67. Пусть A, B, C — произвольные события. Расположить следующие события в порядке возрастания их вероятностей: $A\cup C, \varnothing, A\setminus B, A\setminus(B\setminus C), \Omega, A\cup B\cup C, A\setminus B\setminus C$.

68. Пусть $A\subseteq B\cup C$ и $B\cap C=\varnothing$. Проверить справедливость утверждений: а) $\mathbf{P}\{A\cup B\}=\mathbf{P}\{B\}$; б) $\mathbf{P}\{A\cup B\cup C\}=\mathbf{P}\{B\}+\mathbf{P}\{C\}$; в) $\mathbf{P}\{\overline{A}\}\geq\mathbf{P}\{\overline{B}\}$; г) $\mathbf{P}\{\overline{A}\}\geq\mathbf{P}\{\overline{B}\}+\mathbf{P}\{\overline{C}\}$.

69. В условиях задачи 41 найти вероятности следующих событий: а) угадать не менее трёх чисел; б) угадать хотя бы одно число.

70. Известно, что пять из сорока пассажиров самолёта замешаны в похищении крупной денежной суммы. В аэропорту к трапу самолёта подошёл инспектор уголовного розыска и заявил, что для обнаружения хотя бы одного преступника ему достаточно произвести обыск у шести наугад выбранных пассажиров. Что руководило инспектором: трезвый расчёт или риск?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что среди шести случайно выбранных пассажиров есть хотя бы один преступник, событие $\overline{A}$ — в том, что среди шести случайно выбранных пассажиров нет ни одного преступника. Тогда, используя формулу гипергеометрической вероятности (1.31), в которой $n=40, m=5, l=6$, получим: $\mathbf{P}_{40;5}(6;k)=\dfrac{C_5^k C_{35}^{6-k}}{C_{40}^6}, k=0,1,2,3,4,5$, поэтому

$$\mathbf{P}\{\overline{A}\}=\mathbf{P}_{40;5}(6;0)=\frac{C_5^0C_{35}^6}{C_{40}^6}=\frac{\dfrac{5!}{0!\cdot5!}\cdot\dfrac{35!}{6!\cdot29!}}{\dfrac{40!}{6!\cdot34!}}=\frac{\cancel{5!}\cdot35!\cdot\cancel{6!}\cdot34!}{\cancel{0!}\cdot\cancel{5!}\cdot\cancel{6!}\cdot29!\cdot40!}=\frac{35!\cdot34!}{29!\cdot40!}=\frac{34\cdot33\cdot32\cdot31\cdot30}{40\cdot39\cdot38\cdot37\cdot36}\approx0{,}4229,$$ откуда $\mathbf{P}\{A\}=$

$=1-\mathbf{P}\{\overline{A}\}\approx1-0{,}4229=0{,}5771>0{,}5$. Видимо, это и побудило инспектора назвать число «*шесть*», хотя, на взгляд авторов, инспектор, скорее, рискует «*пятьдесят на пятьдесят*». ❑

71. Доказать, что если класс Σ подмножеств множества элементарных событий Ω, замкнутый относительно операции дополнения, замкнут относительно операции объединения, то он замкнут и относительно операции пересечения.

Решение. По условию, если $A,B\in\Sigma$, то $\overline{A},\overline{B}\in\Sigma$ (так как Σ замкнут относительно операции дополнения). Так как $\overline{A},\overline{B}\in\Sigma$, $\overline{A}\cup\overline{B}\in\Sigma$ (так как Σ замкнут относительно операции объединения). Так как $\overline{A}\cup\overline{B}\in\Sigma$, $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\in\Sigma$ (так как Σ замкнут относительно операции дополнения). Но согласно правилу де Моргáна $A\cap B=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$, поэтому $A\cap B=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\in\Sigma$, т. е. класс Σ замкнут относительно операции пересечения. ❑

72. Записать обобщённую теорему сложения вероятностей для случая четырёх событий.

73. Проверить выполнение аксиом вероятности (1.36) – (1.38) для классической вероятностной схемы.

74. Проверить выполнение аксиом вероятности (1.36) – (1.38) для геометрической вероятностной схемы.

75. Вывести из аксиом вероятности (1.36) – (1.38) свойства (1.40) – (1.47).

Глава 2. Условные вероятности. Последовательности испытаний

§2.1. Условные вероятности

Как уже было отмечено, говорить о вероятности наступления какого-либо события как о мере возможности наступления этого события можно лишь при выполнении определённого комплекса условий опыта. Так, если к комплексу условий, при которых изучалась вероятность наступления события A, добавить условие наступления события B, получим другое значение вероятности $\mathbf{P}\{A \mid B\}$ — *вероятность наступления события A при условии, что событие B произошло*[1] (или *условная вероятность события A при условии B*), которая равна по определению

$$\mathbf{P}\{A \mid B\} = \frac{\mathbf{P}\{A \cap B\}}{\mathbf{P}\{B\}}. \tag{2.1}$$

Иногда вместо обозначения $\mathbf{P}\{A \mid B\}$ используют обозначение $\mathbf{P}_B\{A\} = \mathbf{P}\{A \mid B\}$.

Вероятность $\mathbf{P}\{A\}$, в отличие от условной вероятности $\mathbf{P}\{A \mid B\}$, называется *безусловной*.

Из определения условной вероятности (2.1) следует *формула умножения вероятностей*

$$\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{B\}\mathbf{P}\{A \mid B\} = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B \mid A\}, \tag{2.2}$$

остающаяся справедливой и в случае, когда $\mathbf{P}\{A\} = 0$ или $\mathbf{P}\{B\} = 0$.

Говорят, что *события A и B* являются *независимыми*, если

$$\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}. \tag{2.3}$$

Формулу (2.3) для независимых событий A и B называют *теоремой умножения вероятностей*.

