Анализ спроса на агрегированный продукт

© М.Ю.Афанасьев, 1999

Количественный анализ функций спроса представляет особый практический интерес, так как позволяет изучать специфику фирм и рынков. В результате проведенных исследований теоретически и экспериментально обосновано, что переход от монопродукта к агрегату позволяет избежать ряда проблем на этапе сбора информации, необходимой для построения функции спроса. При этом эконометрическая модель функции спроса на агрегированный продукт может быть использована для оценки прибыли фирмы и, как следствие, получения практически значимых рекомендаций в области ценообразования. На примере продуктов питания подтверждены гипотезы о возможности получения статистически значимых эконометрических моделей; о наличии сезонной составляющей спроса; о возможности принятия решений, позволяющих увеличить прибыль фирмы.

Введение

Одна из очевидных тенденций в Российской экономике 1995-1998 гг. – обострение конкуренции на рынках продуктов питания и потребительских товаров. Отчасти это явление объясняется процессом приватизации предприятий торговли, значительными инвестициями в эту сферу экономики и, как следствие, – увеличением предложения. С другой стороны, в результате антиинфляционных мер, предпринимавшихся правительством, темп роста заработной платы на государственных предприятиях отставал от темпа инфляции. Продолжался рост безработицы. Результатом явилось снижение потребительского спроса. Характерная для предприятий торговли еще в период перестройки проблема – «чем торговать?» постепенно трансформировалась в привычную для капиталистических стран проблему – «как привлечь покупателя и продать продукт?». В условиях обостряющейся конкуренции неэффективная организация торговли, вытекающая из принципа «и так купят», стала непозволительной роскошью.

После отмены в 1995 г. нормативов торговой надбавки, уровень которой составлял 10-25%, предприятия торговли получили возможность самостоятельно устанавливать розничные цены. До этого, выгодно это было, или нет, большинство предприятий торговли устанавливали максимально возможное значение торговой надбавки. Во-первых, это упрощало процедуру калькуляции розничной цены. Вовторых, размер прибыли, который определяется прежде всего торговой надбавкой, еще не стал приоритетным критерием для предприятий торговли. Осенью 1998 г. верхний предел торговой надбавки на некоторые продукты питания был восстановлен. Но это мера временная, влекущая за собой дефицит продуктов, и потому особенно не желательная во время экономического кризиса.

Целью данной работы является попытка построить модель функции спроса на продукцию предприятия торговли и управлять ее розничными ценами так, чтобы максимизировать прибыль.

Большинство ныне действующих предприятий торговли можно разделить на две группы. Первая – предприятия, действующие в условиях совершенной конкуренции или близких к ним. Размер их прибыли определяется, в основном, закупочными ценами. Это, как правило, мелкие предприятия, число которых неуклонно снижается. Предприятия второй группы, а их подавляющее большинство, работают в условиях, близких к монополистической конкуренции. После того, как нормативный верхний предел торговой надбавки перестал существовать, задача установления розничных цен стала для таких предприятий не только актуальной, но и весьма сложной. Ее решение предполагает анализ спроса на продукт данного предприятия.

Высокая розничная цена не всегда гарантирует максимальную прибыль. Столкнувшись с высокой ценой на привычный продукт, у которого есть хорошие заменители, покупатель либо откажется от покупки, либо найдет другого продавца, либо найдет хорошую замену продукта. С другой стороны, потери от снижения розничной цены могут не компенсироваться возросшей величиной спроса. Ориентация на повышение прибыли торгового предприятия предполагает дифференцированный подход к установлению розничной цены и оценку результатов принимаемых решений. Дифференциация эта, в основном, определяется расположением предприятия. Еще В. Войтинский (Войтинский, 1906) отмечал, что разные торговые предприятия устанавливают различные цены на продукт. Причем колебания цен являются следствием того, где находится предприятие и какой круг покупателей это предприятие обслуживает. Имеют значение и другие факторы: комфорт покупателей и культура обслуживания. Но именно расположение торгового предприятия имеет решающее значение.

Далее описан подход, позволяющий в ряде случаев получить практически значимые рекомендации в области розничного ценообразования. На примере продуктов питания подтверждены гипотезы о возможности получения статистически значимых эконометрических моделей функции спроса; о наличии сезонной составляющей спроса; о возможности принятия решений, позволяющих увеличить прибыль фирмы.

1. Проблемы максимизации ренты торгового предприятия

Микроэкономический анализ торгового предприятия проводится применительно к кратчайшему периоду (*immediate period*), когда все ресурсы предприятия (торговые площади, трудовые ресурсы, оборудование, склад) фиксированы. В этом случае размер прибыли торгового предприятия определяется ассортиментом, количеством и стоимостью продукции, закупаемой для последующей реализации. Именно эти факторы определяют значение переменных издержек.

Будем предполагать, что закупленная предприятием продукция хранится на складах (арендуемых или принадлежащих этому предприятию), а объемы закупок любого продукта таковы, что выполняются следующие условия:

a) предприятие имеет резервные площади для хранения;

b) объем закупок гарантирует сохранность продукта в течение срока его реализации;

c) продукция закупается по минимальным ценам из доступных.

Если выполняются первое предположение, то издержки хранения могут быть отнесены к фиксированным издержкам. В случае, когда предприятие имеет свой склад, это внутренние издержки. Если склад арендуется, то – внешние издержки. Однако и в том и в другом случае издержки хранения можно считать не зависящими от объемов закупки. Если условие (a) будет нарушено, то предприятие вынуждено будет арендовать дополнительные склады. Издержки хранения в этом случае оказываются зависящими от объемов закупок и должны рассматриваться как переменные.

