$. Найти значение постоянной c, а также $\mathbf{P}\{X \ge 1\}$.

Решение. Из условия непрерывности функции $F(x)$ в точке $x = 2$ следует, что $cx^2\big|_{x=2} = c \cdot 2^2 = 4c = 1$, откуда $c = \frac{1}{4}$. $\mathbf{P}\{X \ge 1\} = 1 - \mathbf{P}\{X < 1\} = 1 - F(1) = 1 - \frac{x^2}{4}\Big|_{x=1} = \frac{3}{4}$. ❑

151. Функция распределения некоторой случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ (x - a)^2, & 2 \le x < 3, \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

Найти значение постоянной a, а также $\mathbf{P}\{1 \le X < 2{,}5\}$.

152. Определить, может ли функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{x}, & x \in [0; 1), \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

быть функцией распределения какой-либо случайной величины.

153. Пусть X и Y — независимые случайные величины, $g(x), x \in \mathbb{R}$ и $h(y), y \in \mathbb{R}$ — некоторые взаимно однозначные функции. Доказать, что случайные величины $U = g(X)$ и $V = h(Y)$ независимы.

§3.2. Дискретные случайные величины и их важнейшие числовые характеристики

Дискретная случайная величина X — это случайная величина, принимающая значения из конечного или счётного множества. Закон распределения дискретной случайной величины задаётся чаще всего не функцией распределения, а *рядом распределения*, т. е. таблицей

$$\begin{array}{c|ccccc} X & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ \hline p & p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{array}, \qquad (3.9)$$

в которой $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — расположенные по возрастанию значения дискретной случайной величины X, а $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — отвечающие этим значениям вероятности. Число столбцов в этой таблице может быть конечным (если соответствующая случайная величина принимает конечное число значений) или бесконечным.

Очевидно,

$$\sum_i p_i = 1. \qquad (3.10)$$

Кривой распределения вероятностей дискретной случайной величины X называется при этом ломаная, соединяющая точки $(x_i; p_i)$ в порядке возрастания.

По ряду распределения дискретной случайной величины можно восстановить её функцию распределения, и наоборот.

Наиболее употребительной числовой характеристикой центра группирования значений случайной величины является математическое ожидание. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* X называется число

$$\mathbf{M}X = \sum_i x_i p_i, \qquad (3.11)$$

равное средневзвешенному значению случайной величины с весами-вероятностями.

Математическое ожидание дискретной случайной величины обладает следующими свойствами (здесь X, Y — дискретные случайные величины, а $c \in \mathbb{R}$ – произвольная (неслучайная) постоянная):

$$\mathbf{M}c = c; \qquad (3.12)$$

$$\mathbf{M}(cX) = c\mathbf{M}X; \qquad (3.13)$$

$$\mathbf{M}(X + Y) = \mathbf{M}X + \mathbf{M}Y; \qquad (3.14)$$

для независимых случайных величин X *и* Y $\quad \mathbf{M}(XY) = \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y. \qquad (3.15)$

Наиболее употребительной характеристикой степени вариации значений случайной величины (произвольной, не обязательно дискретной) вокруг центра группирования является дисперсия. *Дисперсией случайной величины* X называется число

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2, \qquad (3.16)$$

равное математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания.

Для вычисления дисперсии иногда проще использовать формулу

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}(X^2) - (\mathbf{M}X)^2. \qquad (3.17)$$

Для дискретных случайных величин формулы (3.16) и (3.17) принимают вид

$$\mathbf{D}X = \sum_i (x_i - \mathbf{M}X)^2 p_i; \qquad (3.18)$$

$$\mathbf{D}X = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbf{M}X)^2. \qquad (3.19)$$

соответственно.

Дисперсия дискретной случайной величины обладает следующими свойствами (как и раньше, X, Y — дискретные случайные величины, $c \in \mathbb{R}$ – неслучайная постоянная):

$$\mathbf{D}c = 0; \qquad (3.20)$$

$$\mathbf{D}(cX) = c^2\mathbf{D}X; \qquad (3.21)$$

для независимых случайных величин X *и* Y $\quad \mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y. \qquad (3.22)$

Средним квадратичным отклонением (или *стандартным отклонением*) *случайной величины* X называется неотрицательное значение квадратного корня из дисперсии:

$$\sigma_X = +\sqrt{\mathbf{D}X}. \qquad (3.23)$$

Потоком событий называется последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени.

Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от времени (более строго, если вероятность того, что за время Dt наступит ровно k событий, не зависит от начала отсчёта промежутка Dt, а зависит только от его длины).

Поток событий называется *ординарным*, если за малый промежуток времени Dt наступление двух или более событий маловероятно (т. е. если вероятность наступления двух или более событий за малый промежуток времени Dt пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события за этот промежуток).

Поток событий называется *потоком с отсутствием последействия*, если будущее наступление событий не зависит от того, как они наступали в прошлом (т. е. если вероятность наступления k событий в любом промежутке времени не зависит от того, сколько событий уже наступило к началу этого промежутка, и в какие моменты времени они наступили).

Поток событий называется *простейшим*, если он обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия. *Интенсивностью потока* m называется среднее число событий, наступающих в единицу времени.

Наиболее часто встречающиеся законы распределения дискретных случайных величин приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Основные законы распределения дискретных случайных величин

Название закона распределения	**Краткое обозначение закона**	**Обозначение случайной величины, механизм её формирования и обозначения параметров закона**	**Формула закона распределения**	**Выражение математического ожидания и дисперсии через параметры закона**
альтернативный	X : $A(n;p)$	$X=1$ означает успех в единичном испытании (с вероятностью p), $X=0$ — неудачу (с вероятностью $(1-p)$)	$\mathbf{P}\{X=1\}=p$, $\mathbf{P}\{X=0\}=1-p$	$\mathbf{M}X=p$, $\mathbf{D}X=p(1-p)$
биномиальный	X : $Bi(n;p)$	X — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью p успеха в единичном испытании	$\mathbf{P}\{X=x\}=$ $=C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$, $x=0,1,2,\ldots,n$	$\mathbf{M}X=np$, $\mathbf{D}X=np(1-p)$
геометрический	X : $G(p)$	X — число испытаний Бернулли, которые придётся произвести до первого успеха	$\mathbf{P}\{X=x\}=$ $=p(1-p)^{x-1}$, $x=0,1,2,\ldots$	$\mathbf{M}X=\frac{1}{p}$, $\mathbf{D}X=\frac{1-p}{p^2}$
Пуассона	X : $P(l)$	1. X — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью p успеха в единичном испытании, когда n велико (несколько десятков или более), а $l=np<10$.	$\mathbf{P}\{X=x\}=\frac{l^x}{x!}e^{-l}$, $x=0,1,2,\ldots$	$\mathbf{M}X=\mathbf{D}X=l$
	X : $P(mt)$	2. X — число наступлений события простейшего потока с интенсивностью m за время t	$\mathbf{P}\{X=x\}=\frac{(mt)^x}{x!}e^{-mt}$, $x=0,1,2,\ldots$	$\mathbf{M}X=\mathbf{D}X=mt$

Способы задания и числовые характеристики дискретных случайных величин

154. Дан ряд распределения (3.9) дискретной случайной величины X. Построить её функцию распределения.

155. Доказать, что функция распределения дискретной случайной величины является ступенчатой (кусочно-постоянной).

156. Дана функция распределения $F(X)$ дискретной случайной величины X. Построить её ряд распределения.

157. Доказать, что для дискретных случайных величин X и Y условие независимости (3.8) эквивалентно следующему условию:

$$\mathbf{P}\{(X = x)\,3\,(Y = y)\} = \mathbf{P}\{X = x\}\mathbf{P}\{Y = y\}.$$

158. В лотерее на каждые 100 билетов приходится 15 выигрышей. Количество и размеры выигрышей таковы:

Размер выигрыша, руб.	2 000	500	100
Количество билетов	1	4	10

Случайная величина X описывает размер выигрыша на один случайно выбранный билет. Составить ряд распределения случайной величины X. Построить кривую распределения вероятностей. Найти функцию распределения $F_X(x)$ и построить её график. Найти $\mathbf{P}\{X < 500\}$, $\mathbf{P}\{X < 2\,100\}$, $\mathbf{P}\{-100 < X „ 1\,000\}$, средний выигрыш на один билет и дисперсию выигрыша.

159. В результате анализа счетов 400 инвесторов на фондовой бирже получена следующая информация о количестве сделок за последний месяц:

X, количество сделок	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество инвесторов	146	97	73	34	23	10	6	3	4	2	2

Определить вероятности того, что случайно выбранный инвестор произвёл: а) ноль сделок; б) по крайней мере, одну сделку; в) более пяти сделок; г) менее шести сделок.

160. В условиях предыдущей задачи найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа сделок.

161. Банк выдал ссуду в 510 000 руб. под 10% годовых сроком на один год под залог дома клиента. В случае, если дом сгорит, разрушится и т. п. (т. е. произойдёт страховой случай), клиент ничего не вернёт банку, поэтому для уменьшения риска банк обязал клиента приобрести страховой полис на 500 000 руб., заплатив за него 10 000 руб. Дом был оценён экспертами страховой компании в 500 000 руб., а вероятность наступления страхового случая с таким домом в течение года — в 0,001. Составить ряды распределения дохода банка $X_{\text{б}}$ и дохода страховой компании $X_{\text{с/к}}$ за год. Найти ожидаемые доходы банка и страховой компании.

162. Клиент должен вернуть банку кредит до сегодняшнего дня. Неделю назад он отправил денежный перевод из другого города, который до сих пор не дошёл. Время T прибытия денег оценивается клиентом так:

T	1	2	3	4	5
p	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

За каждый день опоздания возврата кредита клиент должен выплатить банку 3% от его суммы (проценты простые). Есть возможность обратиться к частному детективу, который обязуется за 5% от суммы разыскать её в течение дня. Определить, что клиенту выгоднее — обратиться к детективу или ждать прихода денег.

163. Вечером Пете понадобилось обменять валюту. Он знает, что из трёх пунктов обмена валюты, расположенных поблизости, в это время работает лишь один, но не помнит, какой именно. Составить ряд распределения числа N обменных пунктов, которые придётся посетить Пете, если считать, что каждый из пунктов может работать с вероятностью $\frac{1}{3}$. Оценить ожидаемое время T, которое Петя потратит на обмен валюты, если на каждое посещение уходит полчаса.

164. Инвестор рассматривает четыре операции со случайными эффективностями, описываемыми случайными величинами Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 с рядами распределения

Q_1	-5	0	5	10
p	0,1	0,2	0,5	0,2

Q_2	-5	0	5
p	0,1	0,4	0,5

Q_3	-5	0	5	10
p	0,4	0,1	0,1	0,4

Q_4	-5	0	10
p	0,1	0,7	0,2

Найти *ожидаемые эффективности операций* $\bar{Q}_i = \mathbf{M}Q_i$ и *риски операций* $r_i = \sqrt{\mathbf{D}Q_i}$, $i = 1,2,3,4$. Нанести точки $(\bar{Q}_i;\ r_i)$ на единый рисунок. Определить операции, оптимальные по Парето[1].

165. Инвестор рассматривает четыре операции со случайными эффективностями, описываемыми случайными величинами Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 с рядами распределения

Q_1	2	5	8	4
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Q_2	2	3	4	12
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Q_3	3	5	8	10
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Q_4	1	2	4	8
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Найти ожидаемые эффективности и риски операций. Нанести точки $(\bar{Q}_i;\ r_i)$ на единый рисунок. Определить операции, оптимальные по Парето.

166. Инвестор рассматривает три операции со случайными эффективностями, описываемыми случайными величинами Q_1, Q_2, и Q_3 с рядами распределения

Q_1	-5	0	5	10
p	0,1	0,2	0,5	0,2

Q_2	-5	0	5	10
p	0,3	0,2	0,1	0,4

Q_3	-5	0	5	10
p	0,1	0,2	0,6	0,1

Найти ожидаемые эффективности и риски операций. Нанести точки $(\bar{Q}_i;\ r_i)$ на единый рисунок. Определить операции, оптимальные по Парето. С помощью взвешивающей формулы $E(\bar{Q},\ r) = g\bar{Q} - r$, в которой положить коэффициент склонности инвестора к риску $g = 2$, определить лучшую и худшую операции[2]. Предложить какое-нибудь значение g, при котором лучшая и худшая операции будут другими.

167. Независимые случайные величины X и Y имеют распределения

X	-1	0	1
p	0,1	0,1	?

Y	-2	2
p	?	0,7

где знаком «?» отмечены неизвестные вероятности.

---

[1] Операция Q_i *доминирует* операцию Q_j, если $\begin{cases}\bar{Q}_i > \bar{Q}_j,\\ \bar{Q}_i \leq \bar{Q}_j\end{cases}$ или $\begin{cases}\bar{Q}_i \geq \bar{Q}_j,\\ \bar{Q}_i < \bar{Q}_j.\end{cases}$ Операция Q_i называется *оптимальной по Парето*, если не существует операций, которые бы её доминировали.

[2] Операция Q_i *лучше* операции Q_j, если $E(\bar{Q}_i,\ r_i) > E(\bar{Q}_j,\ r_j)$.

Найти $\mathbf{M}X$, $\mathbf{M}Y$, $\mathbf{D}X$, $\mathbf{D}Y$. Составить ряд распределения случайной величины $Z = X + Y$, найти $\mathbf{M}Z$ и $\mathbf{D}Z$, убедиться в справедливости (3.14) и (3.22). Составить ряд распределения случайной величины $V = XY$, найти $\mathbf{M}V$ и $\mathbf{D}V$, убедиться в справедливости (3.15). Составить ряд распределения случайной величины $W = \min\{0, X\}$, найти $\mathbf{M}W$ и $\mathbf{D}W$.

168. Случайная величина X принимает значения 7; 9; 10; 11 и 13 (каждое с вероятностью $\frac{1}{5}$), а случайная величина Y принимает значения 22; 24; 25; 26; 28 (также каждое с вероятностью $\frac{1}{5}$). Найти $\mathbf{D}X$ и $\mathbf{D}Y$, проверить, выполняется ли равенство $\mathbf{D}Y = \mathbf{D}X$.