Очевидно, при $\mathbf{P}\{B\} > 0$ теорема умножения вероятностей (2.3) означает, что условная вероятность события A при условии B совпадает с безусловной вероятностью события A:

$$\mathbf{P}\{A \mid B\} = \mathbf{P}\{A\}. \tag{2.4}$$

Формулу умножения вероятностей легко обобщить на случай произвольного конечного числа событий:

$$\mathbf{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\} = \mathbf{P}\{A_1\}\mathbf{P}\{A_2|A_1\}\mathbf{P}\{A_3|A_1 \cap A_2\}\cdots\mathbf{P}\{A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}\}. \tag{2.5}$$

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если для любого их подмножества $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ вероятность одновременного наступления событий $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ равна произведению безусловных вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P}\{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\} = \mathbf{P}\{A_{i_1}\}\mathbf{P}\{A_{i_2}\}\cdots\mathbf{P}\{A_{i_k}\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.6}$$

Если условие (2.6) выполняется только при $k = 2$, то *события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются попарно независимыми*[2].

Следует обратить внимание на следующие факты:

- *из условия несовместности не следует условие независимости;*
- *из условия независимости не следует условие несовместности;*
- *из условия независимости в совокупности следует попарная независимость, но из попарной независимости не следует независимость в совокупности.*

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то из обобщённой теоремы сложения вероятностей следует, что

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} = \mathbf{P}\{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\} = \tag{2.7}$$

$$= 1 - (1 - \mathbf{P}\{A_1\})(1 - \mathbf{P}\{A_2\})\cdots(1 - \mathbf{P}\{A_n\}) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbf{P}\{A_i\}).$$

Если события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу, то для вычисления вероятности произвольного события A можно использовать *формулу полной вероятности*:

---

[1] Для корректности определения необходимо, чтобы событие B имело ненулевую вероятность: $\mathbf{P}\{B\} > 0$.

[2] Естественно, предполагается справедливость этого условия и при $k = 1$, т. е. выполнение тривиального равенства $\mathbf{P}\{A_i\} = \mathbf{P}\{A_i\}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{A \mid H_1\}\mathbf{P}\{H_1\} + \mathbf{P}\{A \mid H_2\}\mathbf{P}\{H_2\} + \cdots + \mathbf{P}\{A \mid H_n\}\mathbf{P}\{H_n\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A \mid H_i\}\mathbf{P}\{H_i\}, \qquad (2.8)$$

в соответствии с которой вероятность наступления события A может быть представлена как сумма произведений условных вероятностей события A при условии наступления событий H_i на безусловные вероятности этих событий H_i. Поскольку среди событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу, в результате опыта должно наступить одно и только одно, эти события H_i называют *гипотезами* ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Формула полной вероятности (2.8) остаётся справедливой и в случае, если условие, состоящее в том, что события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу, заменить более слабым: гипотезы $H_1, H_2, \ldots, H_n$ попарно несовместны ($H_i \cap H_j = \varnothing$ при $i \neq j$), а их объединение содержит событие A ($A \subset H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n$).

Из формулы полной вероятности следует *формула Байеса*:

$$\mathbf{P}\{H_k \mid A\} = \frac{\mathbf{P}\{A \mid H_k\}\mathbf{P}\{H_k\}}{\mathbf{P}\{A\}} = \frac{\mathbf{P}\{A \mid H_k\}\mathbf{P}\{H_k\}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A \mid H_i\}\mathbf{P}\{H_i\}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2.9)$$

Вероятности $\mathbf{P}\{H_i\}$ гипотез H_i называют *априорными вероятностями* (вероятностями гипотез H_i до проведения опыта) в отличие от *апостериорных вероятностей* $\mathbf{P}\{H_i \mid A\}$ (вероятностей гипотез H_i, уточнённых в результате опыта, исходом которого стало событие A).

76. На автомобиле «*Мерседес*-600», принадлежащем президенту банка и представляющем огромнейший интерес для угонщиков, установлены электронная сигнализация и механическая блокировка рычага переключения передач. Вероятность того, что угонщик справится с сигнализацией, составляет 0,2, а вероятность того, что он сломает блокиратор, равна 0,1. Сегодня президент, рискнув, отправился в гости без водителя и охраны. Найти вероятности следующих событий: а) автомобиль будет угнан; б) угонщик справится только с одной системой защиты.

77. Известно, что $\mathbf{P}\{A\} = 0,8$, $\mathbf{P}\{B\} = 0,6$, $\mathbf{P}\{A \cup B\} = 0,9$. Найти $\mathbf{P}\{A \cap B\}$, $\mathbf{P}\{A \mid B\}$, $\mathbf{P}\{B \mid A\}$ и выяснить, зависимы ли события A и B.

Решение. По теореме сложения вероятностей $\mathbf{P}\{A \cup B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{A \cap B\}$, откуда $\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{A \cup B\} = 0,8 + 0,6 - 0,9 = 0,5$. По определению условной вероятности $\mathbf{P}\{A \mid B\} = \dfrac{\mathbf{P}\{A \cap B\}}{\mathbf{P}\{B\}} = \dfrac{0,5}{0,6} = \dfrac{5}{6}$, $\mathbf{P}\{B \mid A\} = \dfrac{\mathbf{P}\{A \cap B\}}{\mathbf{P}\{A\}} = \dfrac{0,5}{0,8} = \dfrac{5}{8}$. Для того, чтобы события A и B были независимыми, необходимо выполнение теоремы умножения вероятностей: $\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}$. В нашем случае $\mathbf{P}\{A \cap B\} = 0,5$, $\mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\} = 0,8 \times 0,6 = 0,48 \neq 0,5$, т. е. теорема умножения вероятностей не выполняется, значит, события A и B являются зависимыми. ❑

78. Из корзины, содержащей три красных яблока и семь зелёных, вынимают сразу два яблока. Найти вероятность того, что оба они будут красными.

79. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность того, что оба раза появится одно и то же число очков.

80. В группе из 1 000 человек 452 имеют текущие счета, 336 — депозитные счета, а 302 — и текущие, и депозитные. Определить, являются ли события «*обладание текущим счётом*» и «*обладание депозитным счётом*» независимыми?

81. Талантливый сантехник Миша обязательно раз в неделю напивается «*до чёртиков*» (только раз, но обязательно). Найти вероятности следующих событий: а) Миша напьётся во вторник, если он был трезв в понедельник; б) Миша будет трезв в среду и в четверг, если он не пил в понедельник и во вторник; в) Миша будет пьян в один день с электриком Колей, который ведёт себя так же, но независимо от Миши.