Таким образом, нарушение первого условия приводит к необходимости рассмотрения данной проблемы не в кратчайшем, а хотя бы в краткосрочном (*short run*) периоде. Последняя задача выходит за рамки данной работы. Заметим, что выполнение первого условия автоматически обеспечивается в случае, если размер складских запасов не превосходит заданной для каждого продукта величины.

В кратчайшем периоде в качестве переменных издержек можно рассматривать издержки, связанные с закупкой продукта плюс транспортные издержки. Причем если выполняется условие (b) и продукт не портится, то в кратчайшем периоде издержки на закупку могут учитываться не в момент закупки, а в момент реализации продукции. Это не повлияет на размер совокупной прибыли для заданного интервала времени.

Так как продукция закупается по минимальным ценам (предположение (c)), то переменные издержки являются минимальными. Тогда задача максимизации прибыли в кратчайшем периоде сводится к определению розничных цен, при которых разность между доходом и переменными издержками достигает максимума. Эту величину обычно называют излишком производителя. Однако в нашем случае использование этого термина представляется не вполне оправданным. Ведь речь идет не о производстве, а о торговле (посреднической деятельности). Поэтому более уместным представляется термин «квазирента», предложенный А. Маршаллом (Маршалл, 1983) для обозначения величины дохода, остающейся после уплаты переменных издержек фирмы в краткосрочном периоде.

Итак, основной целью дальнейшего рассмотрения является формирование принципов определения таких розничных цен, при которых квазирента торгового предприятия достигает максимального значения. В основе подхода – эконометрический анализ функций спроса.

Введем следующие обозначения:

t – момент времени (неделя, день);

Z – прибыль в момент времени;

z – квазирента в момент времени;

R – доход в момент времени;

FC – фиксированные (постоянные) издержки;

VC – переменные издержки;

w_i – количество i-го продукта, проданное в момент времени;

p_i – цена i-го продукта;

avc_i – средние переменные издержки на закупку единицы i-го продукта.

Имеют место следующие соотношения:

$$R = \Sigma\, p_i\, w_i\,,$$
$$VC = \Sigma\, avc_i\, w_i$$
$$Z = R - VC - FC.$$

Будем считать, что количества продаваемых продуктов w_i и средние переменные издержки avc_i зависят от цен продуктов $\{p_i\}$.

Задача безусловной максимизации прибыли в зависимости от цен продуктов p_i :

$$\max Z = \max\,(R - VC - FC)$$

сводится к задаче

$$\begin{aligned} \max z &= \max(R - VC) = \\ &= \max[\Sigma\, p_i\, w_i - \Sigma\, avc_i\, w_i] = \\ &= \max[\Sigma\,(p_i - avc_i)\, w_i]. \qquad (1) \end{aligned}$$

2. Определение розничной цены на продукт при заданной функции спроса

Предположим, что любые два из числа рассматриваемых продуктов не являются сопряженными. Это означает, что изменение цены на продукт не приводит к изменению спроса на другие продукты, то есть перекрестная эластичность спроса по цене для любых двух продуктов равна нулю. Это весьма жесткое предположение мы постараемся в дальнейшем ослабить. Однако сейчас оно позволяет нам продолжить цепочку равенств (1):

$$\max_{\{p_i\}} [\Sigma_i (p_i - avc_i)\, w_i] = \Sigma_i \max_{p_i} [(p_i - avc_i)\, w_i].$$

Итак, при сделанных выше предположениях задача максимизации прибыли торгового предприятия в рассматриваемый момент времени сведена к задаче определения розничной цены на продукт (индекс *i* продукта опускаем):

$$\max_{p} [\,(p - avc)\, w]. \qquad (2)$$

Пусть

w = f (p) – функция спроса на продукт,

c – закупочная цена продукта,

mc - предельные издержки закупки;

mr - предельный доход от реализации продукта.

Предположим, далее, что для некоторого периода времени (месяц, квартал) **функция спроса не изменяется и закупочная цена постоянна** (не зависит от объема закупок). Тогда задача (1) максимизации квазиренты для периода времени эквивалентна задаче (2).

При этом выполняются соотношения

$avc = mc = c$,

Пусть

$I = (p - c)/c$ – индекс наценки на продукт.

Тогда имеют место следующие соотношения:

$p = c\,(1+ I\,)$,

$avc\ w = p\ w/(1+ I\,)$.

Рассмотрим два случая, соответствующих различным функциям спроса.

Случай 1.

Функция спроса на продукт имеет вид

$w = a\,p^{-b}$, $b > 1$,

a, b - параметры.

Для такой функции спроса эластичность E спроса по цене постоянна и равна -b.

Из соотношений

$mr = p\,(1+1/E)$ – соотношение, связывающее предельный доход и цену,

$mr = mc$ – необходимое условие максимума прибыли,

$mc = avc = c$ – следствие постоянства закупочной цены,

$p = c(1+ I\,)$ – связь розничной и закупочной цен,

$E = - b$ – следствие выбора вида функции спроса (с постоянной эластичностью),

получаем

$$p^* = (b/b\text{-}1)c, \qquad (3)$$

$$I^* = 1/(b\text{-}1), \qquad (4)$$

где p* – цена, являющаяся решением задачи (2), I* – оптимальный индекс наценки.

Таким образом, в случае, когда удается получить модель спроса в виде функции с постоянной эластичностью, индекс наценки является фиксированным и розничная цена, являющаяся решением задачи (2), определяется формулой (3).

Заметим, что максимальное значение норматива торговой надбавки на продукты питания, использовавшееся до 1995 г., составляло 25%. Как следует из формулы (4), такая надбавка является оптимальной при эластичности спроса, равной 5. Учитывая, что эластичность спроса на большинство продуктов в розничной торговле ниже, торговая надбавка в 25% представляется явно заниженной. Это, впрочем, подтверждает факт, что большинство розничных цен на продукты питания имели верхний предел до 1991 г.

Случай 2.