169. Привести пример зависимых случайных величин, для которых формула (3.15) несправедлива.

170. Выразить $\mathbf{D}(XY)$ для независимых случайных величин X и Y через $\mathbf{M}X$, $\mathbf{M}Y$, $\mathbf{M}X^2$, $\mathbf{M}Y^2$.

171. Доказать, что для независимых случайных величин X и Y $\mathbf{D}(XY) \geq \mathbf{D}X \cdot \mathbf{D}Y$.

172. Случайные величины X и Y распределены одинаково:

X, Y	-5	0	5	10
p	0,1	0,2	0,5	0,2

Составить ряды распределения случайных величин $Z = X^2$ и $V = XY$.

173. Начальный капитал торговца-«*челнока*» составляет 10 000 руб. Опытные коллеги сказали ему, что после каждой поездки капитал с вероятностью $\frac{1}{2}$ увеличивается в полтора раза, с вероятностью $\frac{1}{4}$ остаётся без изменений и с вероятностью $\frac{1}{4}$ уменьшается в полтора раза. Составить ряд распределения капитала торговца после двух поездок и найти его математическое ожидание.

174. Проект состоит из трёх этапов. Первый и второй этапы можно выполнять параллельно, а третий этап можно начинать только по завершении первых двух. Длительности этапов (в рабочих днях) описываются дискретными случайными величинами T_i $(i = 1, 2, 3)$ с рядами распределения

T_1	2	3	4
p	0,1	0,8	0,1

T_2	2	3	4
p	0,4	0,4	0,2

T_3	2	3	4
p	0,2	0,3	0,5

Найти вероятность того, что от начала работ по проекту до его завершения пройдёт более шести рабочих дней.

175. Доказать свойства математического ожидания (3.13) – (3.15) и свойства дисперсии (3.20) – (3.22) дискретной случайной величины.

176. Доказать формулы (3.18) – (3.19).

177. Петя поехал на каникулы на n дней и решил, что будет ежедневно тратить соответствующую часть денег: в первый день — $\frac{1}{n}$, во второй день — $\frac{1}{n-1}$ от остатка и т. д. Пусть X_i — часть от остатка денег, которая отделяется на расходы в i-й день $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Здраво понимая, что траты каждый день будут различными, Петя решил, что их можно описать независимыми случайными величинами X_i с математическими ожиданиями $\mathbf{M}X_i = \dfrac{1}{n-i+1}$. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = (1-X_1)(1-X_2)\ldots(1-X_n)$, равной остатку денег к последнему дню.

178. Случайная величина X принимает только целые неотрицательные значения. Доказать, что $\mathbf{M}X = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{X \geq k\}$.

179. Пусть X — дискретная случайная величина, $\overset{\circ}{X} = \dfrac{X - \mathbf{M}X}{\sigma_X}$. Доказать, что $\mathbf{M}\overset{\circ}{X} = 0$, $\mathbf{D}\overset{\circ}{X} = 1$.

180. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии альтернативной случайной величины (см. табл. 3.1).

Биномиальное распределение

181. Случайная величина $X : \mathrm{Bi}\left(n = 5; p = \dfrac{2}{3}\right)$. Составить ряд распределения этой случайной величины, найти её функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию. Построить график её функции распределения.

182. Построить ожидаемое распределение результатов испытаний, которое было бы получено для 256 абсолютно невежественных экзаменующихся, случайно угадывающих ответы на четыре вопроса с четырьмя возможными вариантами ответа на каждый вопрос (из которых один и только один верен).

Решение. Угадывание каждым экзаменующимся ответов на четыре вопроса можно интерпретировать как $n = 4$ испытания Бернулли. При этом, поскольку экзаменующийся невежествен, для него равновероятны все четыре ответа на каждый вопрос, т. е. вероятность успеха (правильного ответа на вопрос) равна $p = \dfrac{1}{4}$. Тогда число X угаданных одним экзаменующимся ответов на четыре вопроса представляет собой биномиальную случайную величину $X : \mathrm{Bi}\left(n = 4; p = \dfrac{1}{4}\right)$ и $\mathbf{P}\{X = x\} = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = C_4^x \left(\dfrac{1}{4}\right)^x \left(\dfrac{3}{4}\right)^{4-x}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$, а ожидаемое распределение результатов для 256 экзаменующихся, учитывая их независимость друг от друга, будет иметь следующий вид:

Число правильных ответов, X	0	1	2	3	4	
Число экзаменующихся, $256\mathbf{P}\{X = x_i\}$	81	108	54	12	1	$\sum\limits_{i=0}^{4} 256\mathbf{P}\{X = x_i\} = 256$. ❑

183. Абитуриент при поступлении в институт сдаёт четыре экзамена, вероятность успешно сдать каждый экзамен равна 0,8. Случайная величина X описывает число сданных абитуриентом экзаменов (в предположении, что различные экзамены представляют собой независимые испытания). Составить ряд распределения случайной величины X. Определить, каким будет ряд распределения, если место абитуриента займёт студент, сдающий четыре семестровых экзамена.

184. В группе из 16 человек 12 поддерживают некоторую правительственную программу. Из этой группы наудачу отбирают троих человек. Составить ряд распределения числа людей в выборке, поддерживающих программу, найти среднее число таких людей и дисперсию числа таких людей.

185. В банк поступило 30 авизо, среди которых пять фальшивых. Тщательной проверке (которая гарантированно выявляет фальшивые документы) подвергаются десять случайно выбранных авизо. Найти ожидаемое количество выявленных фальшивых авизо.

186. Финансовая операция *форвард* состоит в заключении сделки на продажу (или покупку) в будущем некоторого товара по цене, определяемой сторонами в настоящий момент времени. Фермер предполагает, что через месяц, когда он соберёт урожай, цена пшеницы в каждом из десяти регионов, куда он обычно её продаёт, может с вероятностью 0,9 понизиться и с вероятностью 0,1 повыситься. Поэтому он заключает с десятью мельниками в этих регионах десять форвардов на поставку им пшеницы через месяц по сегодняшней цене. Цены в регионах изменяются независимо. Найти математическое ожидание числа форвардов, которые окажутся выгодными для фермера и вероятность того, что все десять проданных форвардов окажутся для него выгодными (форвард окажется выгодным, если в данном регионе за месяц цена понизится).

187. *Европейским опционом «колл»* называется ценная бумага, дающая её владельцу право (но не обязанность) купить некоторую акцию в заранее определённый момент времени по заранее определённой цене, называемой терминальной стоимостью. Европейским опционом «*пут*» называется ценная бумага, дающая её владельцу право, но не обязанность продать некоторую акцию в заранее определённый момент времени по заранее определённой цене, называемой терминальной стоимостью. Определить рациональную стоимость годовых европейских опционов «*колл*» и «*пут*», если текущая цена акции, на которую выписаны опционы, равна 35, терминальные стоимости опционов совпадают и равны 40, годовая безрисковая процентная ставка составляет 10%, а годовая изменчивость доходности акции равна $s = 20\%$. Расчёты провести по биномиальной модели ценообразования активов, разделяя срок жизни опциона на четыре периода. Составить ряд распределения дохода от исполнения опциона «*колл*».

Решение. Пусть на некоторую акцию, текущая цена которой $S = 35$, выписаны опцион «*колл*» и опцион «*пут*», терминальные стоимости опционов совпадают и равны $X = 40$, годовая безрисковая процентная ставка составляет $r_{\text{год}} = 10\% = 0{,}1$, а годовая изменчивость доходности акции $s = 20\% = 0{,}2$.

Проведем расчёты по биномиальной модели ценообразования опционов, разделяя год на $n = 4$ периода, в каждый из которых цена акции, на которую выписан опцион, может повыситься в u раз, либо понизиться в d раз.

Известно, что $u = e^{s\sqrt{T/n}}$, $d = e^{-s\sqrt{T/n}}$ (*докажите*!), где $T = 1$ г. — срок действия опциона, $n = 4$ — количество периодов в биномиальной модели, s — годовая изменчивость акции. В случае четырёх периодов $u = u_{(4)} = e^{0,2\sqrt{1/4}} = e^{0,1} \approx 1,105$, $d = d_{(4)} = \dfrac{1}{u_{(4)}} \approx 0,905$.

Скорректируем годовую безрисковую процентную ставку в соответствии с более короткими периодами времени. Очевидно, ставка безрисковых вложений под сложные проценты на один из n периодов выражается через годовую ставку, как $r_{(n)} = (1 + r_{\text{год}})^{\frac{1}{n}} - 1$. Поэтому $r_{(4)} = (1 + r_{\text{год}})^{\frac{1}{4}} - 1 = (1 + 0,1)^{0,25} - 1 \approx 1,024 - 1 = 0,024$.

Пусть $R_{(4)} = 1 + r_{(4)} = 1,024$. Рассмотрим какой-либо из периодов. Если в его начале цена акции составляла $S_{(i)}$, то к концу периода акция может подорожать до $uS_{(i)}$ с вероятностью

$p_{(n)} = \dfrac{R_{(n)} - d}{u - d}$ (так как математическое ожидание увеличения цены акции $(1+u)p_{(n)} + (1 - p_{(n)})(1+d)$ должно совпадать с (безрисковым) увеличением суммы на банковском счёте $1 + R_{(n)}$, откуда $p_{(n)} + up_{(n)} + 1 - p_{(n)} + d - dp_{(n)} = 1 + R_{(n)}$ или $(u-d)p_{(n)} = R_{(n)} - d$) или подешеветь до $dS_{(i)}$ с вероятностью $(1 - p_{(n)})$. Для четырёх периодов $p_{(4)} = \dfrac{R_{(4)} - d}{u - d} = \dfrac{1{,}024 - 0{,}905}{1{,}105 - 0{,}905} \approx 0{,}595$.

Процесс изменения цены акции можно представить как последовательность n независимых испытаний, считая успехом повышение цены акции в u раз, а неудачей — её понижение в d раз. Если в течение n периодов цена акции поднималась k раз и опускалась $(n-k)$ раз, то её цена к концу последнего периода составит $S_{(n)} = Su^k d^{n-k}$. Вероятность наступления k повышений и $(n-k)$ понижений цены акции составит по формуле Бернулли $\mathbf{P}_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Составим ряд распределения цены акции к концу четвёртого периода:

$S_{(4)}$	$23{,}478$	$28{,}667$	$35{,}002$	$42{,}737$	$52{,}182$
p	$0{,}027$	$0{,}158$	$0{,}348$	$0{,}341$	$0{,}126$

Опцион «*колл*» имеет смысл *исполнять*, т. е. пользоваться заложенным в нём правом покупки акции по цене X, лишь в том случае, когда рыночная цена $S_{(n)}$ этой акции к моменту окончания срока действия опциона, т. е. к концу последнего периода, будет больше X. Если рыночная цена акции $S_{(n)}$ окажется больше X, держатель опциона, исполнив его, получит доход $S_{(n)} - X$. Если же рыночная цена акции $S_{(n)}$ окажется меньше X, держатель опциона просто не будет его исполнять и получит нулевой доход. Таким образом, если цена акции в момент исполнения опциона «*колл*» известна и равна $S_{(n)}$, то доход от исполнения такого опциона составит $\vartheta_{(n)} = \max\{S_{(n)} - X;\ 0\}$. Поскольку цена акции $S_{(n)}$ является случайной величиной, доход от исполнения опциона «*колл*» также является случайной величиной, которая принимает значения $\vartheta_{(n)} = \max\{Su^k d^{n-k} - X;\ 0\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ с вероятностями $\mathbf{P}_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Ряд распределения дохода от исполнения опциона при расчётах по четырехпериодной биномиальной модели имеет следующий вид:

$\vartheta_{(4)}$	0	$2{,}737$	$12{,}182$
p	$0{,}027 + 0{,}158 + 0{,}348 = 0{,}533$	$0{,}341$	$0{,}126$

Ожидаемый доход от исполнения опциона «*колл*», равный математическому ожиданию случайной величины $\vartheta_{(4)}$, составляет $\mathbf{M}\vartheta_{(4)} = \sum_{k=0}^{n} \max\{Su^k d^{n-k} - X; 0\} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 0 \cdot 0{,}027 + {}$ $+ 0 \cdot 0{,}158 + 2{,}737 \cdot 0{,}341 + 12{,}182 \cdot 0{,}126 = 2{,}468$.

Поскольку оценка опциона происходит перед началом первого периода, для получения его рациональной стоимости C_T достаточно дисконтировать ожидаемый доход от исполнения опциона на n периодов:

$$C_T = \frac{1}{R_{(n)}^n} \mathbf{M}\vartheta_{(n)} = \frac{1}{R_{(n)}^n} \sum_{k=0}^{n} \max\{Su^k d^{n-k} - X;\ 0\} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Для четырёхпериодной модели получаем $C_T = \dfrac{1}{(1{,}024)^4} \cdot 2{,}468 \approx 2{,}245$.

Рациональную стоимость P_T опциона «*пут*» можно вычислить, воспользовавшись *теоремой о паритете европейских опционов «колл» и «пут»*. Согласно этой теореме, $P_T - C_T = X - S$ (*докажите*!), поэтому $P_T = X - S + C_T = 40 - 35 + 2{,}245 = 7{,}245$. ❑

188. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии биномиального распределения (см. табл. 3.1).

Решение. Биномиальную случайную величину $X \sim \mathrm{Bi}(n;p)$ можно представить в виде суммы n независимых одинаково распределённых альтернативных случайных величин $X_i \sim \mathrm{A}(p)$: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. При этом $\mathbf{M}X_i = p$, $\mathbf{D}X_i = p(1-p)$ (см. задачу 180). По свойству математического ожидания (3.14) $\mathbf{M}X = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i = np$, по свойству дисперсии (3.22) $\mathbf{D}X = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}X_i = np(1-p)$. ❑

Геометрическое распределение

189. В среднем левши составляют 1% всего населения. Сколько в среднем нужно опросить людей, чтобы набрать десятерых левшей?