82. Жюри состоит из трёх судей, выносящих решение независимо друг от друга: двое из них, каждый с вероятностью 0,8, принимают правильное решение, а третий для вынесения решения подбрасывает монету. Окончательное решение принимается большинством голосов. Найти вероятность вынесения правильного решения.

83. Нефтедобывающая компания проводит буровые работы в трёх различных местах A, B и C. Вероятности успешного бурения в A, B и C равны соответственно 0,5, 0,4 и 0,1. Предположив, что события, заключающиеся в успешности бурения в местах A, B и C, независимы, вычислить вероятности следующих событий: а) хотя бы одно бурение окажется успешным; б) ровно одно бурение окажется успешным.

84. Из корзины, содержащей три красных яблока и семь зелёных, вынимают по очереди все яблоки. Найти вероятность того, что вторым по счёту будет вынуто красное яблоко.

85. Из корзины, содержащей три красных яблока и семь зелёных, вынимают одно за другим все яблоки, кроме одного. Найти вероятность того, что последнее оставшееся в корзине яблоко будет зелёным.

86. Петя знает не все вопросы программы. В каком случае вероятность вытащить неизвестный билет будет меньше: когда он тянет билет первым или последним?

87. Студенты считают, что из 50 экзаменационных билетов 10 являются «*хорошими*». Петя и Маша по очереди тянут по одному билету. Найти вероятности следующих событий: а) Пете достался «*хороший*» билет; б) Маше достался «*хороший*» билет; в) им обоим достались «*хорошие*» билеты.

88. Маша пришла на экзамен, зная ответы на 20 вопросов программы из 25. Профессор задаёт три вопроса. Найти вероятности следующих событий: а) Маша ответит на все три вопроса; б) Маша ответит на два вопроса; в) Маша ответит на один вопрос; г) Маша ответит хотя бы на один вопрос; д) Маша не ответит ни на один вопрос.

89. Вероятность того, что кредитная карта находится в письменном столе, равна p, причём с равной вероятностью карта может находиться в любом из восьми ящиков стола. Её владелец осмотрел семь ящиков и пока не нашёл свою кредитную карту. Найти вероятность того, что она находится в восьмом ящике.

90. Доказать формулу (2.5).

91. Доказать, что из независимости событий A и B следует независимость событий: а) $\overline{A}$ и B; б) A и $\overline{B}$; в) $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

92. Привести пример событий, являющихся независимыми и при этом совместными.

93. Привести пример событий, являющихся несовместными, но не являющихся при этом независимыми.

94. Доказать формулу $\mathbf{P}\{A \mid B\} + \mathbf{P}\{\overline{A} \mid B\} = 1$.

95. Доказать, что равенства $\mathbf{P}\{A|B\} + \mathbf{P}\{A|\overline{B}\} = 1$ и $\mathbf{P}\{A|B\} + \mathbf{P}\{\overline{A}|\overline{B}\} = 1$ неверны.

96. Пусть события A, B и C попарно независимы, причём каждое из них имеет вероятность, отличную от нуля и единицы. Проверить, могут ли события $A \cap B$, $B \cap C$ и $A \cap C$ быть: а) попарно независимыми; б) независимыми в совокупности.

Решение. а) Рассмотрим следующие события в условиях задачи 47: событие A, заключающееся в том, что утечка газа происходит ближе к станции А, чем к В, событие B, заключающееся в том, что утечка расположена между 50-м и 150-м километрами, и событие C, состоящее в том, что утечка расположена между отметками 12,5 км и 62,5 км либо между 112,5 км и 162,5 км. Тогда, согласно геометрическому определению вероятности, $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{B\} = \mathbf{P}\{C\} = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{B \cap C\} = = \mathbf{P}\{A \cap C\} = \frac{1}{4}$, значит, события A, B и C попарно независимы. При этом, очевидно, $\mathbf{P}\{A \cap B \cap C\} = = \frac{1}{16}$, $\mathbf{P}\{(A \cap B) \cap (B \cap C)\} = \mathbf{P}\{A \cap B \cap C\} = \frac{1}{16} = \mathbf{P}\{A\}[\mathbf{P}\{B\}]^2\mathbf{P}\{C\} = \mathbf{P}\{A \cap B\}\mathbf{P}\{B \cap C\}$. Аналогично получаем равенства $\mathbf{P}\{(A \cap B) \cap (A \cap C)\} = \mathbf{P}\{A \cap B\}\mathbf{P}\{A \cap C\}$ и $\mathbf{P}\{(B \cap C) \cap (A \cap C)\} = \mathbf{P}\{B \cap C\}\mathbf{P}\{A \cap C\}$, т. е. события A, B и C являются независимыми в совокупности. **б)** Независимость в совокупности означает, во-первых, что $\mathbf{P}\{A \cap B \cap C\} = \mathbf{P}\{(A \cap B) \cap (B \cap C)\} = \mathbf{P}\{A\}[\mathbf{P}\{B\}]^2\mathbf{P}\{C\}$ и, во-вторых, что $\mathbf{P}\{A \cap B \cap C\} = \mathbf{P}\{(A \cap B) \cap (B \cap C) \cap (A \cap C)\} = [\mathbf{P}\{A\}]^2[\mathbf{P}\{B\}]^2[\mathbf{P}\{C\}]^2$. Поэтому $\mathbf{P}\{A\}[\mathbf{P}\{B\}]^2\mathbf{P}\{C\} = =[\mathbf{P}\{A\}]^2[\mathbf{P}\{B\}]^2[\mathbf{P}\{C\}]^2$, но это равенство невозможно, так как вероятности событий A, B и C отличны от нуля и единицы. Поэтому события $A \cap B$, $B \cap C$ и $A \cap C$ не могут быть независимыми в совокупности. ❑

97. Пусть события A, B и C независимы в совокупности, причём каждое из них имеет вероятность, отличную от нуля и единицы. Проверить, могут ли события $A \cap B$, $B \cap C$ и $A \cap C$ быть: а) попарно независимыми; б) независимыми в совокупности.

98. Подбрасываются три игральные кости. Событие A состоит в том, что на первой и второй костях выпало одинаковое число очков, событие B — в том, что на второй и третьей костях выпало одинаковое число очков, событие C — в том, что на первой и третьей костях выпало одинаковое число очков. Проверить, являются ли события A, B и C: а) попарно независимыми; б) независимыми в совокупности.