Предположим теперь, что функция спроса на продукт не является функцией с постоянной эластичностью. Пусть она линейна и имеет вид

$w = a - b\,p$, $b > 0$.

Тогда эластичность E спроса по цене в имеющем место интервале изменения цен равна $E = -bp/w = -bp/(a-bp)$.

Из системы соотношений

$$
\begin{aligned}
&mr = p\,(1+1/E)\\
&mr = mc\\
&mc = avc = c\\
&p = (1+I)c\\
&E = -bp/(a-bp)
\end{aligned}
$$

получаем:

$$p^* = c/2 + a/2b, \tag{5}$$

$$I^* = w/(a-2w)=(a-bp)/(2bp-a). \tag{6}$$

Таким образом, в случае, когда спрос моделируется линейной функцией, индекс наценки не является постоянным и определяется формулой (6), а розничная цена, являющаяся решением задачи (2), определяется формулой (5).

3. Составляющая квазиренты для агрегированного продукта

Представленный выше подход к решению задачи (1) путем сведения ее к совокупности задач вида (2) может быть использован в случае, если рассматриваемые продукты не являются сопряженными. Однако на практике это предположение обычно не выполняется. Оптимальные цены на продукты взаимозависимы. Обычно изменение цены на один продукт приводит к изменению спроса на другие продукты. В последнем случае независимое решение задач вида (2) для каждого продукта в отдельности не обеспечивает максимальное значение квазиренты.

К тому же, в рассматриваемом кратчайшем периоде розничная цена на продукт либо не изменяется, либо изменяется незначительно. Это обстоятельство затрудняет сбор статистики для построения эконометрической модели функции спроса на продукт. Для того, чтобы построить функцию спроса, пришлось бы принудительно изменять цену в достаточно широком диапазоне, что неизбежно привело бы к потере прибыли торгового предприятия. Причем при изменении функции спроса такой эксперимент необходимо повторять. Если учесть, что среднее торговое предприятие реализует одновременно несколько сотен продуктов, то становится очевидным, что определение оптимальной цены для каждого продукта в отдельности – задача практически не выполнимая. Можно, однако, решать задачу определения цены не для каждого продукта в отдельности, а для агрегатов или, другими словами, групп продуктов.

Пусть M – множество продуктов, реализуемых торговым предприятием. Предположим, что множество M может быть разбито (не обязательно единственным образом) на непересекающиеся группы продуктов m_j так, что $M = (m_1,...,m_s)$, причем перекрестная эластичность спроса по цене равняется нулю для любых двух продуктов, оказавшихся в разных группах. Такую группу продуктов, связанных отношениями взаимозаменяемости и взаимодополняемости, именуют отделимой группой (Петров, 1996). Тогда для отделимой группы продуктов

$$\max_{\{p_i\}} \Big[\sum_{M} (p_i - avc_i)\, w_i\Big] = \sum_{j=1}^{s} \max_{\{p_i\}} \sum_{i \in m_j} \big[(p_i - avc_i)\, w_i\big]. \tag{7}$$

При сделанных выше предположениях задача максимизации квазиренты торгового предприятия сведена к задаче максимизации ее составляющей по некоторой отделимой группе продуктов m. Последняя задача может быть представлена следующим образом:

$$\max_{\{p_i\}} \sum_{i\in m} [(p_i - avc_i)\, w_i] = \max_{\{p_i\}} [\sum_{i\in m} p_i\, w_i - \sum avc_i\, w_i]$$

или

$$\max_{\{p_i\}} \{[(\sum_{i\in m} p_i\, w_i)/ \sum_{i\in m} w_i - (\sum_{i\in m} avc_i\, w_i)/ \sum_{i\in m} w_i] \sum_{i\in m} w_i \}.$$

Предположим далее, что для определенной группы количество любого продукта оценивается с помощью одной и той же единицы измерения. Например, для всех продуктов питания такой единицей измерения может быть 1 кг, для некоторых промышленных продуктов – 1 шт. Всю совокупность продуктов, входящих в одну группу, будем называть агрегированным продуктом или агрегатом.

Ближайшая задача состоит в том, чтобы выбрать способ агрегирования продуктов в группы и сформулировать задачу (7) в терминах агрегатов.

Предлагаемый метод формирования агрегата близок по сути к тому, который положен в основу построения индекса цен и индекса спроса в вышеупомянутой работе А.А.Петрова. В то же время он позволяет сохранить экономический смысл функции спроса для агрегированного продукта.

Пусть

$W = \sum_{i\in m} w_i$ – величина спроса на агрегат,

$P = (\sum_{i\in m} p_i\, w_i) / \sum_{i\in m} w_i$ – цена агрегата, т.е. средневзвешенная цена продуктов группы.

$AVC = (\sum_{i\in m} avc_i\, w_i)/ \sum_{i\in m} w_i$ – средние издержки единицы агрегированного продукта.

Далее вопросы существования цены агрегата и средних издержек рассматриваются с точки зрения возможности построения эконометрических моделей функции спроса и функции издержек.

В новых обозначениях задача максимизации квазиренты сводится к задаче максимизации величины

$$z_m = P\, W - AVC\, W,$$

которую в дальнейшем мы будем называть **составляющей квазиренты по группе продуктов.**

Из (7) следует, что квазирента предприятия равна сумме составляющих квазиренты по всем группам продуктов, т.е.

$$z = \sum_{j=1}^{s} z_{m_j} .$$

Следует отметить, что «агрегированный продукт» и «составляющая квазиренты» зависят от того, как именно сформирована группа продуктов. Поэтому величина квазиренты торгового предприятия, определяемая для всей совокупности продуктов, может быть различными способами представлена в виде суммы составляющих, причем, в виду (7), максимальное значение квазиренты не зависит от способа разбиения всей совокупности продуктов на группы. При этом задача максимизации квазиренты (1) сводится к нескольким задачам вида

$$\max_P z_m = \max_P [P\, W(P) - AVC(W(P))\, W(P)]. \quad (8)$$

Заметим, что в отличие от рассмотренных выше случаев, функция средних переменных издержек AVC(W) для агрегированного продукта не обязательно является постоянной даже в случае, когда закупочные цены на продукты не изменяются. Для решения задачи (8) могут использоваться различные подходы.