Решение. При интерпретации опроса как последовательности независимых испытаний с вероятностью успеха $p = 1\% = 0,01$ число X опрошенных до появления левши в первый раз (так же, как и число опрошенных после появления левши в i-й раз до появления левши в $(i+1)$-й раз) — это геометрическая случайная величина $X \sim \mathrm{G}(p = 0,01)$, и её среднее значение оценивается математическим ожиданием $\mathbf{M}X = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,01} = 100$. Для того, чтобы отобрать десять левшей, учитывая свойство аддитивности математических ожиданий (3.15), в среднем нужно опросить в 10 раз больше людей, т. е. 1 000 людей. ❑

190. Среди выпускаемых заводом автомобилей 80% некомплектны. Определить, сколько автомобилей должен в среднем осмотреть покупатель, чтобы выбрать комплектный автомобиль.

191. Петя захотел найти человека, день рождения которого совпадает с Петиным. Составить ряд распределения числа N незнакомцев, которых придётся опросить Пете, и найти среднее число опрошенных незнакомцев.

192. Заместитель председателя правления банка Аполлон Митрофанович очень любит ходить в казино, и если он туда зашёл, то не выходит, пока на рулетке не выпадет «*зеро*» (то есть число «*ноль*»). Каждый раз Аполлон Митрофанович ставит пять рублей на «*зеро*» и по одному рублю на «*двадцать девять*» и на «*тридцать два*». После этого крупье вращает колесо рулетки, и шарик указывает на одно из чисел от 0 до 36. В случае, когда шарик указывает на число, соответствующее некоторой ставке Аполлона Митрофановича, последний получает выигрыш, в 35 раз больший, чем эта ставка, а те ставки Аполлона Митрофановича, которые не соответствуют выпавшему числу, теряются. Сколько раз играет в среднем Аполлон Митрофанович? Каков его средний выигрыш?

193. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии геометрического распределения (см. табл. 3.1).

Распределение Пуассона

194. Случайная величина $X \sim \mathrm{P}(\lambda = 2)$. Определить вероятности $\mathbf{P}\{X = 2\}$, $\mathbf{P}\{X > 1\}$, $\mathbf{P}\{0 < X < 3\}$ и $\mathbf{P}\{X = 1 \mid X > 0\}$. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины, построить график её функции распределения.

195. Пивной завод отправил в магазин 400 ящиков пива. Вероятность того, что ящик будет разбит при транспортировке в данных условиях, равна 0,005. По приезде в магазин экспедитор, перевозивший груз, заявил, что семь ящиков с пивом были разбиты при транспортировке. Размышляя, можно ли доверять экспедитору, директор магазина хочет найти вероятность разбить семь ящиков, вероятность разбить не менее семи ящиков, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение количества ящиков, разбитых при транспортировке, чтобы оценить возможность потерь, заявленных экспедитором. Найти указанные величины.

196. В банк поступило 4 000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное количество денежных знаков, равна 0,0001. Найти: а) вероятность того, что при проверке будет обнаружен хотя бы один ошибочно укомплектованный пакет; б) вероятность того, что при проверке будет обнаружено не более трёх ошибочно укомплектованных пакетов; в) математическое ожидание и дисперсию числа ошибочно укомплектованных пакетов.

197. Для продвижения своей продукции на рынок фирма раскладывает по почтовым ящикам рекламные листки. Прежний опыт работы фирмы показывает, что примерно в одном случае из 2 000 следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 10 000 рекламных листков поступит хотя бы один заказ, среднее число поступивших заказов и дисперсию числа поступивших заказов.

198. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии распределения Пуассона (см. табл. 3.1).

199. Доказать, что число событий простейшего потока с интенсивностью μ, наступивших за время t, представляет собой случайную величину X, распределённую по закону Пуассона с параметром $\lambda = \mu t$.

200. В диспетчерскую таксопарка поступает простейший поток заказов такси с интенсивностью $\mu = 1,2\,\frac{\text{заказа}}{\text{мин}}$. Найти вероятности следующих событий: а) за две минуты не поступит ни одного заказа; б) за две минуты поступит ровно один заказ; в) за две минуты поступит хотя бы один заказ.

201. Магазин имеет два входа, потоки покупателей на этих входах независимы и являются простейшими. Через первый вход проходит в среднем $\mu_1 = 1,5\,\frac{\text{чел.}}{\text{мин}}$, а через второй вход — $\mu_2 = 0,5\,\frac{\text{чел.}}{\text{мин}}$. Определить вероятность того, что в наугад выбранную минуту хотя бы один человек посетит магазин.

202. Найти функцию распределения интервала времени T между двумя последовательными наступлениями события в простейшем потоке с интенсивностью μ.

§3.3. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ВАЖНЕЙШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Случайная величина X называется *непрерывной*, если она принимает более, чем счётное число значений.

Случайная величина X называется *абсолютно непрерывной*, если её функция распределения может быть представлена в виде

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(z)\,dz\,. \qquad (3.24)$$

При этом функция $f_X(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей* (или, короче, *плотностью распределения*) *случайной величины* X. График плотности распределения случайной величины X называется *кривой распределения вероятностей* (или, короче, *кривой распределения*) случайной величины X. Всюду ниже в данном параграфе будут рассматриваться абсолютно непрерывные случайные величины, при этом слово «*абсолютно*» будет опускаться.

Как и раньше, если известно, о какой случайной величине идёт речь, то индекс, обозначающий эту случайную величину, опускается: $f(x) \equiv f_X(x)$.

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

$$\text{для всех } x \in \mathbb{R}: f(x) \geq 0; \tag{3.25}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 1; \tag{3.26}$$

$$\text{для всех точек } x \in \mathbb{R}\text{, в которых существует производная } F'(x): f(x) = F'(x). \tag{3.27}$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет конкретное числовое значение, равна нулю:

$$\text{для всех } x \in \mathbb{R}: \mathbf{P}\{X = x\} = 0. \tag{3.28}$$

Вероятность попадания непрерывной случайной величины в числовой промежуток можно рассчитать по формуле

$$\text{для всех } c, d \in \mathbb{R}\text{, таких, что } c < d: \tag{3.29}$$

$$\mathbf{P}\{c \leq X \leq d\} = \mathbf{P}\{c < X \leq d\} = \mathbf{P}\{c \leq X < d\} = \mathbf{P}\{c < X < d\} = F(d) - F(c) = \int_c^d f(x)dx.$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется число

$$\mathbf{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \tag{3.30}$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины обладает теми же свойствами (3.12) – (3.15), что и математическое ожидание дискретной случайной величины.

Формулы (3.16) и (3.17) для вычисления *дисперсии непрерывных случайных величин* принимают вид

$$\mathbf{D}X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{M}X)^2 f(x)dx, \tag{3.31}$$

$$\mathbf{D}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (\mathbf{M}X)^2. \tag{3.32}$$

соответственно.

Дисперсия непрерывной случайной величины обладает теми же свойствами (3.20) – (3.22), что и дисперсия дискретной случайной величины.

Наиболее часто встречающиеся законы распределения непрерывных случайных величин приведены в табл. 3.2.

Способы задания и числовые характеристики непрерывных случайных величин

203. Распределение Парето. Годовой доход случайно выбранного налогоплательщика описывается случайной величиной X с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \dfrac{c}{x^{3,5}}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Найти значение параметра c, функцию распределения годового дохода, средний годовой доход и среднее квадратичное отклонение годового дохода. Определить размер годового дохода $x_{\min}$, не ниже которого с вероятностью 0,5 окажется годовой доход случайно выбранного налогоплательщика.

Таблица 3.2

Основные законы распределения непрерывных случайных величин

Название закона распределения	Краткое обозначение закона	Обозначение случайной величины, механизм её формирования и обозначения параметров закона	Функция и плотность распределения	Выражение математического ожидания и дисперсии через параметры закона
равномерный	$X \sim R(a;b)$	X — случайная величина, принимающая значения только из некоторого отрезка $[a;b]$, причём с содержательной точки зрения все значения внутри этого отрезка одинаково возможны	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a;b],\\ 0, & x\notin[a;b],\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & x\in[a;b],\\ 1, & x>b\end{cases}$	$\mathbf{M}X=\frac{a+b}{2}$, $\mathbf{D}X=\frac{(b-a)^2}{12}$
показательный (экспоненциальный)	$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$	X — интервал времени между двумя последовательными наступлениями события в простейшем потоке с интенсивностью λ	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases}$	$\mathbf{M}X=\frac{1}{\lambda}$, $\mathbf{D}X=\frac{1}{\lambda^2}$
нормальный	$X \sim N(a;\sigma)$	$N(a,\sigma)=X_1+X_2+\ldots+X_N$, где $X_1,X_2,\ldots,X_N$ — большое число независимых в совокупности случайных величин, воздействие каждой из которых на X равномерно незначительно и равновероятно по знаку (согласно центральной предельной теореме, см. §4.4)	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=$ $=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, $F(x)=$ $=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=$ $=\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, значения функций $\varphi(x)$ и $\Phi_0(x)$ приведены в табл. П.1	$\mathbf{M}X=a$, $\mathbf{D}X=\sigma^2$
логнормальный	$X \sim LN(a;\sigma)$	$LN(a;\sigma)=\ln N(a;\sigma)$	$f(x)=\frac{1}{\sigma x}\varphi\left(\frac{\ln x-\ln a}{\sigma}\right)$, $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{\ln x-\ln a}{\sigma}\right)$	$\mathbf{M}X=ae^{\sigma^2/2}$, $\mathbf{D}X=ae^{\sigma^2/2}\left(e^{\sigma^2/2}-1\right)$
«Хи квадрат» с n степенями свободы	$X \sim \chi_n^2$	$\chi_n^2=N_1^2(0;1)+N_2^2(0;1)+\ldots+$ $+N_n^2(0;1)$, где $N_1(0,1), N_2(0,1),\ldots,$ $N_n(0;1)$ — независимые в совокупности случайные величины	при $n\leq 30$ значения $\chi^2_{n;p}$, соответствующие вероятности $p=\mathbf{P}\{\chi_n^2>\chi^2_{n;p}\}$, приведены в табл. П.2, при $n>30$ $\chi_n^2\approx\frac{N^2(\sqrt{2n-1};1)}{2}$	$\mathbf{M}\chi_n^2=n$, $\mathbf{D}\chi_n^2=2n$
Стьюдента с n степенями свободы	$X \sim T_n$	$T_n=\frac{N(0;1)}{\sqrt{\chi_n^2/n}}$, где $N(0;1)$ и χ_n^2 — независимые случайные величины	при $n\leq 30$ значения $t_{n;p}$, соответствующие вероятности $p=\mathbf{P}\{\lvert T_n\rvert>t_{n;p}\}$, приведены в табл. П.3, при $n>30$ $T_n\approx N(0;1)$	$\mathbf{M}T_n=0$, $\mathbf{D}T_n=\frac{n}{n-2}$
Фишера с n_1 и n_2 степенями свободы	$X \sim F_{n_1;n_2}$	$F_{n_1;n_2}=\frac{\chi^2_{n_1}/n_1}{\chi^2_{n_2}/n_2}$, где $\chi^2_{n_1}$ и $\chi^2_{n_2}$ — независимые случайные величины	значения $f_{n_1;n_2;p}$, соответствующие вероятности $p=\mathbf{P}\{F_{n_1;n_2}>f_{n_1;n_2;p}\}$, приведены в табл. П.4	$\mathbf{M}F_{n_1n_2}=\frac{n_2}{n_2-2}$, $\mathbf{D}F_{n_1n_2}=$ $=\frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$, $n_2>4$

Решение. Параметр c найдём из условия (3.26): $1=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{1}0dx+\int\limits_{1}^{\infty}\frac{c}{x^{3,5}}dx=$

$=-\frac{c}{2,5}\cdot\frac{1}{x^{2,5}}\Big|_1^{\infty}=\frac{c}{2,5}$, откуда $c=2,5$. Таким образом, $f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \frac{2,5}{x^{3,5}}, & x\ge 1.\end{cases}$

Функцию распределения найдем по формуле (3.24): $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int\limits_{-\infty}^{x}0dz=0$ при $x<1$,

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int\limits_{-\infty}^{1} f(z)dz+\int\limits_{1}^{x} f(z)dz=\int\limits_{1}^{x}\frac{2,5}{z^{3,5}}dt=-\frac{1}{t^{2,5}}\Big|_1^{x}=1-\frac{1}{x^{2,5}}$ при $x\ge 1$.

Таким образом, $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 1-\frac{1}{x^{2,5}}, & x\ge 1.\end{cases}$

$\mathbf{M}X=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int\limits_{1}^{\infty}x\frac{2,5}{x^{3,5}}dx=-\frac{2,5}{1,5}\cdot\frac{1}{x^{1,5}}\Big|_1^{\infty}=\frac{5}{3}$; $\mathbf{D}X=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-(\mathbf{M}X)^2=\int\limits_{1}^{\infty}x^2\frac{2,5}{x^{3,5}}dx-\left(\frac{5}{3}\right)^2=$

$=-\frac{2,5}{0,5}\cdot\frac{1}{x^{0,5}}\Big|_1^{\infty}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=5-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$; $\sigma_X=\frac{2\sqrt{5}}{3}\approx 1,49$.

По условию $\mathbf{P}\{X\ge x_{\min}\}=1-\mathbf{P}\{X<x_{\min}\}=1-F(x_{\min})=0,5$, откуда $F(x_{\min})=0,5$, т. е. $1-\frac{1}{x_{\min}^{2,5}}=0,5$ или $x_{\min}^{2,5}=2$, поэтому $\ln x_{\min}=\frac{\ln 2}{2,5}\approx\frac{0,693}{2,5}\approx 0,28$, значит, $x_{\min}\approx e^{0,28}\approx 1,32$. ❑

204. Годовой доход случайно выбранного налогоплательщика описывается случайной величиной X с плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \frac{c}{x^4}, & x\ge 1.\end{cases}$$

Найти значение параметра c, средний годовой доход и среднее квадратичное отклонение годового дохода. Определить размер годового дохода $x_{\min}$, не ниже которого с вероятностью 0,6 окажется годовой доход случайно выбранного налогоплательщика.