99. Привести пример попарно независимых событий, не являющихся при этом независимыми в совокупности.

100. Доказать, что из равенства $\mathbf{P}\{A \cap B \cap C\} = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}\mathbf{P}\{C\}$ не следует попарная независимость событий A, B и C.

101. Доказать формулу (2.7).

102. Пусть A, B — произвольные события. Проверить, образуют ли события A, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cup B}$ полную группу.

103. Доказать формулу полной вероятности (2.8).

104. Доказать формулу Байеса (2.9).

105. Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% — государственные органы, 20% — другие банки, остальные — физические лица. Вероятности того, что взятый кредит не будет возвращён, составляют 0,01, 0,05 и 0,2 соответственно. Определить, какая доля кредитов в среднем не возвращается.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что взятый кредит не возвращается, гипотеза H_1 — в том, что запрос на этот кредит поступил от государственного органа, гипотеза H_2 — в том, что запрос на кредит поступил от другого банка, гипотеза H_3 — в том, что запрос на кредит поступил от физического лица. По условию вероятности гипотез составляют $\mathbf{P}\{H_1\} = 0,1$, $\mathbf{P}\{H_2\} = 0,2$, $\mathbf{P}\{H_3\} = 1 - \mathbf{P}\{H_1\} - \mathbf{P}\{H_2\} = 0,7$. Апостериорные вероятности, в свою очередь, по условию равны $\mathbf{P}\{A|H_1\} = 0,01$, $\mathbf{P}\{A|H_2\} = 0,05$, $\mathbf{P}\{A|H_3\} = 0,2$. По формуле полной вероятности $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{A|H_1\}\mathbf{P}\{H_1\} + \mathbf{P}\{A|H_2\}\mathbf{P}\{H_2\} + \mathbf{P}\{A|H_3\}\mathbf{P}\{H_3\} = 0,01 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,151$. ❑

106. Вероятность того, что недельный оборот торговца мороженым превысит 2 000 руб., при солнечной погоде равна 80%, при переменной облачности — 50%, а при дождливой погоде — 10%. Найти вероятность того, что на следующей неделе оборот превысит 2 000 руб., если вероятность солнечной погоды в данное время года составляет 20%, вероятность переменной облачности и вероятность дождливой погоды — по 40%.

107. В условиях задачи 105 начальнику кредитного отдела доложили, что получено факсимильное сообщение о неисполнении обязательств по возврату кредита, в котором очень плохо пропечаталось имя клиента. Найти вероятность того, что кредит не возвращает какой-либо банк.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что взятый кредит не возвращается, гипотеза H_1 — в том, что запрос на этот кредит поступил от государственного органа, гипотеза H_2 — в том, что запрос на кредит поступил от другого банка, гипотеза H_3 — в том, что запрос на кредит поступил от физического лица. По условию вероятности гипотез составляют $\mathbf{P}\{H_1\} = 0,1$, $\mathbf{P}\{H_2\} = 0,2$, $\mathbf{P}\{H_3\} = 1 - \mathbf{P}\{H_1\} - \mathbf{P}\{H_2\} = 0,7$. Апостериорные вероятности, в свою очередь, равны по условию $\mathbf{P}\{A \mid H_1\} = 0,01$, $\mathbf{P}\{A \mid H_2\} = 0,05$, $\mathbf{P}\{A \mid H_3\} = 0,2$. По формуле Байеса $\mathbf{P}\{H_2 \mid A\} = \frac{\mathbf{P}\{A|H_2\}\mathbf{P}\{H_2\}}{\mathbf{P}\{A\}} = \frac{10}{151} \approx 0,066$, где вероятность $\mathbf{P}\{A\} = 0,151$ была рассчитана по формуле полной вероятности в задаче 105. ❑

108. В корзине три красных и семь зелёных яблок. Из корзины вынули одно яблоко и не глядя отложили в сторону. После этого из корзины достали ещё одно яблоко, которое оказалось зелёным. Найти вероятность того, что первое яблоко, отложенное в сторону, также было зелёным.

109. Для принятия решений о покупке ценных бумаг была разработана система анализа рынка. Из данных за прошлые периоды известно, что 5% всех ценных бумаг являются «*плохими*» — не подходящими для инвестирования. Предложенная система определяет 98% «*плохих*» ценных бумаг как потенциально «*плохие*», но при этом 15% ценных бумаг, пригодных для инвестиций, также определяет как потенциально «*плохие*». Найти вероятность того, что ценная бумага подходит для инвестирования, при условии, что данной системой анализа рынка она была определена как потенциально «*плохая*». На основе полученного результата прокомментировать пригодность системы для принятия инвестиционных решений.

110. Чтобы поддержать позиции фирмы при заключении правительственного контракта, необходимы значительные инвестиции в определение стоимости первоначальных исследований и разработок. Если фирма А сделает эти инвестиции, а её основной конкурент этого не сделает, то вероятность заключения договора с фирмой А составит 0,8. Однако если конкурент также проведёт предварительные исследования и разработки, то вероятность заключения договора с фирмой А уменьшается до 0,4. Аналитическая служба фирмы А оценивает вероятность проведения конкурентом изысканий по предстоящему проекту в 0,3. Вычислить вероятности следующих событий: а) правительство устроит цена, предложенная фирмой А (т. е. контракт будет заключен), при отсутствии информации о решении конкурента; б) правительство не устроит цена, предложенная фирмой А (т. е. контракт не будет заключен), при условии, что конкурент предложит свою цену; в) конкурент представит свою цену при условии, что цена, предложенная фирмой А, принимается правительством; г) конкурент представит свою цену при условии, что цена, предложенная фирмой А, не принимается правительством.

111. Если предприниматель планирует существенное изменение в образце товара, то с вероятностью 0,7 он начнёт вносить изменения в технологию производства до 1 сентября, если же он не планирует существенной переделки, то вероятность изменения технологии составит 0,2. На основании предыдущего опыта вероятность существенной переделки образца составляет 0,2. Вычислить вероятности следующих событий: а) в технологию будут внесены изменения до 1 сентября; б) образец товара претерпит существенные изменения, если изменения в технологию начинают вноситься до 1 сентября; в) образец товара претерпит существенные изменения, если 1 сентября уже прошло, а изменений в технологии не произошло.