4. Оптимальная цена агрегированного продукта

Пусть $\{ W_t \}$, $\{ P_t \}$, $\{AVC_t \}$ – временные ряды:

W_t – величина агрегированного спроса на все продукты группы в момент t,

P_t – средняя цена на продукты группы в момент t,

AVC_t – средние издержки на закупку единицы продукта группы, проданного в момент t.

Тогда может быть построен ряд $\{VC_t \}$, где

$VC_t = AVC_t\, W_t$ – издержки на закупку всех продуктов группы в момент t.

Соответственно, если построен ряд $\{VC_t\}$, то может быть построен ряд $\{AVC_t\}$.

Предполагается, что в рассматриваемом временном интервале функция спроса на агрегированный продукт существует и не меняется.

Предположим, что удается построить эконометрическую модель функции спроса

$$W = f\,(P)$$

и эконометрическую модель функции издержек

$$VC = g\,(W).$$

Тогда величина W* спроса на агрегат, при которой достигается максимум составляющей квазиренты по группе (8), может быть получена из условия MR = MC, которое в принятых обозначениях имеет вид

$$(W\, f^{-1}\,(W))' = (\, g(W))'\,,$$

а оптимизирующая составляющую квазиренты средняя цена P* на продукты группы равна

$$P^* = f^{-1}\,(W^*).$$

Такой способ определения средней цены P*, максимизирующей величину квазиренты, возможен, если величина спроса на агрегат зависит только от цены, т.е. функция спроса имеет вид W = f (P). Это предположение выполняется, если для рассматриваемого периода времени все факторы спроса постоянны. Учитывая, что рассматриваемый период времени непродолжителен, можно, например, считать, что для этого периода времени средний уровень доходов потребителя не меняется. Однако даже в кратчайший период времени спрос зависит от числа покупателей.

Количество покупателей как фактор функции спроса

Функция спроса на агрегат может иметь параметр:

$W = f(P, n)$,

где n – число покупателей.

Для построения такой функции спроса помимо временных рядов $\{W_t\}$, $\{P_t\}$, $\{AVC_t\}$ требуется временной ряд $\{n_t\}$. Однако получить значения n_t практически оказывается достаточно сложно. Вес и стоимость продаваемых продуктов фиксируются любым торговым предприятием, в то время как количество покупок товаров данной группы, как правило, не регистрируется. Оценку сверху для величины nt можно получить по числу пробитых кассовых чеков. Однако такая оценка может быть сильно завышенной.

В ряде случаев можно предположить, что число покупателей изменяется циклически и последовательно принимает значения $(n^1,..., n^k, n^1,..., n^k, n^1,...)$. Такое предположение представляется оправданным, если круг покупателей является замкнутым, т.е. определенная группа людей пользуется исключительно услугами одного предприятия, торгующего продуктами питания. В этом случае число покупателей для каждого дня недели можно считать известным и условно постоянным для некоторого периода времени. При этом для различных дней недели число покупателей может совпадать.

В этом случае модель функции спроса может иметь вид

$W = f(P_t, n^1 d_t^1,..., n^k d_t^k)$, или

$$W_t = f(P_t, d_t^1,..., d_t^k), \quad (9)$$

где фиктивная переменная

$d_t^u = 1$ при $t = us$, где s – натуральное число;

$d_t^u = 0$ в противном случае.

$u = 1,...,k$

Для момента времени, кратного u, мы можем построить функцию спроса, имеющую вид

$W = f_u(P)$.

Используя предыдущие рассуждения можно сделать вывод, что для любого момента времени, кратного u, существует средняя цена, опимизирующая составляющую квазиренты по группе для данного момента времени. Это означает, что для разных дней недели средняя цена для группы продуктов может изменяться.

Если временной ряд $\{n_t\}$ построен, то значения $n^1,..., n^k$ могут быть определены как средние значения числа покупателей по дням недели.

Даже если круг покупателей является открытым (но не расширяется), то можно считать, что число покупателей, пользующихся услугами торгового предприятия, принимает конечное число значений. Однако в этом случае верификация модели вида (9) связана с определенными трудностями.

Подход, основанный на анализе составляющей квазиренты

Пусть $\{z_t\}$, $\{P_t\}$ – временные ряды:

z_t– величина составляющей квазиренты, полученной от реализации продуктов группы в момент t,

P_t – средняя цена на продукты группы в момент t.

Предположим, что построена эконометрическая модель составляющей квазиренты от цены

$z = h(P)$.

Если в качестве функции h рассматривается строго выпуклая вверх функция (например, полином $h(P) = aP^2 + bP + c$, где $a < 0$), то в случае значимых оценок параметров оптимизирующая составляющую квазиренты средняя цена P* на продукты группы определяется из условия

$h' = 0$.

Если значение P* находится вне интервала, содержащего фактические значения цен P_t, то появляется основание для корректировки розничных цен на продукты группы.

В качестве функции h можно рассматривать и линейную функцию

$h(P) = bP + c$.

В этом случае оптимальное значение средней цены определить не удается. Однако знак коэффициента b указывает желательное направление изменения средней цены.

Здесь рассмотрены наиболее простые возможности определения оптимальной средней цены на продукты группы или направления ее изменения. Остается проблема соответствующей корректировки розничных цен на отдельные продукты. Как будет показано ниже, для случая двух продуктов такая корректировка возможна. В общем случае корректировка розничных цен может проводится эмпирически. Важно однако, что оптимальное значение средней цены P* или желательное направление ее изменения известно. Поэтому результат корректировки значений розничных цен на отдельные продукты группы может быть оценен.