205. Плотность распределения случайной величины X

$$f_X(x)=\begin{cases}ax, & x\in[0;2],\\ 0, & x\notin[0;2].\end{cases}$$

Найти значение параметра a, функцию распределения $F_X(x)$, $\mathbf{M}X$ и $\mathbf{D}X$, построить графики функций $f_X(x)$ и $F_X(x)$. Вычислить $\mathbf{P}\{|X-\mathbf{M}X|<0,5\}$ двумя способами: используя $f_X(x)$ и $F_X(x)$, отметить эту вероятность на обоих графиках.

206. Найти плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины с функцией распределения

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ \frac{x}{4}+0,5, & -2\le x<2,\\ 1 & x\ge 2.\end{cases}$$

207. Пусть X — непрерывная случайная величина, $\overset{\circ}{X} = \dfrac{X - \mathbf{M}X}{\sigma_X}$. Доказать, что $\mathbf{M}\overset{\circ}{X} = 0$, $\mathbf{D}\overset{\circ}{X} = 1$.

Равномерное распределение

208. Случайная величина $X \sim R[0;100]$. Найти вероятности $\mathbf{P}\{X > 10\}$, $\mathbf{P}\{40 < X < 90\}$, $\mathbf{P}\{X = 50\}$ и $\mathbf{P}\{X > 50 \mid X < 80\}$, а также математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. $\mathbf{P}\{X > 10\} = 1 - \mathbf{P}\{X < 10\} = 1 - F(10) = 1 - \dfrac{10-0}{100-0} = 0,9$; $\mathbf{P}\{40 < X < 90\} = F(90) - F(40) = \dfrac{90-0}{100-0} - \dfrac{40-0}{100-0} = 0,5$, $\mathbf{P}\{X = 50\} = 0$, $\mathbf{P}\{X > 50 \mid X < 80\} = \dfrac{3}{8}$; $\mathbf{M}X = \dfrac{0+100}{2} = 50$; $\mathbf{D}X = \dfrac{(100-0)^2}{12} = \dfrac{2500}{3}$. ❑

209. Найти вероятность того, что сумма значений случайной величины X, определённой в задаче 208, в двух независимо проведённых опытах превысит 80. Задачу решить графически.

210. Все значения равномерно распределённой случайной величины расположены на отрезке [2; 8]. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины, а также вероятности её попадания на отрезок [6; 9] и в интервал (3; 5).

211. При выяснении причин недостачи драгоценных металлов в ювелирном магазине установлено, что их взвешивание производится на весах, цена деления которых равна 0,1 г, а показания весов округляются при взвешивании до ближайшего деления их шкалы, причём округления на любые значения от – 0,05 до 0,05 равновероятны. Оценить возможность возникновения ошибки более, чем на 0,03 г, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение потерь.

212. Решить задачи 47 – 56, пользуясь равномерным распределением вероятностей.

213. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии равномерного распределения (см. табл. 3.2).

Решение. $\mathbf{M}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int\limits_a^b x \dfrac{1}{b-a}dx = \dfrac{1}{b-a} \cdot \dfrac{x^2}{2}\Big|_a^b = \dfrac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \dfrac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \dfrac{a+b}{2}$; $\mathbf{D}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (\mathbf{M}X)^2 = \int\limits_a^b x^2 \dfrac{1}{b-a}dx - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{b-a} \cdot \dfrac{x^3}{3}\Big|_a^b = \dfrac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \dfrac{\cancel{(b-a)}(b^2+ab+a^2)}{3\cancel{(b-a)}} - \dfrac{a^2-2ab+b^2}{4} = \dfrac{4b^2+4ab+4a^2}{12} - \dfrac{3a^2-6ab+3b^2}{12} = \dfrac{a^2-2ab+b^2}{12} = \dfrac{(b-a)^2}{12}$. ❑

214. Правило трёх сигм. Случайная величина $X \sim R(a;b)$. Найти $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| < 3\sigma_X\}$.

215. Случайные величины $X \sim R(a;b)$ и $Y \sim R(c;d)$ независимы. Найти $\mathbf{M}(XY)$ и $\mathbf{D}(XY)$.

Показательное распределение

216. Обычно папа ругает Петю за принесённую «*двойку*» около 6 мин. На этот раз нотация длится больше 6 мин. Найти математическое ожидание и дисперсию длительности нотации. Определить, с какой вероятностью папа закончит «*читать нотацию*» в течение ближайшей минуты?

Решение. Длительность нотации X можно считать распределённой по показательному закону. По условию обычная средняя длительность нотации (или её математическое ожидание) составляет $\mathbf{M}X = 6$ мин. Но для показательного распределения $\mathbf{M}X = \frac{1}{\mu}$, откуда $\mu = \frac{1}{\mathbf{M}X} = \frac{1}{6}$. Дисперсия длительности нотации при этом равна $\mathbf{D}X = \frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{1}{1/6}\right)^2 = 36$. Вероятность того, что папа закончит «*читать нотацию*» в течение ближайшей (седьмой) минуты при условии, что нотация длится больше 6 мин, равна $\mathbf{P}\{X<7 \mid X>6\} = \frac{\mathbf{P}\{(X<7)\cap(X>6)\}}{\mathbf{P}\{X>6\}} = \frac{\mathbf{P}\{6<X<7\}}{\mathbf{P}\{X>6\}} = \frac{F(7)-F(6)}{1-F(6)} =$

$$= \frac{1-e^{-7/6}-(1-e^{-6/6})}{1-(1-e^{-6/6})} = \frac{e^{-1}-e^{-7/6}}{e^{-1}} = 1-e^{-1/6} \approx 0{,}154. \ ❑$$

217. Случайная величина $X \sim \mathrm{Exp}(\mu = 2)$. Определить вероятности $\mathbf{P}\{X > 1\}$, $\mathbf{P}\{X < 2\}$, $\mathbf{P}\{X > -1\}$, $\mathbf{P}\{X = 3\}$ и $\mathbf{P}\{X > 1 \mid X < 3\}$, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

218. Обычно брокер получает от своего клиента приказы об операциях на фондовой бирже раз в неделю. Найти вероятность того, что сегодня поступит приказ, если последний приказ поступил два дня назад. Поток приказов считать простейшим.

219. Обычно совещание длится час. На этот раз за час оно не закончилось. Какова вероятность того, что оно закончится в ближайшие 15 мин. Длительность совещания распределена по показательному закону.

220. Длительность междугородних телефонных разговоров распределена примерно по показательному закону, разговор продолжается в среднем 3 мин. Найти вероятность того, что очередной разговор будет продолжаться более 3 мин. Определить долю разговоров, которые длятся менее 1 мин. Найти вероятность того, что разговор, который длится уже 10 мин, закончится в течение ближайшей минуты, а также математическое ожидание и дисперсию длительности разговора.

221. Время, необходимое для оформления договора, является случайной величиной, распределённой по показательному закону с параметром $\lambda = 0{,}3\ \frac{\text{договора}}{\text{ч}}$. Найти вероятность того, что оформление договора займёт менее 7 ч. Найти среднее время оформления договора.

222. Случайная величина $X \sim \mathrm{Exp}(\mu)$. Найти $\mathbf{P}\{a \le X \le b\}$.

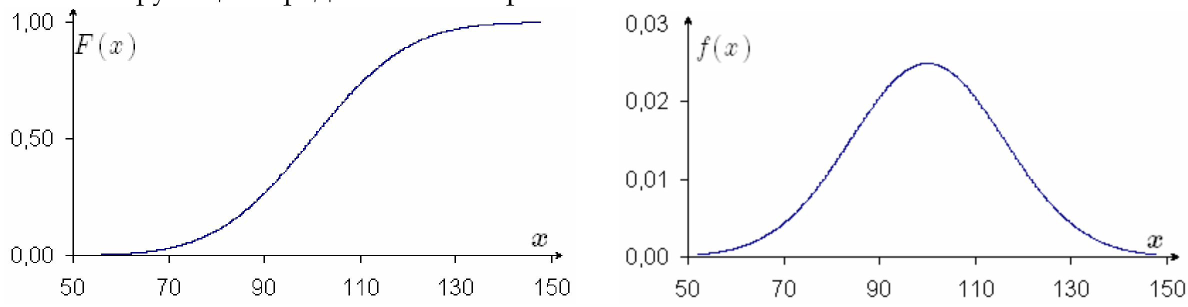
223. Случайная величина $X \sim \mathrm{Exp}(\mu)$. Найти: а) $\mathbf{P}\{0 \le X \le \tau\}$, б) $\mathbf{P}\{t \le X \le t+\tau \mid X \ge t\}$.

224. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии показательного распределения (см. табл. 3.2).

Нормальное распределение

225. Значения теста *IQ* (коэффициента интеллекта) Стэнфорда – Бине распределены приблизительно по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 100$ и средним квадратичным отклонением $\sigma = 16$. Записать выражения для функции распределения коэффициента интеллекта и плотности его распределения. Построить графики этих функций.

Решение. $F(x)=\frac{1}{16\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-100)^2}{512}}dz=\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{x-100}{16}\right)$, $f(x)=\frac{1}{16\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-100)^2}{512}}=\frac{1}{16}\varphi\left(\frac{x-100}{16}\right)$, графики этих функций представлены на рис. 3.1. ❑



а) б)

Рис. 3.1. *График функции распределения* **(а)** *и кривая распределения* **(б)** *в задаче 225*

226. В условиях задачи 225 найти долю людей, у которых коэффициент интеллекта окажется: а) меньше 60; б) меньше 75; в) меньше 95; г) меньше 100; д) меньше 120; е) в пределах от 80 до 120.

227. В условиях задачи 225 найти долю людей, у которых коэффициент интеллекта отклонится от 100 менее, чем на 48.

228. В условиях задачи 225 найти вероятность того, что из шести независимо отобранных человек у двоих коэффициент интеллекта будет выше 92.

229. Случайная величина $X\sim N(a=0;\sigma=1)$. Построить кривую распределения этой случайной величины, график её функции распределения. Найти координаты плотности распределения $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ при $x=1;-1;2,25$. Вычислить и указать на обоих графиках следующие вероятности: $\mathbf{P}\{X<1\}$; $\mathbf{P}\{X>-1\}$; $\mathbf{P}\{|X|<1\}$; $\mathbf{P}\{|X|<3\}$; $\mathbf{P}\{0<X<3\}$.

230. Случайная величина $X\sim N(a=1;\sigma=1)$. Найти вероятности $\mathbf{P}\{X>2\}$, $\mathbf{P}\{X<2\}$, $\mathbf{P}\{0<X<2\}$ и $\mathbf{P}\{X<2\,|\,X>0\}$.

231. **Правило трёх сигм.** Случайная величина $X\sim N(a;\sigma)$. Найти $\mathbf{P}\{|X-\mathbf{M}X|<3\sigma_X\}$.

232. Доказать, что для случайной величины $X\sim N(a;\sigma)$ $\mathbf{P}\{a<X<b\}=$
$=\mathbf{P}\{a\le X<b\}=\mathbf{P}\{a<X\le b\}=\mathbf{P}\{a\le X\le b\}=\Phi_0\left(\frac{b-a}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-a}{\sigma}\right)$, $\mathbf{P}\{|X-a|<\Delta\}=2\Phi_0\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)$.

233. Случайная величина $X\sim N(a=2;\sigma=3)$. Найти вероятности $\mathbf{P}\{X>1\}$, $\mathbf{P}\{-2<X\le 2\}$, $\mathbf{P}\{X<2\}$ и $\mathbf{P}\{X<2\,|\,X>0\}$. Записать «*правило трёх сигм*» для этой случайной величины.

234. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии нормального распределения (см. табл. 3.2).

235. Текущая цена акции может быть приближена нормальным распределением с математическим ожиданием 15,28 руб. и средним квадратичным отклонением 0,12 руб. Рассчитать вероятности того, что цена акции окажется: а) не ниже 15,50 руб.; б) не выше 15,00 руб.; в) между 15,10 руб. и 15,40 руб.; г) между 15,05 руб. и 15,10 руб.

236. Цена некоторой акции распределена нормально. В течение последнего года в 20% рабочих дней цена была меньше 20 руб., а в 75% рабочих дней она была больше 25 руб. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение цены этой акции.

237. Из данных, полученных от руководства цеха при его проверке, следует, что брак составляет 5% всей выпускаемой продукции. По данным, полученным из технической документации, установлено, что размер продукции представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 10 мм, и средним квадратичным отклонением, равным 0,2 мм. Величина максимально допустимого отклонения размера детали от номинального, при котором деталь ещё считается годной, составляет 0,3 мм. Оценить с помощью вероятности достоверность информации, полученной от руководства цеха о качестве выпускаемой продукции.

238. При расследовании причин аварии было установлено, что она могла произойти из-за установки на автомобиль детали, размеры которой выходят за пределы допустимого интервала (15 мм; 25 мм). Известно, что размер деталей, поступающих на конвейер автозавода, представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 20 мм, и средним квадратичным отклонением, равным 5 мм. Оценить вероятность того, что причиной аварии послужила установка на автомобиль детали нестандартного размера.

239. **Правило шести сигм.** Крупнейшие мировые корпорации при статистическом контроле качества продукции переходят в настоящее время на правило шести сигм. Напомним, что правило трёх сигм означает, что некачественная продукция (не попадающая в интервал $(\mathbf{M}X-3\sigma_X;\mathbf{M}X+3\sigma_X)$) составляет $100-99{,}73=0{,}27\%$, т. е. на каждые 10 000 единиц продукции допустимо изготовление не более, чем 27 некачественных. Пояснить, в чём заключается правило шести сигм: какова допустимая доля некачественной продукции?

Логнормальное распределение

240. Указать недостатки использования нормального распределения для приближения распределений цен активов. Объяснить, как логнормальное распределение используется для преодоления этих недостатков.

241. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии логнормального распределения (см. табл. 3.2).

242. Статистика по вкладам населения в некоторый банк говорит о том, что размер вклада случайно выбранного клиента распределён по логнормальному закону с параметрами $a = 1\,200$ ден. ед., $\sigma = 2$ ден. ед. Определить: а) средний размер вклада; б) долю клиентов, размер вклада которых составляет не менее 1 000 ден. ед.

243. Месячный доход случайно выбранной семьи из некоторой социальной группы описывается логнормальным законом распределения с математическим ожиданием 1 000 ден. ед. и средним квадратичным отклонением 600 ден. ед. Найти долю семей, имеющих доход менее 1 500 ден. ед.

Другие законы распределения

244. Вычислить: а) $\mathbf{P}\{\chi^2_{20}>10{,}9\}$; б) $\mathbf{P}\{\chi^2_{20}<28{,}4\}$; в) $\mathbf{P}\{8{,}26\le\chi^2_{20}<31{,}4\}$; г) $\mathbf{P}\{\chi^2_{40}>10{,}9\}$; д) $\mathbf{P}\{\chi^2_{40}<28{,}4\}$; е) $\mathbf{P}\{8{,}26\le\chi^2_{40}<31{,}4\}$.

245. Найти: а) $\mathbf{P}\{|T_{10}|<2,23\}$; б) $\mathbf{P}\{-1,81<T_{10}<3,17\}$; в) $\mathbf{P}\{-1,81<T_{40}<3,17\}$.

246. Найти $\mathbf{P}\{|F_{3;16}|>3,24\}$.

247. Треугольное распределение (распределение Симпсона). Плотность распределения случайной величины X изображена на рис. 3.2. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

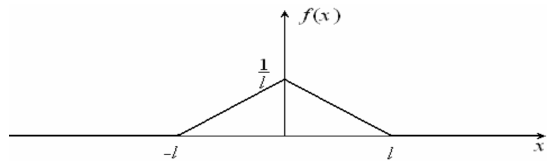


Рис. 3.2. *График плотности треугольного распределения*

248. Распределение Рэлея. Найти функцию распределения и математическое ожидание случайной величины X, плотность распределения которой имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Решение. Очевидно, $F(x)\equiv 0$ при $x<0$. При $x\geq 0$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(r)dr=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dr+$

$$+\int\limits_0^x \frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr=\int\limits_0^x e^{-\left(\frac{r}{\sigma\sqrt2}\right)^2}\frac{2r}{2\sigma^2}dr=-\int\limits_0^x e^{-\left(\frac{r}{\sigma\sqrt2}\right)^2}d\left[\left(\frac{r}{\sigma\sqrt2}\right)^2\right]=-e^{-\left(\frac{r}{\sigma\sqrt2}\right)^2}\Bigg|_0^x=-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}+e^0=1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

$$\mathbf{M}X=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} rf(r)dr=\int\limits_{-\infty}^{0} r\cdot 0dr+\int\limits_0^{+\infty} r\cdot\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr=\sigma\sqrt2\int\limits_0^{+\infty}2\left(\frac{r}{\sigma\sqrt2}\right)^2 e^{-\left(\frac{r}{\sigma\sqrt2}\right)^2}d\left(\frac{r}{\sigma\sqrt2}\right)=\left\{\text{замена } t=\frac{r}{\sigma\sqrt2}\right\}=$$

$$=\sigma\sqrt2\int\limits_0^{+\infty}2t^2e^{-t^2}dt=\sigma\sqrt2\int\limits_0^{+\infty}t\cdot 2te^{-t^2}dt=-\sigma\sqrt2\int\limits_0^{+\infty}t\cdot e^{-t^2}d(-t^2)=-\sigma\sqrt2\int\limits_0^{+\infty}t\cdot de^{-t^2}=\{\text{по частям}\}=$$

$$=-\sigma\sqrt2\left(t\cdot e^{-t^2}\Big|_0^{+\infty}-\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}dt\right)=\sigma\sqrt2\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\{\text{замена } u=\sqrt2 t\}=\sigma\sqrt2\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\frac{1}{\sqrt2}du=$$

$$=\sigma\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\frac{1}{\sqrt2}du=\sigma\sqrt{2\pi}\Phi_0(+\infty)=\sigma\sqrt{2\pi}\cdot\frac12=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\ ❑$$

§3.4. Производящая функция, моменты, мода, медиана и квантили случайной величины

Начальным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени случайной величины X:

$$n_k(X)=\mathbf{M}(X^k),\ k=0,1,2\ldots. \tag{3.33}$$

Центральным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени отклонения случайной величины X от своего математического ожидания:

$$m_k(X)=\mathbf{M}[(X-\mathbf{M}X)^k],\ k=0,1,2,\ldots. \tag{3.34}$$

Справедливы следующие выражения для центральных моментов:

$$m_0(X)=n_0(X)=1; \tag{3.35}$$

$$m_1(X)=0; \tag{3.36}$$

$$m_2(X)=n_2(X)-n_1^2(X); \tag{3.37}$$

$$\mu_3(X) = \nu_3(X) - 3\nu_1(X)\nu_2(X) + 2\nu_1^3(X); \tag{3.38}$$

$$\mu_4(X) = \nu_4(X) - 4\nu_1(X)\nu_3(X) + 6\nu_1^2(X)\nu_2(X) - 3\nu_1^4(X). \tag{3.39}$$

Производящей функцией случайной величины X называется функция от параметра t (вообще говоря, комплексного), равная

$$m_X(t) = \mathbf{M}e^{tX}. \tag{3.40}$$

Как и раньше, если известно, о какой случайной величине идёт речь, то индекс, обозначающий эту случайную величину, опускается: $m(t) \equiv m_X(t)$.

Начальные моменты случайной величины X выражаются через производные её производящей функции[1]:

$$\text{для всех } k = 0, 1, 2, \ldots : \nu_k(X) = m_X^{(k)}(0), \tag{3.41}$$

где $m_X^{(k)}(t)$ — k-я производная функции $m_X(t)$.

Если $t = iu$ (где $i = \sqrt{-1}$), то производящая функция переходит в *характеристическую функцию*, широко используемую в фундаментальной теории вероятностей и теории меры.

Производящая функция случайной величины обладает следующими свойствами:

$$m_{cX}(t) = m_X(ct); \tag{3.42}$$

$$m_{X+Y}(t) = m_X(t)m_Y(t) \tag{3.43}$$

(здесь X, Y — *независимые* случайные величины, c — неслучайная постоянная).

В качестве показателя центра группирования значений случайной величины, наряду с математическим ожиданием, используются также *медиана* и *мода*.

Медианой абсолютно непрерывной случайной величины X называется такое число $\mathbf{Me}X$, что

$$\mathbf{P}\{X < \mathbf{Me}X\} = P\{X > \mathbf{Me}X\} = 0,5. \tag{3.44}$$

Медиана $\mathbf{Me}X$ *дискретной случайной величины* X (заданной рядом распределения (3.9) — это любое число, которое находится на отрезке $[x_l; x_{l+1}]$, определяемом из условий

$$\sum_{i=1}^{l} p_i \le 0,5; \sum_{i=1}^{l+1} p_i > 0,5, \tag{3.45}$$

и называемом *медианным*. В качестве медианы $\mathbf{Me}X$ обычно используют значение, получаемое линейной аппроксимацией:

$$\mathbf{Me}X = x_l + \frac{x_{l+1} - x_l}{p_{l+1}} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{l} p_i \right). \tag{3.46}$$

Модой абсолютно непрерывной случайной величины X называется точка локального максимума плотности распределения:

$$f_X(\mathbf{Mo}X) = \max_{x \in \mathbb{R}} f_X(x). \tag{3.47}$$

Модой дискретной случайной величины X называется значение этой случайной величины, соответствующее наибольшей вероятности:

$$\mathbf{Mo}X = x_i, \text{ такое, что } p_i = \max_j p_j. \tag{3.48}$$

Распределения, имеющие одну моду, называются *одномодальными*.

Коэффициент асимметрии $\mathbf{A}_X$ *случайной величины* X характеризует скошенность кривой распределения этой случайной величины относительно её математического ожидания и вычисляется по формуле

$$\mathbf{A}_X = \frac{\mu_3(X)}{\sigma_X^3}. \tag{3.49}$$

[1] Если эти производные существуют.

Обычно $|\mathbf{A}_X| < 2$. Для симметричных распределений $\mathbf{A}_X = 0$, если левая ветвь кривой распределения длиннее правой, то $\mathbf{A}_X < 0$, если же левая ветвь кривой распределения короче правой, то $\mathbf{A}_X > 0$.

Эксцесс $\mathbf{E}_X$ *случайной величины* X характеризует островершинность кривой распределения этой случайной величины по сравнению с кривой нормального распределения и вычисляется по формуле

$$\mathbf{E}_X = \frac{m_4(X)}{\sigma_X^4} - 3. \tag{3.50}$$

Обычно $-1 \le \mathbf{E}_X \le 6$. Для нормального распределения $\mathbf{E}_{N(a;\sigma)} = 0$; если кривая распределения случайной величины X имеет менее острую вершину, чем кривая нормального распределения, то $\mathbf{E}_X < 0$; если кривая распределения случайной величины X имеет более острую вершину, чем кривая нормального распределения, то $\mathbf{E}_X > 0$.

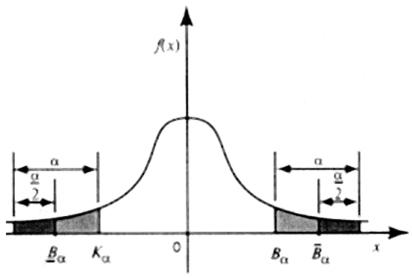


Рис. 3.3. *Критические границы*

Левосторонней критической границей (*или квантилью*) уровня α случайной величины X называется такое число K_α, что

$$F_X(K_\alpha) = \alpha, \tag{3.51}$$

т. е. $\mathbf{P}\{X < K_\alpha\} = \alpha$.

Правосторонней критической границей уровня α случайной величины X называется такое число B_α, что

$$F_X(B_\alpha) = 1 - \alpha, \tag{3.52}$$

т. е. $\mathbf{P}\{X \ge B_\alpha\} = \alpha$.

Левосторонняя и правосторонняя критические границы одного и того же уровня α связаны между собой соотношением

$$K_\alpha = B_{1-\alpha}. \tag{3.53}$$

Двусторонними критическими границами уровня α случайной величины X называются такие числа $\underline{B}_\alpha, \overline{B}_\alpha$, что

$$F_X(\underline{B}_\alpha) = \frac{\alpha}{2}; F_X(\overline{B}_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \tag{3.54}$$

т. е. $\mathbf{P}\{X < \underline{B}_\alpha\} = \mathbf{P}\{X \ge \overline{B}_\alpha\} = \frac{\alpha}{2}$.

Между односторонними и двусторонними критическими границами случайной величины X существуют следующие соотношения

$$\underline{B}_\alpha = K_{\alpha/2} = B_{1-\alpha/2}; \overline{B}_\alpha = K_{1-\alpha/2} = B_{\alpha/2}. \tag{3.55}$$

Для стандартного нормального распределения $N(0;1)$ двусторонние критические границы уровня α симметричны и имеют специальные обозначения $\underline{B}_\alpha = -u_\alpha, \overline{B}_\alpha = u_\alpha$, при этом

$$\Phi_0(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}. \tag{3.56}$$

На рис. 3.3 указаны левосторонняя, правосторонняя и двусторонние критические границы для некоторого распределения.

249. Доказать формулы (3.35) – (3.39).

250. Случайная величина X имеет производящую функцию $m_X(t) = 0,2 + 0,3e^t + 0,1e^{2t} + 0,4e^{4t}$. Составить ряд распределения этой случайной величины, найти её математическое ожидание и дисперсию, а также производящую функцию случайной величины $Y = X^2$.

251. Найти производящую функцию случайной величины, заданной рядом распределения

X	-1	0	1
p	$0,2$	$0,3$	$0,5$

252. Доказать формулу (3.41).

253. Доказать свойства производящей функции (3.42) – (3.43).

254. Найти производящую функцию случайной величины, распределённой по нормальному закону.

Решение. $m_X(t) = \mathbf{M}e^{tX} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}dx =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2-2x(a+\sigma^2t)+a^2+2a\sigma^2t-2a\sigma^2t+\sigma^4t^2-\sigma^4t^2\right)}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a-\sigma^2t}{\sigma}\right)^2}e^{at+\frac{\sigma^2t^2}{2}}dx =$$

$$= e^{at+\frac{\sigma^2t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a-\sigma^2t}{\sigma}\right)^2}dx = e^{at+\frac{\sigma^2t^2}{2}}\left(\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{+\infty-a-\sigma^2t}{\sigma}\right)\right) = e^{at+\frac{\sigma^2t^2}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = e^{at+\frac{\sigma^2t^2}{2}}.\ ❑$$

255. Найти четвёртый начальный момент случайной величины $X \sim N(0;1)$.

Решение. Производящая функция $m_X(t) = e^{at+\frac{\sigma^2t^2}{2}} = e^{\frac{t^2}{2}}$, её производные $\left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)' = te^{\frac{t^2}{2}}$, $\left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)'' = e^{\frac{t^2}{2}} + t^2e^{\frac{t^2}{2}}$, $\left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)^{(3)} = 3te^{\frac{t^2}{2}} + t^3e^{\frac{t^2}{2}}$, $\left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)^{(4)} = 3e^{\frac{t^2}{2}} + 6t^2e^{\frac{t^2}{2}} + t^4e^{\frac{t^2}{2}}$, поэтому четвёртый начальный момент $\nu_4(X) = \left.\left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)^{(4)}\right|_{t=0} = \left.\left(3e^{\frac{t^2}{2}} + 6t^2e^{\frac{t^2}{2}} + t^4e^{\frac{t^2}{2}}\right)\right|_{t=0} = 3$. ❑

256. Найти производящую функцию и с её помощью вычислить математическое ожидание для случайной величины $X \sim G(p)$.