112. Магазин получает товар от трёх поставщиков: 55% товара поступает от первого поставщика, 20% от второго и 25% от третьего. Продукция, поступающая от первого поставщика, содержит 5% брака, поступающая от второго поставщика — 6% брака, а поступающая от третьего поставщика — 8% брака. Покупатель оставил в книге пожеланий покупателя жалобу о низком качестве приобретённого товара. Найти вероятность того, что плохой товар, вызвавший нарекания покупателя, поступил от второго поставщика.

113. При расследовании преступления, совершённого на автозаправочной станции (АЗС), было установлено, что поток автомобилей, проезжающих мимо АЗС, состоит на 60% из грузовых и на 40% из легковых автомобилей. По показаниям свидетелей, во время совершения преступления на АЗС находился автомобиль. Известно, что вероятность заправки грузового автомобиля равна 0,1, легкового автомобиля — 0,3. Найти вероятность того, что во время совершения преступления на АЗС находился: а) грузовой автомобиль; б) легковой автомобиль.

114. В каждой из трёх корзин находится по семь красных яблок и три зелёных. Из первой корзины наудачу достали одно яблоко и переложили во вторую, затем из второй корзины наудачу достали яблоко и переложили в третью. Найти вероятность того, что яблоко, наудачу извлечённое после этих манипуляций из третьей корзины, окажется красным.

115. Задача о разорении[1]**.** Петя с папой играют в следующую игру. Петя бросает монету, предварительно сообщив папе, какая сторона, по его мнению, выпадет: «*герб*» или «*решётка*». Если Петя угадал, то папа платит Пете 1 руб., в противном случае Петя платит папе 1 руб. Начальный капитал Пети составляет $x = 100$

---

[1] Практическая интерпретация задач 115 – 118 состоит в следующем. Инвестиционная компания «*играет*» с рынком. Возможности рынка безграничны (чего нельзя сказать о возможностях компании). Компания пытается угадать, какие финансовые инструменты окажутся в будущем доходными, если угадывает — получает прибыль, иначе — несёт расходы. Если расходов становится много, то рано или поздно компания разоряется. Можно рассмотреть и случай, когда у противника финансовые возможности также ограничены, решение будет не сложнее. Предоставляем читателю самостоятельно поставить и решить соответствующие задачи.

руб. Игра продолжается до тех пор, пока Петя не наберёт заранее определённую сумму s, либо пока он не разорится, проиграв весь имеющийся капитал x. Найти вероятность того, что Петя разорится, так и не набрав желаемую сумму, если эта сумма s составляет: а) 110 руб; б) 1 000 руб.

Решение. Пусть $p(x)$ — вероятность того, что, имея x руб., Петя всё-таки разорится, событие A состоит в Петином разорении, гипотеза H_1 — в том, что Петя выиграл на первом шаге игры, гипотеза H_2 — в том, что Петя проиграл на первом шаге игры. При этом, очевидно, вероятность разорения при условии выигрыша на первом шаге составит $\mathbf{P}\{A\,|\,H_1\} = p(x+1)$, а вероятность разорения при условии проигрыша на первом шаге составит $\mathbf{P}\{A\,|\,H_2\} = p(x-1)$. Согласно классическому определению вероятности $\mathbf{P}\{H_1\} = \mathbf{P}\{H_2\} = \frac{1}{2}$. По формуле полной вероятности $p(x) = \mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{A|H_1\}\mathbf{P}\{H_1\} + \mathbf{P}\{A|H_2\}\mathbf{P}\{H_2\} = p(x+1)\cdot\frac{1}{2} + p(x-1)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}[p(x+1) + p(x-1)]$. При этом, очевидно, $p(0) = 1$, а $p(s) = 0$. Решением уравнения $p(x) = \frac{1}{2}\cdot[p(x+1) + p(x-1)]$ является линейная функция $p(x) = C_1 x + C_2$, коэффициенты которой C_1 и C_2 найдём из условий $p(0) = C_2 = 1$ и $p(s) = C_1 s + C_2 = 0$: $C_1 = -\frac{1}{s}$, $C_2 = 1$. Таким образом, $p(x) = 1 - \frac{x}{s}$. В случае **а)** $x = 100$, $s = 110$, поэтому $p(100) = \frac{1}{11} \approx 0{,}091$, а в случае **б)** $x = 100, s = 1\ 000$, поэтому $p(100) = 0{,}9$. ❑

116. В условиях предыдущей задачи папа играет нечестно: он дал Пете монету со смещённым центром тяжести, так что Петя (считая монету «*правильной*» и выбирая в среднем в половине случаев «*герб*» и в половине случаев — «*решётку*») выигрывает с вероятностью $\frac{2}{5}$ и проигрывает с вероятностью $\frac{3}{5}$. Начальный капитал Пети составляет, как и в предыдущей задаче, $x = 100$ руб. Игра продолжается до тех пор, пока Петя не наберёт заранее определённую сумму s, либо пока он не разорится, проиграв весь имеющийся капитал x. Найти вероятность разорения Пети в общем случае (для произвольной суммы s) и в конкретных случаях $s = 110$ руб. и $s = 1\ 000$ руб.

117. Что произойдёт с вероятностью разорения Пети в условиях двух предыдущих задач, если ставка на каждом ходе будет равна не 1 руб., как раньше, а 2 руб.?

118. Найти среднюю продолжительность $m(x)$ игры , описанной в задаче 115.

119. **Задача о разборчивой невесте**[1]. У одной из Машиных подруг есть достаточно большое число женихов. Заранее она ничего о своих женихах не знает, кроме их числа n. Расположившись в очередь в случайном порядке, женихи представляются разборчивой невесте один за другим, так что встречая очередного жениха, она знает всех предшествующих. Представленный и отвергнутый жених больше не возвращается. Невеста решила избрать следующую стратегию выбора:

---

[1] Приведём и финансовую формулировку данной задачи. Пусть инвестор владеет некоторым активом, причём в течение определённого срока цена актива может изменяться, а по окончании срока — станет фиксированной (таким активом может быть облигация, рыночная котировка которой может изменяться до момента погашения, или какой-либо инвестиционный проект, пока он ещё не завершён). Стоимости актива в предыдущие дни известны, а в последующие — неизвестны. К предыдущему дню вернуться уже нельзя. Требуется определить момент продажи актива с наибольшей выгодой.