5. Зависимость квазиренты от ассортимента

Будем считать, что в рассматриваемом кратчайшем периоде группа продуктов фиксирована, однако в каждый момент времени в продаже не обязательно находятся все продукты группы. Тогда число N продуктов, находящихся в продаже, может оказывать влияние на величину составляющей квазиренты.

Пусть

z_t – величина составляющей квазиренты по группе в момент t,

N_t – количество продуктов группы в момент t, для каждого из которых величина спроса положительна.

Тогда эконометрическая модель

$z = a + b N$

может показывать, с какой скоростью изменяется квазирента, если изменяется количество продуктов группы, находящихся в продаже, т.е. ассортимент продуктов.

Из постановки задачи следует, что коэффициент b должен быть неотрицательным. В этом случае значение b показывает, на сколько в среднем изменится величина квазиренты, если количество продуктов группы будет увеличено на единицу. Эта информация позволяет принимать решения относительно изменения ассортимента продуктов по группе. Если величина b значительна, то ассортимент продуктов следует увеличить. Разумеется, соответствующее решение должно приниматься с учетом резервных площадей склада и складских запасов по каждому продукту группы.

6. Примеры

Исходная информация

Для проверки возможности использования регрессионного анализа при формировании решения по изменению цен и ассортимента была использована информация о продаже ряда продуктов, традиционных для российских продовольственных магазинов, в течение тридцати шести рабочих дней. Данные были собраны в августе – сентябре 1996 г. по методике, предложенной автором, и предоставлены для проведения экспериментальных расчетов небольшим московским торговым предприятием, услугами которого пользуется ограниченный круг жителей микрорайона.

Эконометрический анализ проводился для нескольких групп продуктов. Изложенные ниже результаты эксперимента касаются группы «колбасные изделия». При этом в группу включены взаимозаменяемые продукты. Предполагается, что взаимодополняемость продуктов является слабой.

Данные по объему продаж каждого продукта, реализованного торговым предприятием, предоставлялась каждые два дня. При этом фиксировались: объем продаж продукта, закупочная цена, розничная цена и число продуктов в группе. Затем путем агрегирования для каждой группы продуктов были построены пять временных рядов

$$\{ W_t \}, \{ P_t \}, \{AVC_t \}, \{ z_t \} \ \{ N_t\} .$$

Здесь индекс t соответствует временному интервалу в два дня. Одна шестидневная рабочая неделя торгового предприятия характеризуется тремя точками. Таким образом, в рассматриваемых примерах

W_t – средняя для одного дня величина спроса на агрегированный продукт (определена по данным за два дня),

P_t – средняя цена на продукты группы,

AVC_t – средние издержки на закупку единицы продукта группы;

z_t – средняя за день величина составляющей квазиренты по группе,

N_t – среднее для одного дня количество продуктов группы, для каждого из которых величина спроса положительна.

В ходе анализа выявлялись регрессионные зависимости:

z(P) – зависимость составляющей квазиренты по группе от средней цены;

z(N) – зависимость составляющей квазиренты по группе от числа продуктов;

z(P,N) – зависимость составляющей квазиренты по группе от средней цены и числа продуктов;

W(P) – зависимость величины спроса на агрегированный продукт от средней цены (функция спроса)

$W(P, n^1d^1,..., n^kd^k)$ – зависимость величины спроса на агрегированный продукт от средней цены и числа покупателей;

AVC(W) – зависимость средних издержек на закупку от величины спроса на агрегированный продукт;

В общем случае рассматривались зависимости вида:

$z = a + b P + c N$;
$z = a+b P$;
$z = a+b P+c P^2$;
$z = a+b N$;
$\ln(z) = a+b \ln(P) + c \ln(N)$;
$\ln(z) = a+b \ln(P)$;
$\ln(z) = a+b \ln(N)$;
$W = a+bP+ cd$;
$W = a+bP$;
$\ln(z) = a+b \ln(P) + cd$;
$\ln(z) = a+b \ln(P)$;
$AVC = a+b W$;
$AVC = a+b \ln(W)$.

(d - введенная выше фиктивная переменная при R=1).

Анализ результатов моделирования основывается на следующих замечаниях:

1. Отсутствие статистически значимой зависимости квазиренты от цены говорит о том, что нет оснований для изменения цен на продукты группы.

2. Если удается построить статистически значимую зависимость квазиренты от цены, то появляется возможность определить либо значение оптимальной средней цены, либо направление ее изменения.

3. Если удается построить статистически значимые функцию спроса и функцию средних переменных издержек, то можно определить оптимальную, среднюю цену. Появляется также возможность определить эластичность спроса по цене и среднюю цену, при которой достигается максимум дохода.

4. Наличие статистически значимой регрессионной зависимости квазиренты от числа продуктов группы позволяет давать рекомендации по направленному изменению числа (ассортимента) продуктов и оценку прироста составляющей квазиренты.

Результаты моделирования

Ниже для группы продуктов «колбасные изделия» (17 наблюдений) приведены:

- статистически значимые зависимости;

- показатели статистической значимости;

- выводы и рекомендации.

1. Зависимость между количеством продаваемых продуктов (W) и средней ценой (P) (функция спроса).

1.1. Линейная зависимость:

$$W_t = a_1 + b_1P_t + \varepsilon_t.$$

Коэффициент	Значение	Std. Error	t-value	t-prob
a_1	77.076	21.336	3.613	0.0026
b_1	- 0.0018431	0.00094961	-1.941	0.0713

$R^2 = 0.20073$; $F(1, 15) = 3.7671$ [0.0713]; $\sigma = 18.0601$; $DW = 2.53$;

$RSS = 4892.525876$

Результаты проверки статистических гипотез:

Тест на наличие автокорреляции остатков второго порядка:

$\chi^2(2)$ = 1.7363 [0.4197] и F(2, 13) = 0.73942 [0.4964] – гипотеза о наличии автокорреляции остатков отвергается.