257. Найти производящую функцию для случайной величины $X \sim R(a;b)$.

258. Найти производящую функцию, второй начальный и третий центральный моменты для случайной величины $X \sim \mathrm{Exp}(\mu)$.

259. Доказать, что величина $\mathbf{M}(X-c)^2$ достигает своего наименьшего значения при $c = \mathbf{M}X$.

260. Найти моду и медиану случайной величины $X \sim R(a;b)$.

261. Найти моду и медиану случайной величины $X \sim \mathrm{Exp}(\mu)$.

262. Пусть X — некоторая случайная величина, $Y = aX + b$ (a и b — неслучайные постоянные, $a \neq 0$). Доказать, что $\mathbf{A}_Y = \begin{cases} \mathbf{A}_X, & a > 0, \\ -\mathbf{A}_X, & a < 0, \end{cases}$ $\mathbf{E}_Y = \mathbf{E}_X$.

263. Пусть X — некоторая случайная величина, $\overset{\circ}{X} = \dfrac{X - \mathbf{M}X}{\sigma_X}$. Доказать, что $\mathbf{A}_{\overset{\circ}{X}} = \mathbf{A}_X$, $\mathbf{E}_{\overset{\circ}{X}} = \mathbf{E}_X$.

264. Найти коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины $X \sim N(a;\sigma)$.

265. Найти коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины $X \sim \Pi(\lambda)$.

266. Найти коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины $X \sim R(a;b)$.

267. Найти коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины X, имеющей *распределение Лапласа* с плотностью $f(x) = \frac{m}{2}e^{-m|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

268. Найти для случайной величины $X \sim N(0;1)$: а) 2,5%-ную и 97,5%-ную квантили ; б) 5%-ную правостороннюю критическую точку.

269. Найти 5%-ную и 95%-ную квантили распределений: а) T_{10}; б) χ^2_{20}.

270. Найти 5%-ную и 95%-ную квантили распределения $F_{2;3}$.

§3.5. Многомерные случайные величины

Многомерная случайная величина $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — это совокупность случайных величин X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве Ω.

Закон распределения вероятностей многомерной случайной величины задаётся её функцией распределения

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\{(X_1 < x_1) \cap (X_2 < x_2) \cap \ldots \cap (X_n < x_n)\},$$

которая является числовой функцией многих переменных и (как вероятность) принимает значения на отрезке $[0; 1]$.

Функция распределения многомерной случайной величины обладает следующими свойствами.

$$\textit{для всех } x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}: 0 \le F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 1; \tag{3.57}$$

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \textit{ не убывает по каждому аргументу}; \tag{3.58}$$

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \textit{ непрерывна слева по каждому аргументу}; \tag{3.59}$$

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, -\infty) = 0; \tag{3.60}$$

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, +\infty) = F_{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{3.61}$$

В отличие от одномерного случая, выполнение свойств (3.57) – (3.61) для некоторой функции $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ не гарантирует, что эта функция является функцией распределения некоторой многомерной случайной величины.

Многомерные случайные величины, так же, как и одномерные, могут быть *дискретными* (когда наборы возможных значений образуют конечное или счётное множество) или *непрерывными* (когда множество наборов возможных значений несчётно).

Всюду ниже в данном параграфе будут рассматриваться двумерные случайные величины.

Вероятность попадания двумерной случайной величины в полуоткрытый прямоугольник равна

$$\mathbf{P}\{(a_1 \le X_1 < b_1) \cap (a_2 \le X_1 < b_2)\} = \tag{3.62}$$
$$= F_{X_1,X_2}(b_1,b_2) - F_{X_1,X_2}(a_1,b_2) - F_{X_1,X_2}(b_1,a_2) + F_{X_1,X_2}(a_1,a_2).$$

Если дополнительно к условиям (3.57) – (3.61) потребовать от функции $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ неотрицательности величины

$$F_{X_1,X_2}(b_1,b_2) - F_{X_1,X_2}(a_1,b_2) - F_{X_1,X_2}(b_1,a_2) + F_{X_1,X_2}(a_1,a_2)$$

для любых $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $b_1 \ge a_1, b_2 \ge a_2$, то тогда эта функция обязательно будет являться функцией распределения некоторой двумерной случайной величины.

Двумерные дискретные случайные величины удобно задавать с помощью таблиц распределения

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	$\cdots$
y_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
y_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$

(3.63)

В такой таблице заголовки столбцов x_j соответствуют всем возможным значениям первой компоненты X, а названия строк y_i — всем возможным значениям второй компоненты Y. При этом в клетку, находящуюся в i-й строке и в j-м столбце, записывается значение вероятности $p_{ij} = \mathbf{P}\{(X = x_j) \cap (Y = y_i)\}$. Естественно,

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1. \tag{3.64}$$

Функция распределения двумерной дискретной случайной величины равна

$$F_{XY}(x,y) = \sum_{x_j < x} \sum_{y_i < y} p_{ij}. \tag{3.65}$$

Законы распределения каждой из компонент такой двумерной случайной величины (так называемые *маргинальные законы распределения*) восстанавливаются по таблице распределения (3.63) при помощи формул

$$\mathbf{P}\{X = x_j\} = \sum_i p_{ij}, \quad \mathbf{P}\{Y = y_i\} = \sum_j p_{ij}. \tag{3.66}$$

Двумерная случайная величина называется *абсолютно непрерывной*, если её функция распределения может быть представлена в виде

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y)\,dy \right) dx, \tag{3.67}$$

при этом функция $f_{XY}(x,y)$ называется *плотностью распределения двумерной случайной величины* $(X;Y)$.

Плотность распределения абсолютно непрерывной двумерной случайной величины обладает следующими свойствами:

$$\textit{для всех } x,y \in \mathbb{R}: f_{XY}(x,y) \ge 0; \tag{3.68}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy \right) dx = 1, \tag{3.69}$$

причём любая функция, обладающая этими свойствами (3.68) – (3.69), является плотностью распределения некоторой абсолютно непрерывной двумерной случайной величины.

Если функция распределения абсолютно непрерывной двумерной случайной величины $(X;Y)$ имеет смешанную частную производную $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)$, то плотность распределения $f_{XY}(x,y)$ равна этой частной производной:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y). \tag{3.70}$$

Если абсолютно непрерывная двумерная случайная величина $(X;Y)$ имеет плотность $f_{XY}(x,y)$, то одномерные случайные величины X и Y также являются абсолютно непрерывными, и их плотности можно рассчитать по формулам

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x,y)dy,\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y)dx\ . \tag{3.71}$$

Свойство (3.71) справедливо только для *двумерных* абсолютно непрерывных случайных величин. В случае $n > 2$ это свойство выглядит существенно иначе.

Напомним[1], что две *случайные величины* X и Y называются *независимыми*, если для всех $x,y \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\{(X < x) \cap (Y < y)\} = \mathbf{P}\{X < x\}\mathbf{P}\{Y < y\}\ , \tag{3.72}$$

т. е. если для всех $x,y \in \mathbb{R}$ события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ независимы.

Для дискретных случайных величин X и Y условие независимости (3.8) эквивалентно условию

$$\mathbf{P}\{(X = x) \cap (Y = y)\} = \mathbf{P}\{X = x\}\mathbf{P}\{Y = y\}\ , \tag{3.73}$$

а для абсолютно непрерывных случайных величин — условию

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ . \tag{3.74}$$

Для измерения зависимости случайных величин вводится *ковариация* случайных величин X и Y

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbf{M}[(X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y)]. \tag{3.75}$$

Последняя формула легко преобразуется к виду

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbf{M}(XY) - \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y\ . \tag{3.76}$$

Ковариация случайных величин обладает следующими свойствами:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X),\ \operatorname{cov}(X,X) = \mathbf{D}X\ , \tag{3.77}$$

$$\operatorname{cov}(aX,Y) = a\operatorname{cov}(X,Y),\ \operatorname{cov}(X+Y,Z) = \operatorname{cov}(X,Z) + \operatorname{cov}(Y,Z), \tag{3.78}$$

$$\textit{для независимых случайных величин } X \textit{ и } Y\quad \operatorname{cov}(X,Y) = 0\ . \tag{3.79}$$

Для случайных величин X и Y, имеющих тенденцию изменяться одновременно в одну и ту же сторону, $\operatorname{cov}(X,Y) > 0$, для случайных величин X и Y, имеющих тенденцию изменяться одновременно в разные стороны, $\operatorname{cov}(X,Y) < 0$.

Дисперсия суммы произвольных (зависимых или независимых) случайных величин рассчитывается по формуле

$$\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y + 2\operatorname{cov}(X,Y)\ . \tag{3.80}$$

Ковариация может принимать произвольные вещественные значения, поэтому не вполне пригодна к использованию в качестве меры связи случайных величин. Для этого лучше подходит *коэффициент корреляции* случайных величин X и Y

$$r(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\mathbf{M}[(X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y)]}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\mathbf{M}(XY) - \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y}{\sigma_X\sigma_Y}\ . \tag{3.81}$$

Коэффициент корреляции обладает следующими свойствами:

$$\textit{для любых случайных величин } X \textit{ и } Y:\ -1 \le r(X,Y) \le 1; \tag{3.82}$$

$$\textit{для независимых случайных величин } X \textit{ и } Y:\ r(X,Y) = 0; \tag{3.83}$$

для линейно связанных случайных величин X *и* $Y = aX + b$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a \ne 0)$ *и только для них*:

$$|r(X,Y)| = 1\ . \tag{3.84}$$

Если коэффициент корреляции $r(X,Y) = 0$, то это не обязательно означает независимость случайных величин X,Y. В этом случае говорят, что данные случайные величины *некоррелированны*. Из независимости следует некоррелированность, но наоборот — не всегда.

---

[1] См. формулу (3.8) в §3.1.

Случайная величина, которая задаётся плотностью распределения

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}+\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}, \qquad (3.85)$$

называется распределённой по *двумерному нормальному закону*.

При этом её компоненты X_1 и X_2 распределены по одномерным нормальным законам с математическими ожиданиями a_1 и a_2 соответственно и средними квадратичными отклонениями σ_1 и σ_2 соответственно, а параметр ρ равен коэффициенту корреляции между случайными величинами X_1 и X_2.

271. Доказать свойства функции распределения многомерной случайной величины (3.57) – (3.61).

272. Доказать формулу (3.62).

273. Доказать, что функция

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin y, & x_1\le 0,\ x_2\le 0 \text{ или } x_1+x_1\le 1,\\ 0, & \text{иначе, т. е. когда одновременно } x_1>0,\ x_2>0 \text{ и } x_1+x_1>1\end{cases}$$

удовлетворяет всем свойствам (3.57) – (3.61), но при этом не является функцией распределения случайной величины.

Решение. Предположим, что $F(x_1,x_2)$ описывает некоторую случайную величину (X_1,X_2). Вероятность $\mathbf{P}\{(0,1\le X_1<1,1)\cap(0,1\le X_1<1,1)\}=F(1,1;\,1,1)-F(0,1;\,1,1)-F(1,1;\,0,1)+F(0,1;\,0,1)=$ $=1-1-1+0=-1$, что противоречит аксиоме неотрицательности вероятности (1.36). Между тем справедливость свойств (3.57) – (3.61) легко проверить (предоставляем это читателю. ❑

274. Двумерная случайная величина $(X;Y)$ задана функцией распределения

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin y, & 0\le x<\frac{\pi}{2},\ 0\le y<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Найти $\mathbf{P}\left\{\left(0\le X<\frac{\pi}{4}\right)\cap\left(\frac{\pi}{6}\le Y<\frac{\pi}{3}\right)\right\}$.

275. Доказать формулу (3.66).

276. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	0	$0,1$	$0,4$
1	$0,2$	$0,2$	$0,1$

Составить ряды распределения её компонент X и Y. Определить вероятность $\mathbf{P}\{X<Y\}$.

Решение. Вначале составим ряды распределения случайных величин X и Y. Случайная величина X принимает значения –1; 0 и 1 с вероятностями 0,2 = 0 + 0,2; 0,3 = 0,1 + 0,2 и 0,5 = 0,4 + 0,1 соответственно. Таким образом, эта случайная величина имеет ряд распределения

X	-1	0	1
p	$0,2$	$0,3$	$0,5$

Аналогично получаем ряд распределения случайной величины Y:

Y	0	1
p	0,5	0,5

Вероятность $\mathbf{P}\{X<Y\} = \mathbf{P}\{(X=-1)\cap(Y=0)\} + \mathbf{P}\{(X=-1)\cap(Y=1)\} + \mathbf{P}\{(X=0)\cap(Y=1)\} = 0+0,2+0,2=0,4$. ❑

277. Двумерная случайная величина $(X;Y)$ задана функцией распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} 1-2^{-x}-2^{-y}-2^{-x-y} & x \ge 0, y \ge 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти плотность распределения этой случайной величины.

278. Двумерная случайная величина $(X;Y)$ задана плотностью распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{2}, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le y < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти функцию распределения этой случайной величины.

279. Доказать, что плотность распределения любой абсолютно непрерывной двумерной случайной величины обладает свойствами (3.68) – (3.69).

280. Доказать, что любая функция, обладающая свойствами (3.68) – (3.69), является плотностью распределения некоторой абсолютно непрерывной двумерной случайной величины.

281. Доказать формулу (3.70).

282. Доказать, что для любых абсолютно непрерывных двумерных случайных величин справедливо свойство (3.71).

Доказательство. По свойству (3.61) $F_X(x) = F_{XY}(x,+\infty) = \lim\limits_{y\to+\infty} F_{XY}(x,y) =$ $= \lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\,dv \right) du = \lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} \underbrace{\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(u,v)\,dv \right)}_{f_X(x)} du$, что и требовалось доказать. Вторая часть доказывается аналогично. ❑

283. Доказать условие независимости дискретных случайных величин (3.73).

284. Доказать условие независимости абсолютно непрерывных случайных величин (3.74).

285. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$Y \setminus X$	-1	0	1
1	0,15	0,3	0,3
2	0,1	0,05	0,1

Здесь случайная величина X описывает доход инвестиционной компании на рынке акций, а случайная величина Y — доход на рынке облигаций. Составить ряды распределения её компонент X и Y, а также условный закон распределения компоненты X при условии $Y=2$. Выяснить, зависимы ли компоненты X и Y. Найти закон распределения суммарного дохода компании $X+Y$.

286. Двумерная случайная величина $(X;Y)$ задана плотностью распределения $f(x,y) = c\cdot e^{-x^2-2xy-4y^2}$. Найти неслучайную постоянную c, плотности распределения случайных величин X и Y, выяснить, зависимы ли маргинальные случайные величины X и Y.

287. Доказать формулу (3.76).

Доказательство. По свойствам математического ожидания $\operatorname{cov}(X,Y)=\mathbf{M}[(X-\mathbf{M}X)(Y-\mathbf{M}Y)]=$ $=\mathbf{M}(XY-Y\cdot\mathbf{M}X-X\cdot\mathbf{M}Y+\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y)=\mathbf{M}(XY)-\mathbf{M}Y\cdot\mathbf{M}X-\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y+\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y=\mathbf{M}(XY)-\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y$. ❑

288. Доказать свойства ковариации (3.77) – (3.80).

Доказательство. $\operatorname{cov}(X,Y)=\mathbf{M}(XY)-\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y=\mathbf{M}(YX)-\mathbf{M}Y\cdot\mathbf{M}X=\operatorname{cov}(Y,X)$; $\operatorname{cov}(X,X)=$ $=\mathbf{M}(X^2)-(\mathbf{M}X)^2=\mathbf{D}X$; для независимых случайных величин X и Y $\operatorname{cov}(X,Y)=\mathbf{M}(XY)-$ $-\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y=\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y-\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y=0$. ❑

289. В условиях задачи 276 найти ковариацию случайных величин X и Y.

Решение. Чтобы найти $\mathbf{M}(XY)$, перемножим все возможные значения x_j, y_i и соответствующих вероятностей p_{ij} из таблицы распределения данной случайной величины и произведения сложим: $\mathbf{M}(XY)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_jy_i\mathbf{P}\{(X=x_j)\cap(Y=y_i)\}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_jy_ip_{ij}=0\cdot(-1)\cdot0+0\cdot0\cdot0,1+$ $+0\cdot1\cdot0,4+1\cdot(-1)\cdot0,2+1\cdot0\cdot0,2+1\cdot1\cdot0,1=0+0+0-0,2+0+0,1=-0,1$. $\mathbf{M}X$ и $\mathbf{M}Y$ найдём по рядам распределения случайных величин X и Y, полученным в задаче 276: $\mathbf{M}X=-1\cdot0,2+0\cdot0,3+1\cdot0,5=0,3$, $\mathbf{M}Y=0\cdot0,5+1\cdot0,5=0,5$. Поэтому $\operatorname{cov}(X,Y)=\mathbf{M}(XY)-\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y=$ $=-0,1-0,3\cdot0,5=-0,25$. ❑

290. Найти ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X и Y, если двумерная случайная величина $(X;Y)$ задана плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}\sin x\cdot\sin y, & 0\le x<\pi,\ 0\le y<\pi,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

291. Доказать свойства коэффициента корреляции (3.82) – (3.84).

Доказательство. Докажем последнее из названных свойств (справедливость первых двух читатель легко проверит самостоятельно). По свойствам математического ожидания и дисперсии

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathbf{M}[X(aX+b)]-\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}(aX+b)}{\sigma_X\sigma_{aX+b}}=\frac{a(\mathbf{M}X^2)+b\mathbf{M}X-a(\mathbf{M}X)^2-b\cdot\mathbf{M}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}\sqrt{\mathbf{M}[(aX+b)^2]-(a\mathbf{M}X+b)^2}}=$$

$$=\frac{a\mathbf{D}X+b(\mathbf{M}X-\mathbf{M}X)}{\sqrt{\mathbf{D}X}\sqrt{a^2\mathbf{M}(X^2)+2ab\mathbf{M}X+b^2-a^2(\mathbf{M}X)^2-2ab\mathbf{M}X-b^2}}=\frac{a\cdot\mathbf{D}X}{|a|\cdot\mathbf{D}X}=\begin{cases}-1, & a<0,\\ 1 & a>0,\end{cases}$$

поэтому $|\rho(X,Y)|=1$. ❑

292. В условиях задачи 276 найти коэффициент корреляции случайных величин X и Y.

Решение. Найдём $\mathbf{M}(X^2)=(-1)^2\cdot0,2+0^2\cdot0,3+1^2\cdot0,5=0,7$ и $\mathbf{M}(Y^2)=0^2\cdot0,5+1^2\cdot0,5=0,5$. Отсюда $\mathbf{D}X=\mathbf{M}(X^2)-(\mathbf{M}X)^2=0,7-(0,3)^2=0,61$, $\mathbf{D}Y=\mathbf{M}(Y^2)-(\mathbf{M}Y)^2=0,5-(0,5)^2=0,25$ ($\mathbf{M}X=0,3$ и $\mathbf{M}Y=0,5$ были получены в задаче 289). Поэтому $\sigma_X=\sqrt{\mathbf{D}X}=\sqrt{0,61}\approx0,78$, $\sigma_Y=\sqrt{\mathbf{D}Y}=\sqrt{0,25}\approx0,5$. Окончательно получаем $\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{-0,25}{0,78\cdot0,5}\approx-0,64$. ❑

293. Пусть X, Y, Z — независимые случайные величины с конечными положительными дисперсиями. Проверить, могут ли случайные величины $X+Z$ и $Y+Z$ быть: а) зависимыми; б) независимыми.

294. Доказать, что если $\overset{\circ}{X} = \dfrac{X - \mathbf{M}X}{\sigma_X}$, $\overset{\circ}{Y} = \dfrac{Y - \mathbf{M}Y}{\sigma_Y}$ (где X и Y — некоторые случайные величины), то $\rho\left(\overset{\circ}{X},\overset{\circ}{Y}\right) = \rho(X,Y)$.

295. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$Y \backslash X$	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Найти ковариацию и коэффициент корреляции её компонент X и Y.

296. Петя вычислил ковариацию роста X спортсменов из институтской баскетбольной команды, измеренного в см, и скорости бега Y (тех же спортсменов), измеренной в $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Маша для той же совокупности баскетболистов вычислила ковариацию роста X, измеренного в м, и скорости бега Y, измеренной в $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Определить, в каком отношении находятся эти ковариации.

297. В условиях предыдущей задачи сравнить коэффициенты корреляции, полученные Петей и Машей.

298. Средние квадратичные отклонения случайных величин X и Y равны соответственно 5 и 4. Определить наибольшее возможное значение $\operatorname{cov}(X,Y)$.

299. Случайные величины X и Y — число появлений событий простейшего потока в интервалах времени $(0;t)$ и $(0;t+\tau)$ соответственно. Найти $\rho(X,Y)$.

Решение. Пусть случайная величина Z — число появлений событий простейшего потока в интервале $(t;t+\tau)$. Тогда $X \sim \Pi(\lambda t)$, $Y \sim \Pi(\lambda(t+\tau))$, $Z \sim \Pi(\lambda\tau)$, $\mathbf{M}X = \mathbf{D}X = \lambda t$, $\mathbf{M}Y = \mathbf{D}Y = \lambda(t+\tau)$, $\mathbf{M}Z = \mathbf{D}Z = \lambda\tau$. Поэтому по формуле (3.17) $\mathbf{M}(X^2) = \mathbf{D}X + (\mathbf{M}X)^2 = \lambda t + (\lambda t)^2$. Учитывая, что в силу свойства отсутствия последействия простейшего потока случайные величины X, Y и Z независимы, поэтому по формуле (3.15) $\mathbf{M}(XZ) = \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Z = \lambda^2 t\tau$. Используя (3.81), (3.76) и (3.14), получаем, что $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathbf{M}(XY) - \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \dfrac{\mathbf{M}[X(X+Z)] - \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \dfrac{\mathbf{M}X^2 + \mathbf{M}(XZ) - \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y}{\sqrt{\mathbf{D}X} \cdot \sqrt{\mathbf{D}Y}} = \sqrt{\dfrac{t}{t+\tau}}$. ❑

300. Ожидаемая доходность первого актива равна 8% со средним квадратичным отклонением 7%, ожидаемая доходность второго актива равна 11% со средним квадратичным отклонением 10%. Коэффициент корреляции между этими активами составляет 0,7. Найти ожидаемую доходность и среднее квадратичное отклонение портфеля[1], состоящего на 35% из первого актива и на 65% — из второго.

301. Доказать, что компоненты X_1 и X_2 двумерной нормальной случайной величины (3.85) распределены по одномерным нормальным законам с математическими ожиданиями a_1 и a_2 соответственно и средними квадратичными отклонениями σ_1 и σ_2 соответственно, а параметр ρ равен коэффициенту корреляции между случайными величинами X_1 и X_2.

---

[1] *Портфелем* называется набор ценных бумаг, которым обладает инвестор.

302. Случайная величина $(X_1; X_2)$ задана плотностью распределения

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{1{,}28\pi}e^{-\frac{1}{5{,}12}\left[(x_1-3)^2-0{,}6(x_1-3)(x_2-5)+4(x_2-5)^2\right]}.$$

Найти коэффициент корреляции между случайными величинами X_1 и X_2.

303. Привести пример зависимых, но некоррелированных случайных величин.

304. Доказать, что для нормально распределённых случайных величин условие независимости эквивалентно условию некоррелированности.

§3.6. Условные распределения

Пусть с помощью таблицы распределения (3.63) задана двумерная дискретная случайная величина $(X;Y)$. *Условная вероятность события* $\{Y=y_i\}$ *при условии* $\{X=x_j\}$ вычисляется, согласно определению условной вероятности (2.1), в соответствии с формулой

$$\mathbf{P}\{Y=y_i \mid X=x_j\}=\frac{\mathbf{P}\{(X=x_j)\cap(Y=y_i)\}}{\mathbf{P}\{X=x_j\}}=\frac{p_{ij}}{\sum_k p_{kj}}. \tag{3.86}$$

Таким образом, можно получить *условное распределение дискретной случайной величины* Y *при условии* $\{X=x_j\}$, оно будет задаваться рядом распределения

$Y \mid X=x_j$	y_1	y_2	$\ldots$	y_m	$\ldots$
p	$\frac{p_{1j}}{\sum_k p_{kj}}$	$\frac{p_{2j}}{\sum_k p_{kj}}$	$\ldots$	$\frac{p_{mj}}{\sum_k p_{kj}}$	$\ldots$

(3.87)

Математическое ожидание случайной величины (3.87) называется *условным математическим ожиданием дискретной случайной величины* Y *при условии* $\{X=x_j\}$:

$$\mathbf{M}(Y \mid X=x_j)=\sum_i y_i\mathbf{P}\{Y=y_i \mid X=x_j\}=\sum_i \frac{y_i\mathbf{P}\{(X=x_j)\cap(Y=y_i)\}}{\mathbf{P}\{X=x_j\}}=\frac{\sum_i y_i p_{ij}}{\sum_i p_{ij}}. \tag{3.88}$$

Для дискретных случайных величин X и Y *условные вероятности* $\mathbf{P}\{Y=y_i \mid X\}$ и *условные математические ожидания* $\mathbf{M}(Y \mid X)$ *при условии* X определяются как случайные величины, принимающие на множестве $\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots\}$ значения (3.86) и (3.88) соответственно:

$\mathbf{P}\{Y=y_i \mid X\}$	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p	$\frac{p_{i1}}{\sum_k p_{k1}}$	$\frac{p_{i2}}{\sum_k p_{k2}}$	$\ldots$	$\frac{p_{in}}{\sum_k p_{km}}$	$\ldots$

(3.89)

$\mathbf{M}(Y \mid X)$	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p	$\frac{\sum_i y_i p_{i1}}{\sum_i p_{i1}}$	$\frac{\sum_i y_i p_{i2}}{\sum_i p_{i2}}$	$\ldots$	$\frac{\sum_i y_i p_{in}}{\sum_i p_{in}}$	$\ldots$

(3.90)

Аналогичным образом определяются условные плотности распределения и условные математические ожидания для абсолютно непрерывных случайных величин. *Условная плотность распределения абсолютно непрерывной случайной величины* Y *при условии* $\{X=x\}$ определяется формулой

$$f_{Y|X=x}(y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f_{XY}(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy}, \tag{3.91}$$

а *условное математическое ожидание* — формулой

$$\mathbf{M}(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X=x}(y)dy = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{XY}(x,y)dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy}. \tag{3.92}$$

Рассматривая условную плотность $f_{Y|X}(y)$ как случайную величину, плотность распределения которой определяется при каждом y формулой (3.91), получим

$$\mathbf{M}(Y \mid X) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y)dy. \tag{3.93}$$

Справедливы следующие результаты:

$$\mathbf{P}\{Y = y_i\} = \mathbf{M}(\mathbf{P}\{Y = y_i \mid X = x_j\}) \text{ (*для дискретных случайных величин*)}; \tag{3.94}$$

$$f_Y(y) = \mathbf{M} f_{Y|X}(y) \text{ (*для абсолютно непрерывных случайных величин*)}; \tag{3.95}$$

формула полного математического ожидания:

$$\mathbf{M}Y = \mathbf{M}[\mathbf{M}(Y \mid X)]. \tag{3.96}$$

Справедлива также формула для дисперсии:

$$\mathbf{D}(Y) = \mathbf{M}[\mathbf{D}(Y \mid X)] + \mathbf{D}[\mathbf{M}(Y \mid X)], \tag{3.97}$$

где *условная дисперсия* определяется формулой

$$\mathbf{D}(Y \mid X) = \mathbf{M}\left\{[Y - \mathbf{M}(Y \mid X)]^2 \mid X\right\}. \tag{3.98}$$

305. В условиях задачи 276 найти условный закон распределения компоненты X при условии $Y = 0$.