она просматривает первых m женихов, никого из них не выбирая, а затем останавливает свой выбор на первом из оставшихся $(n - m)$ женихов, который окажется лучше, чем любой из первых m женихов. Найти вероятность $\mathbf{P}_m(A)$ сделать наилучший выбор при такой стратегии. Определить такое число m_n, чтобы вероятность $\mathbf{P}_{m_n}(A)$ была максимальной среди всех $\mathbf{P}_m(A)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

120. Шейх разгневался на звездочёта и приказал казнить его, но в последний момент передумал и решил дать звездочёту возможность спастись. Он взял два чёрных и два белых шара, отличающихся только цветом, и предложил звездочёту распределить их произвольным образом по двум одинаковым сундукам. Палач должен с завязанными глазами выбрать сундук и достать из него один шар. Если он достанет белый шар, шейх помилует звездочёта, в противном случае — казнит. Как звездочёт должен распределить шары по сундукам, чтобы иметь наибольшие шансы спастись?

§2.2. Последовательности испытаний

Пусть проводится конечное число n последовательных испытаний, в каждом из которых некоторое событие A может либо наступить (такую ситуацию назовём *успехом*) либо не наступить (такую ситуацию назовём *неудачей*), причём эти испытания удовлетворяют следующим условиям:

- *каждое испытание случайно относительно события* A, т. е. до проведения испытания нельзя сказать, появится A или нет;
- *испытания проводятся в одинаковых, с вероятностной точки зрения, условиях*, т. е. вероятность успеха в каждом отдельно взятом испытании равна p и не меняется от испытания к испытанию;
- *испытания независимы*, т. е. события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где A_i состоит в успехе на i-м испытании ($i = 1, 2, \ldots, n$), независимы в совокупности.

Такая последовательность испытаний называются *схемой Бернулли* или *биномиальной схемой*, а сами испытания — *испытаниями Бернулли*.

Вероятность $\mathbf{P}_n(k)$ того, что в серии из n испытаний Бернулли окажется ровно k успешных, рассчитывается по *формуле Бернулли*:

$$\mathbf{P}_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{2.10}$$

Наивероятнейшее число k^* успехов в серии из n испытаний Бернулли удовлетворяет неравенствам

$$np - (1 - p) \leq k^* \leq np + p. \tag{2.11}$$

В случае, когда число n испытаний Бернулли велико, расчёты по формуле Бернулли становятся затруднительными. Если при этом вероятность p успеха в каждом испытании мала, так что можно считать, что $n \to \infty, np \to \lambda = \text{const}$, для расчёта $\mathbf{P}_n(k)$ можно пользоваться приближённой формулой Пуассона:

$$\mathbf{P}_n(k) \approx \mathbf{P}(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.12}$$

где $a = np$.

На практике формулой Пуассона пользуются в случае, когда число n испытаний Бернулли — несколько десятков или более, а произведение $a = np < 10$. В случае, когда n велико, а $a = np \geq 10$, формула Пуассона даёт очень грубое приближение, и для расчёта $\mathbf{P}_n(k)$ используют локальную и интегральную теоремы Муавра – Лапласа (см. §4.4).

От схемы последовательных независимых испытаний с двумя исходами (биномиальной схемы) можно перейти к *полиномиальной схеме*, т. е. схеме последовательных независимых испытаний, в каждом из которых возможно $m > 2$ исходов с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$ соответственно

$(0 < p_i < 1\ \ (i = 1,2,\ldots,m),\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1)$. В полиномиальной схеме вероятность $\mathbf{P}_n(k_1,k_2,\ldots,k_m)$ того, что в серии из n испытаний первый исход появится ровно k_1 раз, второй исход появится ровно k_2 раз и так до m -го исхода, который появится ровно k_m раз, рассчитывается по формуле

$$\mathbf{P}_n(k_1,k_2,\ldots,k_m) = \tilde{\mathbf{P}}_n(k_1,k_2,\ldots,k_m)p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m} \qquad (2.13)$$

$$(0 \le k_i \le n\ \ (i = 1,2,\ldots,m),\ \sum_{i=1}^{m} k_i = n).$$

121. Известно, что из числа зрителей определённой телепрограммы 70% смотрят и рекламные блоки. Группы, состоящие из трёх наугад выбранных телезрителей, опрашивают относительно содержания рекламного блока. Рассчитать вероятности числа лиц в группе, которые смотрят рекламные блоки.

Решение. Вероятность того, что наугад выбранный зритель данной телепрограммы смотрит и рекламные блоки, согласно статистическому определению вероятности, равна $p = 0{,}7$. Интерпретируя опрос трёх телезрителей как три испытания Бернулли и считая успехом ситуацию, когда телезритель смотрит рекламные блоки, найдём искомые вероятности по формуле Бернулли (2.10), в которой $n = 3,\ p = 0{,}7$: $\mathbf{P}_3(k) = C_3^k 0{,}7^k 0{,}3^{3-k}$ $(k = 0,1,2,3)$; $\mathbf{P}_3(0) = C_3^0 0{,}7^0 0{,}3^3 = 0{,}027$, $\mathbf{P}_3(1) = C_3^1 0{,}7^1 0{,}3^2 = 0{,}189$, $\mathbf{P}_3(2) = C_3^2 0{,}7^2 0{,}3^1 = 0{,}441$, $\mathbf{P}_3(3) = C_3^3 0{,}7^3 0{,}3^0 = 0{,}343$. ❑

122. В условиях предыдущей задачи найти наивероятнейшее число лиц в группе, которые смотрят рекламные блоки.