Проверка нормальности остатков:

$\chi^2(2)$= 2.0789 [0.3536] – гипотеза о нормальности распределения остатков принимается.

Проверка гетероскедостичночсти остатков:

$\chi^2(2)$ = 1.0447 [0.5931] и F(2, 12) = 0.39285 [0.6835] – гипотеза об отсутствии гетероскедостичности остатков принимается.

1.2. Экспоненциальная зависимость:

$\ln(W_t) = a_2 + b_2\ln(P_t) + \varepsilon_t$

Коэффициент	Значение	Std.Error	t-value	t-prob
a_2	21.954	6.9707	3.149	0.0066
b_2	-1.8564	0.69841	-2.658	0.0179

R^2 = 0.320185; F(1, 15) = 7.0648 [0.0179]; σ = 0.551206; DW = 2.11

RSS = 4.55742044

Как видно из приведенных результатов, обе регрессии значимы, но в экспоненциальном случае мы имеем лучшие значения всех статистик, что дает основание считать вторую регрессию более подходящей для описания зависимости между величиной спроса и средней ценой.

2. Зависимость между средними издержками (AVC) и величиной спроса (W)

2.1. Линейная зависимость:

$AVC_t = a_3 + b_3W_t + \varepsilon_t.$

Коэффициент	Значение	Std.Error	t-value	t-prob
a_3	22214.	1899.0	11.697	0.0000
b_3	-92.388	46.116	-2.003	0.0635

R^2 = 0.21109; F(1, 15) = 4.0136 [0.0635]; σ = 3608.01; DW = 2.20;

RSS = 195266125

2.2. Экспоненциальная зависимость:

$\ln(AVC_t) = a_4 + b_4\ln(W_t) + \varepsilon_t$

Коэффициент	Значение	Std.Error	t-value	t-prob
a_4	10.412	0.21501	48.425	0.0000
b_4	-0.17089	0.061668	-2.771	0.0143

R^2 = 0.3386; F(1, 15) = 7.6792 [0.0143]; σ = 0.159672; DW = 1.91

RSS = 0.3824251882

И здесь экспоненциальная зависимость имеет лучшие значения всех статистик, что позволяет утверждать, что она лучше подходит для описания функции средних издержек (зависимости средних издержек от объема продаж).

Исходя из полученных выше результатов, имеем следующие экспоненциальные зависимости между средней ценой и объемом продаж (функция спроса), и средними издержками и объемом продаж (функция средних издержек (AVC):

AVC : $\ln(AVC_t) = 10.412 - 0.171\ \ln(W_t)$

Спрос: $\ln(W_t) = 21.954 - 1.856\ \ln(P_t)$

Из условия MR=MC определяем среднюю цену (в масштабе цен 1996 г.) и средний объем продаж агрегата, при которых квазирента максимальна:

W* = 9.56 кг; P* = 40633.26 руб.,
AVC* = 22580 .

При данных величинах оценка составляющей квазиренты для агрегата за день – 172586 руб. Фактически среднее значение цены агрегата составило 22063 (стандартная ошибка показателя σ = 4754), а средний объем продаж 36.41 (стандартная ошибка показателяσ = 19.7). Фактический средний размер квазиренты по группе – 126010.6, то есть оценка возможного увеличения квазиренты – 36%. Разумеется, значение средней цены P = 40633.26 можно рассматривать лишь как некий ориентир, но повышение средней цены является в данном случае обоснованным. Можно отметить также, что при существующем соответствии цена - продажи эластичность спроса на колбасные изделия по цене составляет для данного торгового предприятия E = -1.85. Отсюда можно получить коэффициент Лернера L = 0.54. При этом оптимальная торговая надбавка оказывается достаточно большой I* = 0.8.

Сразу следует отметить, что к полученным оценкам следует относиться с осторожностью, так как оптимальное значение цены находится за пределами интервала фактических значений переменных. Для сравнения приведем аналогичные результаты, полученные для линейных функций:

W* = 22.244 кг, P* = 30462.2 руб., AVC* = 20159,

E = -2.47, L = 0.4, I = 0.51.

Отметим, что средние значения цен, полученные для линейной функции спроса, меньше, чем для экспоненциальной функции. Эти количественные оценки представляются более реалистическими на фоне наблюдаемых значений переменных. Важно отметить, что вывод о целесообразности повышения средней цены, полученный выше с помощью экспоненциальной модели, остается в силе. В обоих случаях предлагается обеспечить увеличение цены агрегированного продукта.

3. Оценка «сезонной» составляющей функции спроса.

Рассматривается зависимость

$$w_t = a + b\, p_t + c\, d_t + \varepsilon_t,$$

где d – фиктивная переменная:
d_t = 1 при t = 3 s, где s – целое число;
d_t = 0 в противном случае.

Фиктивная переменная принимает значение 1 для каждой третьей точки ряда, соответствующей последним дням каждой недели. Использование этой фиктивной переменной позволяет провести различие между числом покупателей в первые четыре дня недели и числом покупателей в конце недели.

Коэффициент	Значение	Std.Error	t-value	t- prob
a	68.77	20.045	3.431	0.0041
b	-0.001713	0.000871	-1.966	0.0695
c	18.017	8.8215	2.042	0.0604

R^2 = 0.3948; F(2,14) = 4.5672 [0.0297]; DW = 2.29; RSS=3789.36 .

Спрос W = 68.778 – 0.0017 P + 18.017 d.

Для сравнения, функция спроса без учета сезонности имела вид

W = 77.076 – 0.00184 P.