Решение. Условный закон распределения случайной величины X при условии $Y = 0$ получаем с помощью формулы условной вероятности: $\mathbf{P}\{X = x_i \mid Y = 0\} = \frac{\mathbf{P}\{(X = x_i) \cap (Y = 0)\}}{\mathbf{P}\{Y = 0\}}$, т. е. $\mathbf{P}\{X = -1 \mid Y = 0\} = \frac{\mathbf{P}\{(X = -1) \cap (Y = 0)\}}{\mathbf{P}\{Y = 0\}} = \frac{0}{0{,}5} = 0$, $\mathbf{P}\{X = 0 | Y = 0\} = \frac{\mathbf{P}\{(X = 0) \cap (Y = 0)\}}{\mathbf{P}\{Y = 0\}} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = \frac{1}{5}$, $\mathbf{P}\{X = 1 | Y = 0\} = \frac{\mathbf{P}\{(X = 1) \cap (Y = 0)\}}{\mathbf{P}\{Y = 0\}} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = \frac{4}{5}$. Таким образом, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y = 0$ таков:

$X \mid Y = 0$	-1	0	1
p	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$

❑

306. В условиях задачи 276 найти условное математическое ожидание компоненты X при условии Y.

307. Доказать справедливость формул (3.94) – (3.97).

308. Расписать формулу полного математического ожидания (3.96) для дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин.

§3.7. Функции от случайных величин

Пусть дана дискретная случайная величина X, заданная рядом распределения

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

, (3.99)

и монотонная функция $\varphi(x)$. Тогда различным значениям X соответствуют различные значения $Y = \varphi(X)$, причём вероятности соответствующих значений $X = x_i$ и $Y = \varphi(x_i)$ одинаковы.

Поэтому ряд распределения случайной величины $Y = \varphi(X)$ будет таким:

$$\begin{array}{c|ccccc} Y & \varphi(x_1) & \varphi(x_2) & \ldots & \varphi(x_n) & \ldots \\ \hline p & p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{array}. \tag{3.100}$$

В случае же, когда функция $\varphi(x)$ немонотонна, различным значениям X могут, вообще говоря, соответствовать одинаковые значения $Y = \varphi(X)$, при этом для отыскания вероятностей возможных значений случайной величины $Y = \varphi(X)$ нужно сложить соответствующие вероятности тех возможных значений X, при которых $Y = \varphi(X)$ принимает одинаковые значения:

$$\begin{array}{c|ccccc} Y & y_1 = \varphi(x_1) & y_2 = \varphi(x_2) & \ldots & y_n = \varphi(x_n) & \ldots \\ \hline p & \sum\limits_{i:\varphi(x_i)=y_1} p_i & \sum\limits_{i:\varphi(x_i)=y_2} p_i & \ldots & \sum\limits_{i:\varphi(x_i)=y_n} p_i & \ldots \end{array}. \tag{3.101}$$

Пусть теперь X — непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f_X(x)$. Если функция $y = \varphi(x)$ является строго монотонной и дифференцируемой (при этом существует обратная функция $x = \psi(y)$), то плотность распределения случайной величины X вычисляют по формуле

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|. \tag{3.102}$$

Если же функция $y = \varphi(x)$ немонотонна, то область возможных значений случайной величины X разбивают на участки монотонности функции $\varphi(x)$, в каждом интервале по формуле (3.102) рассчитывается соответствующая функция $f_Y^{(i)}(y) = f_X(\psi_i(y)) \cdot |\psi_i'(y)|$, а затем все они суммируются:

$$f_Y(y) = \sum_i f_Y^{(i)}(y). \tag{3.103}$$

Для функции нескольких случайных величин удобнее искать не плотность распределения, а функцию распределения. Например, для функции двух аргументов $Z = \varphi(X,Y)$ функция распределения вычисляется по формуле

$$F_Z(z) = \iint\limits_{\varphi(x,y)<z} f_{XY}(x,y)dxdy. \tag{3.104}$$

В частности, функция распределения суммы двух случайных величин $Z = X + Y$ равна

$$F_Z(z) = \iint\limits_{x+y<z} f_{XY}(x,y)dxdy = \{\text{замена}\, u = x + y, y = u - x\} = \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,u-x)dx \right] du, \tag{3.105}$$

поэтому

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,z-x)dx. \tag{3.106}$$

Формула (3.106) называется *формулой композиции* или *формулой свёртки*.

309. Случайная величина $X \sim \mathrm{Exp}(\mu)$. Найти распределение случайной величины $Y = e^{-\mu X}$.

Решение. По определению функции распределения $F_Y(y) = \mathbf{P}\{Y < y\} = \mathbf{P}\{e^{-\mu X} < y\} = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \mathbf{P}\{-\mu X < \ln y\}, & 0 \le y < 1, \\ 1, & y \ge 1. \end{cases}$ Учитывая, что $\mathbf{P}\{-\mu X < \ln y\} = \mathbf{P}\left\{X > -\frac{1}{\mu}\ln y\right\} = 1 - \mathbf{P}\left\{X \le -\frac{1}{\mu}\ln y\right\} = 1 - \mathbf{P}\left\{X < -\frac{1}{\mu}\ln y\right\} = 1 - F_X\left(-\frac{1}{\mu}\ln y\right) = 1 - \left[1 - e^{-\mu\left(-\frac{1}{\mu}\ln y\right)}\right] = y$, получаем окончательно $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y, & 0 \le y < 1, \\ 1, & y \ge 1, \end{cases}$ т. е. $Y \sim R(0;1)$. ❑

310. Случайная величина X имеет строго возрастающую функцию распределения $F(x)$. Найти распределение случайной величины $Y = F(X)$.

311. Случайная величина $X \sim N(0;1)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^2$ (т. е. $Y \sim \chi_1^2$).

Решение. По определению функции распределения,

$$F_Y(y) = \mathbf{P}\{Y < y\} = \mathbf{P}\{X^2 < y\} = \mathbf{P}\{|X| < \sqrt{y}\} = \mathbf{P}\{-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\} = \Phi_0\left(\frac{\sqrt{y}-0}{1}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\sqrt{y}-0}{1}\right) =$$

$$= \Phi_0(\sqrt{y}) - \Phi_0(-\sqrt{y}) = 2\Phi_0(\sqrt{y}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - 1.$$

При этом плотность распределения случайной величины Y по свойству (3.27) равна

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - 1\right)'_y = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}. \ ❑$$

312. Случайная величина X имеет плотность распределения $f_X(x)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = |1 - X|$.

Решение. Решение сведём в таблицу:

$f_X(x)$	$f_X(x)$
$y = \varphi(x)$	$y = \lvert 1 - x \rvert$
$x = \begin{cases} \psi_1(y), \\ \psi_2(y) \end{cases}$	$x_1 = 1 - y$ $x_2 = 1 + y$
$\lvert\psi_2'(y)\rvert = \lvert\psi_2'(y)\rvert$	1
$f_Y(y) = \sum_i f_X(\psi_i(y)) \cdot \lvert\psi_i'(y)\rvert$	$f_Y(y) = f_X(1-y) + f_X(1+y),\ y \geq 0.$

При $y < 0$ $f_Y(y) = 0$, так как $Y = |1 - X| \geq 0$. ❑

313. Случайная величина $X \sim R\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = \cos X$.

314. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке [0; 1]: $X_i \sim R(0;1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Найти функцию распределения случайной величины $X = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Решение. $F_X(x) = \mathbf{P}\{X < x\} = \mathbf{P}\{\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} < x\} = \mathbf{P}\{(X_1 < x) \cap (X_2 < x) \cap \ldots \cap (X_n < x)\} =$

$$= \{\text{независимость}\} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{X_i < x\} = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^n, & x \in [0; 1], \\ 1, & x > 1. \end{cases} \ ❑$$

315. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет плотность распределения $f(x) = \begin{cases} ax, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \notin [0; 1]. \end{cases}$ Найти плотность распределения случайной величины $X = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

316. Доказать, что $F_{1k} = T_k^2$.

317. Случайные величины $X_1 \sim N(a_1, \sigma_1), X_2 \sim N(a_2, \sigma_2)$. Найти закон распределения случайной величины $X = X_1 + X_2$.

Решение. Математическое ожидание суммы $a = \mathbf{M}X = \mathbf{M}(X_1 + X_2) = \mathbf{M}X_1 + \mathbf{M}X_2 = a_1 + a_2$, $\sigma^2 = \mathbf{D}X = \mathbf{D}(X_1 + X_2) = \mathbf{D}X_1 + \mathbf{D}X_2 + 2\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$. Применим формулу композиции (3.106) к двумерной нормальной случайной величине (3.85):

$$f_X(x) = f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1X_2}(x_1, x - x_1)dx_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-a_1)(x-x_1-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x-x_1-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}dx_1.$$

При замене $u = x_1 - a_1, v = x - a$, $v - u = x - x_1 - a_2$, а числитель показателя экспоненты (без знака «*минус*») запишется так: $\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-a_1)(x-x_1-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x-x_1-a_2}{\sigma_2}\right)^2 =$

$$= \frac{u^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{u}{\sigma_1}\cdot\frac{v-u}{\sigma_2} + \frac{(v-u)^2}{\sigma_2^2} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[u^2\sigma^2 - 2uv(\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2) + v^2\sigma_1^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[\left(u\sigma - \frac{v\sigma_1(\rho\sigma_2+\sigma_1)}{\sigma}\right)^2 - \frac{v^2\sigma_1^2(\rho\sigma_2+\sigma_1)^2}{\sigma^2} + v^2\sigma_1^2\right] = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[\left(u\sigma - \frac{v\sigma_1(\rho\sigma_2+\sigma_1)}{\sigma}\right)^2 - \frac{v^2}{\sigma^2}(1-\rho^2)\right]$$

Подставляя, получим: $f_X(x) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sigma}\right)^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(u\sigma - \frac{v\sigma_1(\rho\sigma_2+\sigma_1)}{\sigma}\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}}du$. Сделав новую замену переменных $t = \dfrac{u\sigma - \frac{v\sigma_1(\rho\sigma_2+\sigma_1)}{\sigma}}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$, $dt = \dfrac{\sigma du}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$, получаем окончательно

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sigma}\right)^2}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2},$$

где $a = a_1 + a_2$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$. ❑

318. Случайные величины X_i распределены по нормальному закону: $X_i \sim N(a_i; \sigma_i)$, a_i — неслучайные постоянные $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Найти закон распределения случайной величины $X = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$.

319. Автомат заполняет банки кофе. Масса кофе и масса банки распределены нормально со средними 500 г, 50 г и средними квадратичными отклонениями 8 г, 6 г соответственно. Какова вероятность того, что масса готовой к продаже банки будет меньше 540 г?

320. Случайная величина X_1 распределена равномерно на отрезке [1; 3], а случайная величина X_2 распределена равномерно на отрезке [2; 6]. Найти плотность распределения случайной величины $X = X_1 + X_2$.

321. Троллейбусы движутся с интервалом 8 мин, поезда метро — с интервалом 2 мин. Определить закон суммарного времени ожидания транспорта случайно выбранным пассажиром, пользующимся, чтобы добраться на работу, троллейбусом и метро (без пересадок в метро).

322. Найти закон распределения суммы двух независимых случайных величин, распределённых по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно.

323. X и Y — независимые случайные величины, распределённые по равномерному закону на отрезке $[0;\ 4]$. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $t^2 + Xt + Y = 0$ (относительно t) имеет действительные корни.

Решение. Квадратное уравнение имеет действительные корни, если его дискриминант неотрицателен. Чтобы найти требуемую вероятность, воспользуемся формулой (3.102):

$$\mathbf{P}\{X^2 - 4Y \geq 0\} = \mathbf{P}\left\{Y \leq \frac{X^2}{4}\right\} = \iint\limits_{\substack{y \leq \frac{x^2}{4},\\ 0 \leq x \leq 4,\\ 0 \leq y \leq 4}} \frac{1}{16}dxdy = \frac{1}{16}\int_0^4 \int_0^{\frac{x^2}{4}} dydx = \frac{1}{16}\int_0^4 \frac{x^2}{4}dx = \frac{1}{16\cdot 4}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{4} = \frac{1}{3}.\ \square$$

324. Доказать, что если случайные величины $\chi^2_{k_1}$ и $\chi^2_{k_1}$ независимы, то $\chi^2_{k_1} + \chi^2_{k_2} = \chi^2_{k_1+k_2}$.

Глава 4. Предельные теоремы теории вероятностей

§4.1. Неравенства теории вероятностей

При доказательстве многих теорем теории вероятностей и математической статистики используется ряд вспомогательных неравенств[1].

Неравенство Маркова. *Если положительная случайная величина X имеет конечное математическое ожидание $\mathbf{M}X$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\{X \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\mathbf{M}X}{\varepsilon}. \tag{4.1}$$

Неравенство Чебышёва. *Если случайная величина X имеет конечное математическое ожидание $\mathbf{M}X$ и дисперсию $\mathbf{D}X$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}. \tag{4.2}$$

Неравенство Йенсена. *Для любой случайной величины X и любой выпуклой [вогнутой] функции $g(x)$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}g(X) \leq g(\mathbf{M}X) \text{ [соответственно, } \mathbf{M}g(X) \geq g(\mathbf{M}X)\text{]}. \tag{4.3}$$

Неравенство Коши – Буняковского – Шварца. *Для любых случайных величин X, Y справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}|XY| \leq \sqrt{\mathbf{M}X^2}\sqrt{\mathbf{M}Y^2}. \tag{4.4}$$

Неравенство Гёльдера. *Для любых случайных величин X, Y при $\alpha \in (0;\ 1)$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}|XY| \leq \left(\mathbf{M}|X|^{1/\alpha}\right)^{\alpha}\left(\mathbf{M}|Y|^{1/(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha}. \tag{4.5}$$

[1] Впрочем, эти неравенства используются не только в теории вероятностей и математической статистике, но и повсеместно в математике. Читатели наверняка знакомы с большинством из приводимых неравенств из курса математического анализа.