Решение. Наивероятнейшее число k^* лиц в группе, которые смотрят рекламные блоки, подчиняется неравенствам (2.11): $np - (1 - p) \le k^* < np + p$, в которых $n = 3,\ p = 0{,}7$, т. е. $3\cdot 0{,}7 - 0{,}3 \le k^* < 3\cdot 0{,}7 - 0{,}7$ или $1{,}8 \le k^* < 2{,}8$, откуда $k^* = 2$. Это подтверждается и решением предыдущей задачи. ❑

123. Стоимость проезда в автобусе равна 3 руб., месячный проездной билет на автобус стоит 120 руб., а штраф за безбилетный проезд составляет 10 руб. Петя 24 раза в месяц ездит на автобусе в институт и обратно. Он не покупает проездного билета, никогда не платит за проезд и считает, что вероятность быть пойманным и заплатить штраф равна 0,05. Сравнить стоимость проездного билета с наиболее вероятной величиной штрафа за 48 поездок.

124. В брокерской конторе для стимулирования прибыльности торговли применяется следующая система премирования сотрудников. Если сотрудник не достигал установленного дневного уровня прибыли на протяжении более трёх дней за две недели (10 рабочих дней), он теряет свою премию. Вероятность того, что сотрудник выполнит требуемую норму прибыли, составляет 0,85. Найти число премий, потерянных 100 сотрудниками этой брокерской конторы за год (50 рабочих недель).

125. Найти вероятность появления ровно 5 гербов при 10-кратном бросании монеты.

126. Среди 12 проверяемых ревизором договоров семь оформлены неправильно. Найти вероятность того, что среди пяти договоров, произвольно отобранных ревизором для проверки, окажутся неправильно оформленными: а) ровно три договора; б) не менее трёх договоров.

127. Что вероятнее: выиграть в бильярд у равносильного противника три партии из четырёх или пять партий из восьми?

128. Что вероятнее: выиграть в бильярд у равносильного противника не менее трёх партий из четырёх или не менее пяти партий из восьми?

129. В течение месяца данная акция может подорожать на 1% с вероятностью 0,7 и подешеветь на 1% с вероятностью 0,3. Предполагая ежемесячные изменения цены независимыми, рассчитать вероятности того, что за три месяца цена акции возрастет: а) в $(1,01)^3$ раза; б) в $0,99\cdot(1,01)^2$ раза.

130. Из 1 000 опрошенных 700 человек поддерживают некоторую правительственную программу. Найти минимальную численность группы, в которой с вероятностью, не меньшей 0,9, хотя бы один респондент не поддерживает эту программу.

Решение. Пусть численность группы равна n. Будем интерпретировать опрос группы из n человек как испытания Бернулли, считая успехом то, что случайно выбранный респондент поддерживает правительственную программу. Согласно статистическому определению вероятности, вероятность успеха равна $p = \dfrac{700}{1\,000} = 0,7$. Пусть событие A состоит в том, что в группе из n человек хотя бы один не поддерживает правительственную программу, тогда событие $\overline{A}$ означает, что в группе из n человек все n поддерживают эту программу. $\mathbf{P}\{A\} = 1 - \mathbf{P}\{\overline{A}\} = 1 - \mathbf{P}_n(n) =$ $=$ {по формуле Бернулли} $= 1 - C_n^n p^n (1-p)^0 = 1 - p^n = 1 - 0,7^n$. По условию вероятность $\mathbf{P}\{A\}$ должна быть не меньше 0,9, поэтому $1 - (0,7)^n \geq 0,9$ или $(0,7)^n \leq 0,1$. Чтобы найти минимальное значение n, при котором выполняется это неравенство, будем последовательно подставлять в него числа 1, 2, 3 и т. д., пока неравенство не удовлетворится: $(0,7)^1 = 0,7$; $(0,7)^2 = 0,49$; $(0,7)^3 = 0,343$; $(0,7)^4 = 0,240$; $(0,7)^5 = 0,168$; $(0,7)^6 = 0,118$; $(0,7)^7 = 0,082$. Видно, что неравенство $(0,7)^n \leq 0,1$ не выполняется при $n = 1, 2, \ldots, 6$, но выполняется при $n = 7$, поэтому минимальная численность группы, в которой с вероятностью, не меньшей 0,9, хотя бы один респондент не поддерживает эту программу, равна 7 чел. ❑

131. Среди билетов лотереи половина выигрышных. Найти минимальное число билетов, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, быть уверенным в выигрыше хотя бы по одному билету.

132. В городе работают 1 000 коммерческих банков, из которых 330 допускают нарушения налогового законодательства. Определить число банков, которые должна отобрать для проверки налоговая инспекция, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, среди них оказался хотя бы один нарушитель законодательства.

133. В условиях задачи 132 налоговая инспекция проводит проверку 12 банков, выбирая их случайным образом. Выбранные банки проверяются независимо друг от друга. Допущенные в проверяемом банке нарушения могут быть выявлены инспекцией с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в ходе этой проверки будет выявлен хотя бы один нарушитель налогового законодательства.

134. Банк имеет пять отделений. Ежедневно с вероятностью 0,3 каждое отделение, независимо от других, может заказать на следующий день крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заявками. Найти вероятности следующих событий: а) поступили ровно две заявки; б) поступила хотя бы одна заявка; в) среди поступивших двух заявок есть заявка от первого отделения.

135. Игральную кость бросают пять раз. Найти вероятность того, что дважды появится число, кратное трём.

136. **Задача о разделе ставки**[1]**.** Петя и Маша часто играют в бильярд друг с другом, причём Петя выигрывает в два раза чаще, чем Маша. Исходя из этого, они оценили свои вероятности победить как $\frac{2}{3}$ для Пети и $\frac{1}{3}$ для Маши и начали турнир на следующих условиях: каждый выигрыш приносит одно очко, Петя для победы должен набрать двенадцать очков, а Маша — шесть. После того, как Петя набрал восемь очков, а Маша — четыре, игру пришлось прекратить, и победу решили присудить тому, у кого вероятность окончательного выигрыша больше. Определить, кому присудили победу в этом турнире.