Для функции спроса, учитывающей сезонность, и линейной функции средних издержек получены следующие значения средней цены и средняя величины спроса.

Время	Средняя цена P	Средняя величина спроса W(в день)
Начало недели	29629	18.11
Конец недели	33916	29.14

Таким образом, учет колебания спроса по дням недели указывает на возможность использования разных цен в разные дни. Этот результат не противоречит принятой в ряде западных стран практике повышения розничных цен на продукты питания для трех последних дней недели.

4. Зависимость составляющей квазиренты (z) ***от ассортимента*** (N).

Здесь значимые зависимости получены как в линейном виде, так и в логарифмах.

4.1. Линейная зависимость:

$z_t = a_5 + b_5N_t + \varepsilon_t$

Коэффициент	Значение	Std. Error	t-value	t-prob
a	31260	39687	0.788	0.4432
b	15598	7492.2	2.082	0.0549

$R^2 = 0.224183$; F(1, 15) = 4.3345 [0.0549]; $\sigma = 54027.2$; DW = 2.35

RSS = 4.378409673e+010

4.2. Экспоненциальная зависимость:

$\ln(z_t) = a_6 + b_6\ln(N_t) + \varepsilon_t$

Коэффициент	Значение	Std.Error	t-value	t-prob
a_6	10.081	0.65644	15.357	0.0000
b_6	0.87985	0.41323	2.129	0.0502

$R^2 = 0.232084$; F(1, 15) = 4.5334 [0.0502]; $\sigma = 0.521333$; DW = 2.21

RSS = 4.076816681

Можно сделать вывод, что для моделирования зависимости между прибылью и ассортиментом экспоненциальный вид подходит больше. Следует обратить внимание также на положительную зависимость между прибылью и ассортиментом – увеличение числа продаваемых сортов колбасных изделий ведет к увеличению прибыли. Это означает, что прибылью можно управлять с помощью изменения ассортимента.

Итоговые рекомендации по группе продуктов:

- цены на продукты группы следует изменить так, чтобы средняя цена увеличилась;
- средняя цена для двух последних рабочих дней недели может быть выше, чем средняя цена для первых дней;
- ассортимент продуктов данной группы следует расширить.

7. Проблема регулирования цены агрегированного продукта

В предыдущем разделе было показано, что в результате анализа эконометрической модели спроса может быть получена рекомендация по корректировке цены на агрегированный продукт. Пусть, для определенности, требуется повысить цену на агрегированный продукт. Естественно попытаться сделать это, увеличив цены на все продукты, входящие в агрегат. Однако, в результате увеличения цен на все продукты, цена агрегата может уменьшиться. Покажем это на примере.

Пусть агрегат состоит из двух продуктов,

g – цена первого продукта,

q – цена второго продукта,

x – величина спроса на первый продукт,

y – величина спроса на второй продукт,

$x = 30 - 15\,g + 10\,q$ – функция спроса на первый продукт,

$y = 5 + 10\,g - 15\,q$ – функция спроса на второй продукт.

Продукты являются взаимозаменяемыми, что вполне естественно при формировании агрегированного продукта.

Пусть $g = 2$, $q = 1$. Тогда $x = 10$, $y = 10$. При этом величина спроса и цена агрегированного продукта соответственно равны $W = 20$, $P = 3/2$.

Увеличим цену на первый, более дорогой продукт, оставив без изменения цену на второй продукт.

Пусть $g = 2.2$, $q = 1$. Тогда $x = 7$, $y = 12$. При этом величина спроса и цена агрегированного продукта соответственно равны $W = 19$, $P=274/190$.

Нетрудно видеть, что цена агрегированного продукта уменьшилась. В силу непрерывности функций спроса можно сделать следующий вывод.

Увеличение цен на все продукты может привести к снижению цены на агрегат.

Верно и обратное утверждение.

Снижение цен на все продукты может привести к увеличению цены на агрегат.

И все же в ряде случаев целенаправленная корректировка цены агрегированного продукта возможна. Для того, чтобы показать это, исследуем, как изменяется цена агрегированного продукта при изменении цены на продукт, входящий в агрегат.

Рассмотрим тот же случай, когда агрегат состоит из двух продуктов.

Пусть $x = x(g,q)$ – спрос на первый продукт; $y = y(g,q)$ – спрос на второй продукт.

Предположим, что функции x и y дифференцируемы, причем

$$x'_g < 0, \;\; x'_q > 0, \;\; y'_g > 0, \;\; y'_q < 0$$

Закон спроса выполняется, и продукты являются взаимозаменяемыми.

Будем рассматривать функции x и y в области, где $x > 0$ и $y > 0$, то есть величина спроса на оба продукта положительна.

Рассмотрим условия, при которых выполняется неравенство

$$P'_g > 0, \qquad (10)$$

то есть определим условия, при которых увеличение цены на один из продуктов (первый) приведет к увеличению цены на агрегат.

Так как

$$P'_g = (\,(gx+qy)/(x+y))'_g\,,$$

неравенство (10) можно записать в виде

$$[(x + g\,x'_g + q\,y'_g)(x+y) - (g\,x+q\,y)(\,x'_g + y'_g)] \,/\, (x + y)^2 > 0.$$

Отсюда получаем эквивалентное неравенство

$$[x^2 + xy + (g-q)(\,y\,x'_g - x\,y'_g\,)] > 0. \quad (11)$$

Так как $x'_g < 0$ и $y'_g > 0$, имеем $y\,x'_g - x\,y'_g < 0$.

Теперь от неравенства (11) можно перейти к неравенству

$$g < q + (x^2 + xy) \,/(\, - y\,x'_g + x\,y'_g\,).$$

Так как

$(x^2 + xy) /(- y\, x'_g + x\, y'_g) > 0,$

неравенство $g \le q$ является достаточным условием выполнения неравенства (10).

Таким образом, справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1.

Если агрегат состоит из двух взаимозаменяемых продуктов и величина спроса на каждый продукт положительна, то малое увеличение цены на продукт, имеющий меньшую или равную цену, приведет к увеличению цены на агрегат.

Утверждение 2.

Если агрегат состоит из двух взаимозаменяемых продуктов и величина спроса на каждый продукт положительна, то малое снижение цены на продукт, имеющий большую или равную цену, приведет к снижению цены на агрегат.

Обобщение этих утверждений на случай нескольких продуктов связано с определенными трудностями, так как для функции спроса на агрегат сделанные выше предположения могут не выполняться (из дифференцируемости функций спроса на отдельные продукты не следует дифференцируемость и даже однозначность функции спроса на агрегат).

В то же время, доказанное утверждение может служить основанием для принятия практических рекомендаций, связанных с целенаправленной корректировкой розничных цен на продукты, входящие в агрегат.

8. Оценивание спроса в динамике

Можно ли рассчитывать на то, что оценки, полученные на основе фиксированного числа наблюдений, будут устойчивыми во времени? Предположим, что мы основываемся при выдаче рекомендаций на информации, собранной не за все 35 дней (17 наблюдений), а за более короткие сроки. Рассмотрим как изменятся оценки, если расчеты будут проводиться для четырех выборок из 14 точек каждая. При этом для очередной выборки соответствующий ряд получен из предыдущего добавлением одной точки, соответствующей следующему моменту времени и отбрасыванием первой точки. Обозначим эти периоды соответственно 1, 2, 3 и 4. Пересчитав коэффициенты для экспоненциальной модели спроса и средних издержек,

$$\ln(W_t) = a_2 + b_2\ln(P_t) + e_{1t}$$
$$\ln(AVC_t) = a_4 + b_4\ln(W_t) + e_{2t}$$

получим следующие результаты:

	Период 1	**Период 2**	**Период 3**	**Период 4**
a_2	22.83	19.8	19.9	19.1
b_2	-1.94	-1.64	-1.64	-1.59
a_4	10.55	10.31	10.33	10.33
b_4	-0.2	-0.16	-0.15	-0.15
W_o	7,10	8,73	9,78	7,31
P_o	46971	46699	46331	47135
W_r	35,15	35,06	37,77	39,30
P_r	22465	21922	21546	21357

(W_o – «оптимальный» по расчетам средний объем продаж в день,

P_o – оптимальная средняя цена;

W_r и P_r – соответственно средний реальный объем продаж и значение реальной средней цены).

Из расчетов видно, что полученные результаты являются устойчивыми и принятые ранее рекомендации остаются в силе при скользящих рядах фиксированной длины.

Проведем тот же анализ для линейных моделей:

$W_t = a_1 + b_1 P_t + \varepsilon_{1t}$

$AVC_t = a_3 + b_3 P_t + \varepsilon_{2t}$.

	Период 1	**Период 2**	**Период 3**	**Период 4**
a_1	78.16	68.35	71.69	70.85
b_1	-0.0018	-0.0014	-0.0015	-0.0014
a_3	23358	21835	21482	21467
b_3	-115.32	-85.90	-77.84	-78.77
W_o	21,7	20,5	22,3	22,9
P_o	29869,57	32069,97	32901,42	34231,16
W_r	35,15	35,06	37,77	39,30
P_r	22465	21922	21546	21357

Здесь также можно сделать вывод об устойчивости получаемых оценок и рекомендаций.

Хотя линейная модель сама по себе хуже экспоненциальной, она дает более реальные результаты (отчасти это объясняется тем, что расчетное оптимальное значение далеко от среднего) . Рекомендации же по изменению цены в обоих случаях одинаковы, то есть не зависят от вида функций спроса и издержек.

Заключение

Предложенный подход к оценке спроса на агрегированный продукт отражает существующую практику объединения продуктов в группы (секции), включающие взаимозаменяемые продукты. Предполагается, что взаимодополняемость продуктов из разных групп является слабой. Это соответствует представлению о том, что покупатель, войдя в секцию магазина, не откажется от покупки в пользу продуктов из другой секции. Такое предположение является существенным в теории «линейной системы расходов» (Stone, 1954), в соответствии с которой издержки на продукты определенной группы пропорциональны величине дохода. Проведенные эксперименты подтверждают возможность построения функции спроса на агрегат. Это позволяет оценить эластичность спроса и формировать рекомендации по корректирорвке цены агрегированного продукта. Кроме того, появляется возможность получать оценки характеристик спроса, представляющих интерес для решения задач прогнозирования.

Даже при постоянных ценах на отдельные продукты, цена агрегата реагирует на изменение объема продаж.

Целесообразна оценка сезонной составляющей спроса, так как оптимальная цена агрегата может различаться в начале и в конце периода.

Величина квазиренты торгового предприятия зависит от числа продуктов, входящих в агрегат. С ростом их числа составляющая квазиренты по группе возрастает.

Проведенные расчеты подтвердили предположения о возможности построения эконометрической модели спроса на агрегированный продукт.

Эксперименты показывают, что получаемые оценки устойчивы в динамике. Остается, впрочем, открытым вопрос о том, как интерпретировать получаемые результаты в случае, когда функция спроса меняется во времени.

ЛИТЕРАТУРА

Войтинский В.С. Рынок и цены. Теория потребления, рынка и рыночных цен. СПб, 1906. С.280.

Маршалл А. Принципы политической экономии. Т.1, М.: Прогресс, Универс., 1983. Стр. 135-136.

Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоиздат., 1996. Стр. 498-503.

Stone R. Linear Expeniture System and Demand Analysis. Application to the Pattern of British demand. // Econ. Journ. 1954, vol.64, №255