Решение. Очевидно, максимальное количество партий, которое осталось сыграть Пете и Маше, равно пяти (либо Петя выиграет три раза, а Маша — два раза, либо Маша выиграет один раз, а Петя — четыре раза). Поэтому событие, заключающееся в выигрыше Пети (а значит, проигрыше Маши), состоит в том, что Маша из пяти партий не выиграет ни одной или выиграет всего одну. Поэтому вероятность выигрыша Пети равна вероятности того, что в пяти испытаниях Бернулли, в каждом из которых успех интерпретируется как выигрыш Машей очередной партии (т. е. вероятность успеха в каждом испытании составляет $p=\frac{1}{3}$), наступит 0 или 1 успех:

$$\mathbf{P}\{\text{выигрыш Пети}\} = \mathbf{P}\{0 \text{ или } 1 \text{ выигрыш Маши из 5 партий}\} = \mathbf{P}_5(0)+\mathbf{P}_5(1) = C_5^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5 + C_5^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$$

$=\frac{112}{243}$. При этом $\mathbf{P}\{\text{выигрыш Маши}\} = \mathbf{P}\{\overline{\text{выигрыш Пети}}\} = 1 - \mathbf{P}\{\text{выигрыш Пети}\} = 1 - \frac{112}{243} = \frac{131}{243}$. Поэтому в данном случае победу должны были присудить Маше. ❑

137. Петя играл с Васей (равносильным противником) в шахматы на приз в 100 руб.: каждый выигрыш приносил одно очко, ничьи не считались. Игра шла до 8 очков. Когда Петя выиграл пять партий, а Вася — три, внезапно погас свет, и игру пришлось прекратить. Как им разделить приз — 100 руб.?

138. **Задача Банаха**. Известный математик Стефан Банах всегда носил с собой две коробки спичек, в каждой из которых первоначально было n спичек. Каждый раз, когда он хотел зажечь спичку, Банах доставал наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что когда он в первый раз вынимал пустую коробку, в другой коробке оказывалось ровно r спичек, где $r = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Решение. Спички брались всего $(2n - r)$ раз, причём n раз из коробки, оказавшейся пустой. Это соответствует n успехам в $(2n - r)$ независимых испытаниях, поэтому вероятность $\mathbf{P}\{A\} = \frac{C_{2n-r}^n}{2^{2n-r}}$. ❑

139. Вывести формулу Бернулли (2.10).

140. Доказать формулу (2.11) для наивероятнейшего числа успехов в испытаниях Бернулли.

141. Доказать формулу Пуассона (2.12).

142. На лекции по теории вероятностей присутствует 200 человек. Вероятность того, что день рождения случайно выбранного студента приходится на определённый день года, составляет $\frac{1}{365}$. Найти вероятность того, что один человек из присутствующих родился 1 января, и два человека родились 8 марта.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что случайно выбранный студент родился 1 января, событие N — в том, что k человек из 200 родились 1 января. Тогда по условию $p = \mathbf{P}\{A\} = \frac{1}{365}$.

---

[1] Такая задача возникает при определении доли инвестора, который хочет «*выйти*» из незавершенного проекта.

Предположим, что опрос $n = 200$ студентов относительно даты их рождения удовлетворяет условиям, которые накладываются на испытания Бернулли, где успехом единичного испытания считается наступление события A. Тогда, поскольку $n = 200$ велико, а произведение $np = \frac{200}{365} = 0,548 < 10$, для подсчёта вероятности события N можно воспользоваться формулой Пуассона: $\mathbf{P}_{200}(k) = \frac{(0,548)^k}{k!}e^{-0,548}$ и при $k = 1$ получаем $\mathbf{P}_{200}(1) = 0,548e^{-0,548} = 0,317$. Пусть событие M состоит в том, что m человек из 200 родились 8 марта. Тогда в соответствии с формулой умножения вероятностей, $\mathbf{P}\{N \cap M\} = \mathbf{P}\{N\}\mathbf{P}\{M|N\}$, где $\mathbf{P}\{M \mid N\} = \mathbf{P}_{n-k}(m)$ — вероятность того, что из $(n-k)$ студентов m родились 8 марта. Так как число $n - k = 200 - 1 = 199$ велико, а $(n-k)p = \frac{198}{365} = 0,542 < 10$, для расчёта вероятности события M можно вновь воспользоваться формулой Пуассона: $\mathbf{P}_{n-k}(m) = \frac{(0,542)^m}{m!}e^{-0,542}$. При $n = 200, k = 1, m = 2$ получаем: $\mathbf{P}\{M \mid N\} =$ $= \mathbf{P}_{199}(2) = \frac{(0,542)^2}{2}e^{-0,542} = 0,086$, поэтому искомая вероятность $\mathbf{P}\{N \cap M\} = 0,317 \cdot 0,086 = 0,027$. ❑

143. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что число родившихся 1 января и 8 марта не больше двух.

144. Владельцы кредитных карт ценят их и теряют весьма редко — вероятность потерять кредитную карту в течение недели для случайно выбранного вкладчика составляет 0,001. Банк выдал кредитные карты 2 000 клиентам. Найти: а) вероятность того, что за предстоящую неделю будет утеряна ровно одна кредитная карта; б) вероятность того, что за предстоящую неделю будет утеряна хотя бы одна кредитная карта; в) наиболее вероятное число кредитных карт, теряемых за месяц.

145. Один процент стодолларовых купюр составляют фальшивые, сделанные, однако, довольно искусно, так что операционист обменного пункта десятую их часть принимает за настоящие. Каждый день для обмена приносят примерно 200 стодолларовых купюр (всего — настоящих и фальшивых). Определить: а) вероятность того, что среди них есть хотя бы одна фальшивая; б) наиболее вероятное время, за которое оправдает себя детектор валюты, который стоит 100 долл. и определяет все фальшивые купюры как фальшивые.

146. На праздники Петя и Маша отправились в поход на байдарках. Известно, что при прохождении одного порога байдарка не получает повреждений с вероятностью 0,7, полностью ломается с вероятностью 0,1 или получает серьёзное повреждение с вероятностью 0,2. Два серьёзных повреждения приводят к полной поломке. Найти вероятность того, что при прохождении 10 порогов байдарка не будет полностью сломана.

Глава 3. Случайные величины и их числовые характеристики

§3.1. Определение случайной величины и её функции распределения

Случайной величиной называется числовая функция $X(\omega)$, заданная на пространстве элементарных событий Ω и измеримая[1] относительно σ-поля событий $\mathcal{S}$. Далее случайные величины

[1] Здесь под *измеримостью* относительно σ-поля $\mathcal{S}$ понимается следующее: для любого $x \in \mathbb{R}: \{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{S}$.